

PROCEEDINGS  
FIBONACCI

# 日本フィボナッチ協会 第14回研究集会報告書

2016年8月

日本フィボナッチ協会

## 日本フィボナッチ協会／第14回研究集会案内

日 時 2016年8月26日（金曜日） 10時30分～17時45分  
場 所 東京理科大学（神楽坂キャンパス）2号館4階の241・242教室  
アクセス 飯田橋駅（JR総武線、東京メトロ東西線、有楽町線、南北線、都営大江戸線）徒歩5分  
参加費 1000円（中学生・高校生・高専生は無料）  
懇親会 PORTA 会場の近く 会費4000円（学生・院生は半額）

主催：日本フィボナッチ協会

協賛：東京理科大学理数教育研究センター

### プログラム

講演（241教室）

司会 大関清太

10：30～10：35 開会の辞（大関清太）

10：35～10：50 萩原幸男（(公財)地震予知総合研究振興会）  
虫食いフィボナッチ数とその応用

10：50～11：05 田中億・西澤康汰・藤原望・丸山慶介（飯山高等学校3年）  
発表者：丸山慶介

フィボナッチ数に関係するいくつかの数列の可除性について

11：05～11：25 酒井悠帆（島根大学大学院総合理工学研究科）

一般 Lucas sequenceの素数における可除性とLaxton群について

11：25～11：45 細矢治夫（元お茶の水女子大）  
「七金三パズル」のその後の進展

11：45～11：55 五輪教一 福島の算額

11：55～12：05 小梁 修（OSA工房） 星型正多面体の体積

242教室

12：05～13：30 昼食、展示、数学体験館・近代科学資料館見学

司会 中村滋

13：30～13：40 青木美穂（島根大学大学院総合理工学研究科）

「17th International Conference on Fibonacci Numbers and  
Their Applications, at University of Caen, 6/27-7/2」  
の報告

13：40～13：55 宗像 修（福島県立矢吹病院）

13 : 55 ~ 14 : 15      フィボナッチ数とリュカ数の概念の拡張    M数列、N数列  
小松尚夫 (武漢大学)

The sum of reciprocal Balancing numbers

14 : 15 ~ 14 : 35      渋川元樹 (大阪大学情報)

abenacci数とabelucas数

14 : 35 ~ 14 : 55      飯高 茂 (元学習院大学)

ポケモンGoより面白い半完全数の世界

14 : 55 ~ 15 : 10      尾立貴志

エントロピー：その形式的呪縛からの解放

15 : 10 ~ 15 : 30      根岸利一郎 (埼玉工大)

フーリエ変換で得られる連なりらせん数

241教室

15 : 30 ~ 16 : 00      休憩、展示

司会 青木美穂

16 : 00 ~ 16 : 20      中村 滋 (元東京海洋大学)

“新しい” フィボナッチ数・リュカ数の公式について

一松信 (元京都大学 中村滋 代読)

フィボナッチ数を含むある級数

16 : 20 ~ 16 : 35      山田宗太郎 (海城中学校2年)

格子の対角線の長さのEuler関数による表現

16 : 35 ~ 16 : 50      藤田眞作 (湘南情報数理化研究所)

点群のコンピューター指向表現---GAPでの取り扱いを目指して

16 : 50 ~ 17 : 00      岩淵勇樹 ((株)カヤック)    ワイツフ配列について

17 : 00 ~ 17 : 05      前山和喜 (工学院大学情報学部コンピュータ科学科)

フィボナッチ計算盤について

17 : 05 ~ 17 : 20      中川幸一 (埼玉大学)

Derivative of generating function of the general m-th order linear recurrence  
sequence 2

17 : 20 ~ 17 : 40      大塚秀幸 (文教大学附属高等学校)

On the sum of cubes of the Catalan triangle numbers

17 : 40 事務連絡 大関清太

17 : 45 閉会の辞

18 : 00 ~ 20 : 00 懇親会

日本フィボナッチ協会代表 大関清太

# 虫食いフィボナッチ数とその応用

(公財) 地震予知総合研究振興会 萩原幸男

## 1. フィボナッチ樹型モデル

●と○の2種類のノード(節)と、ノードを結ぶ枝よりなる樹型モデルを考える(図1).  $n$ を時間ステップとするとき、 $n$ において●であったノードは次のステップ  $n+1$  では○になり、 $n$ において○であったノードは  $n+1$  では●と○に変わるものとする. とくに樹型の根( $n = 1$ )は●と定める.

表1はステップ  $n$  ごとの●の個数  $B_n$  および○の個数  $W_n$  を示す. いまフィボナッチ数を記号  $F_n$  により表すものとすれば

$$B_1 = 1, B_n = F_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad W_n = F_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

の関係は明らかである. またその和は  $B_n + W_n = F_n$  となることも知れる..

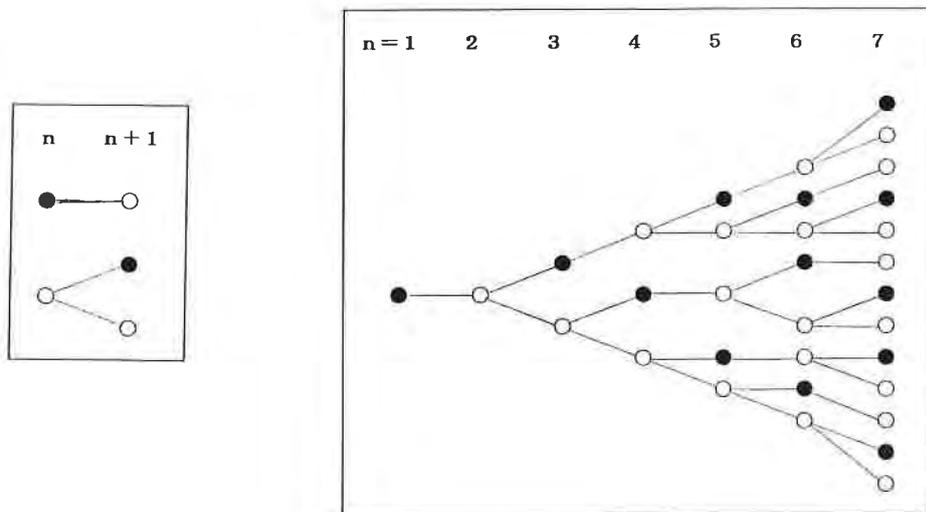


図1 フィボナッチ樹型モデル.  $n$ は時間ステップ.

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$B_n$	1	0	1	1	2	3	5
$W_n$	0	1	1	2	3	5	8
$F_n$	1	1	2	3	5	8	13

表1 時間ステップ  $n$  における●の個数  $B_n$  および○の個数  $W_n$  とその和  $F_n$ .

## 2. 遷移マトリックス

ベクトル  $(B_n, W_n)$  と  $(B_{n+1}, W_{n+1})$  を結ぶ遷移マトリックスを導入すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{pmatrix} B_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n \\ W_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$F_{n+1} = B_n + 2W_n \quad (3)$$

なおこの遷移マトリックスには次の便利な性質がある。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

## 3. 虫食いモデル

次いで樹型のノードが虫に食われることを想定する。一般に時間ステップ  $n$  において●が  $\varepsilon(n)$  個、○が  $\delta$  個虫に食われるものとすれば、式(2)の右辺に”虫食いベクトル”が加わる。すなわち

$$\begin{pmatrix} B_{n+1}^* \\ W_{n+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n^* \\ W_n^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon(n+1) \\ \delta(n+1) \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここでは虫食いの結果ノードの個数は変化するため、記号に\*を付けて区別している。

式(4)を繰り返し用いると、式(5)および  $F_n^* = B_n^* + W_n^*$  は  $n \geq 2$  において次式にまとめることができる。：

$$\left. \begin{aligned} B_n^* &= F_{n-2} - \sum_{k=1}^{n-1} \{F_{n-k-1} \varepsilon(k) + F_{n-k} \delta(k)\} - \varepsilon(n) \\ W_n^* &= F_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \{F_{n-k} \varepsilon(k) + F_{n-k+1} \delta(k)\} - \delta(n) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$F_n^* = F_n - \sum_{k=1}^n \{F_{n-k+1} \varepsilon(k) + F_{n-k+2} \delta(k)\} \quad (7)$$

## 4. 入出力伝達システム

入力  $F_n$  と出力  $F_n^*$  および入力と出力を結ぶ伝達関数  $H_n$  の通常型母関数をそれぞれ

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n, \quad f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^* t^n, \quad h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n \quad (8)$$

とおく ( $0 \leq t < 1$ ). このとき入出力伝達関数システムは次式により与えられる.

$$f^*(t) = h(t)f(t) \quad (9)$$

とくにフィボナッチ数の通常型母関数は

$$f(t) = t / (1 - t - t^2) \quad (10)$$

であるから, 伝達関数の母関数は

$$\begin{aligned} h(t) &= f^*(t) / f(t) = t^{-1} f^*(t) (1 - t - t^2) \\ &= F^*_1 + (F^*_2 - F^*_1)t + \sum_{n=3}^{\infty} (F^*_n - F^*_{n-1} - F^*_{n-2})t^{n-1} \end{aligned}$$

と展開することができる. 上式の左辺を式(8)の第3式に従って展開し,  $t$ のべき係数を比較することにより, 伝達関数は次式により表されることがわかる.

$$\begin{aligned} H_0 &= F^*_1 \\ H_1 &= F^*_2 - F^*_1 \\ H_{n-1} &= F^*_n - F^*_{n-1} - F^*_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{aligned} \quad (11)$$

さらに式(7)を用いれば, 式(11)は虫食いノードの個数  $\varepsilon(n)$  および  $\delta(n)$  により表すことができる. すなわち

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, \quad H_1 = 0 \\ H_2 &= -\varepsilon(3) - \delta(3) \\ H_n &= -\varepsilon(n+1) - \delta(n) - \delta(n+1) \quad (n \geq 3) \end{aligned} \quad (12)$$

ここではとくに  $\varepsilon(n) = \delta(n) = 0$  ( $n = 1, 2$ ) を考慮している. なぜならば  $n = 1, 2$  の段階で虫食いに遭うと, フィボナッチ樹型は生成しないからである.

## 5. 虫食いシステムの応用

簡単のために, ノード●のみを食う虫と○のみを食う虫の2種類に分けることにする.

### 5. 1 フィボナッチ数から分割数を作る

分割数  $p(n)$  は  $p(0) = 1$  から始まる.  $p(0)$  を  $F_1$  に対応づけるために, ここでは

$$F^*_n = p(n-1) \quad (13)$$

と置く. このように置くと分割数は  $n = 1 \sim 5$  までフィボナッチ数  $F_n$  に等しい (次ページ表2参照). したがって虫食いは  $n \geq 6$  から始まったことがわかる.

まず●のみを虫食いの対象とする. このとき

$$\varepsilon(n) = -H_{n-1} = -(F^*_n - F^*_{n-1} - F^*_{n-2}) \quad (14)$$

であるから,  $p(n)$  値を知れば容易に●の虫食い数が求められる.

次に○のみが虫食いの対象となるときは次の漸化式が用いられる.

$$\delta(n) = \varepsilon(n) - \delta(n-1) \quad (15)$$

このようにして得られた2種類の虫食いの個数 ( $1 \leq n \leq 15$ ) を表2にまとめる. なおさらに高次の結果  $\varepsilon(n)$  ( $1 \leq n \leq 30$ ) は図2を参照されたい.

表2 フィボナッチ数  $F_n$ , 分割数  $F_n^* = p(n-1)$ , ●のみを選択的に虫食いの対象とするときの虫食い個数  $\varepsilon(n)$  と○のみを対象とするときの虫食い個数  $\delta(n)$ .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_n$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
$F_n^*$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135
$\varepsilon(n)$	0	0	0	0	0	1	1	3	4	7	10	16	21	32	43
$\delta(n)$	0	0	0	0	0	1	0	3	1	3	7	9	12	20	23

## 5.2 フィボナッチ数から素数列を作る

素数  $p(n)$  も分割数と同様に  $p(0) = 1$  を加え, かつ式(13)を採用すると,  $n = 1 \sim 5$  まではフィボナッチ数に等しい (表3). 以下の解析法は分割数と全く同様である.

表3 フィボナッチ数  $F_n$ , 素数  $F_n^* = p(n-1)$ , ●のみを選択的に虫食いの対象とするときの虫食い個数  $\varepsilon(n)$  と○のみを対象とするときの虫食い個数  $\delta(n)$ .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_n$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
$F_n^*$	1	1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
$\varepsilon(n)$	0	0	0	0	0	1	1	5	7	11	13	13	21	23	27
$\delta(n)$	0	0	0	0	0	1	0	5	2	9	4	9	12	11	16

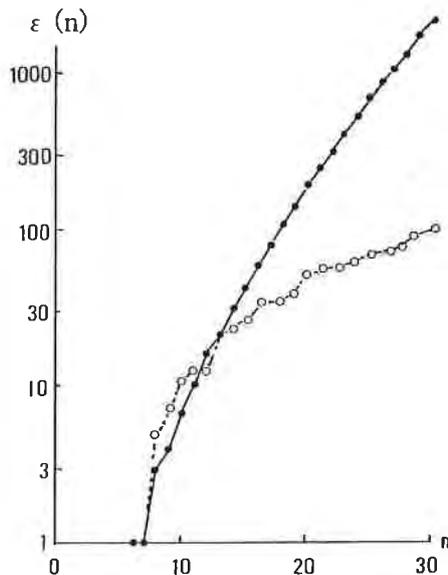


図2 ●のみを選択的に虫食いの対象とするとき虫食いノードの個数  $\varepsilon(n)$ . 図中の黒丸は分割数, 白丸は素数の場合の虫食い個数  $\varepsilon(n)$ .

## 6. q-フィボナッチ数へ拡張

q-フィボナッチ数には次の漸化式が適用される.

$$\begin{aligned} F_0(q) &= 0, & F_1(q) &= 1 \\ F_n(q) &= F_{n-1}(q) + q^{n-2} F_{n-2}(q) \end{aligned} \quad (16)$$

通常  $F_n(q)$  はガウスの q-二項係数によって表されるが, ここでは上記の漸化関係のみを用いる (表 4).

式(16)より次の遷移マトリックスが得られる.

$$\begin{pmatrix} B_n(q) \\ W_n(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q^{n-2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{n-1}(q) \\ W_{n-1}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{n-2} F_{n-2}(q) \\ F_{n-1}(q) \end{pmatrix} \quad (17)$$

さらに q-フィボナッチ樹型モデルを図 3 のようにまとめることができる. このモデルでは時間ステップ n とノードの q-値 (べき乗数: k) との間に図 4 の関係が見られる. 虫食いフィボナッチ数は  $q^k$  ごとにこの図式に従って個々に処理することになる.

表 4 q-フィボナッチ数  $F_n(q)$

n	1	2	3	4	5	6	7
$B_n(q)$	1	0	q	$q^2$	$q^3(1+q)$	$q^4(1+q+q^2)$	$q^5(1+q+q^2+q^3+q^4)$
$W_n(q)$	0	1	1	$1+q$	$1+q+q^2$	$1+q+q^2+q^3+q^4$	$1+q+q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6$
$F_n(q)$	1	1	$1+q$	$1+q+q^2$	$1+q+q^2+q^3+q^4$	$1+q+q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6$	$1+q+q^2+q^3+2q^4+2q^5+2q^6+q^7+q^8+q^9$

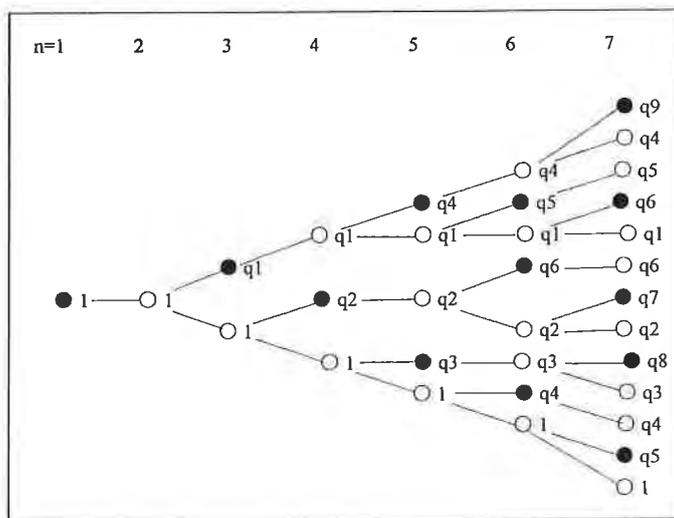


図 3 q-フィボナッチ樹型モデル. ●と○の添字はそれぞれ表 4 の  $B_n(q)$  と  $W_n(q)$  の q 値に対応する.

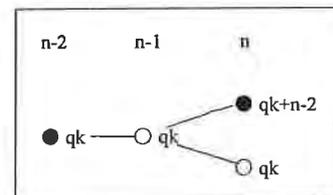


図 4 時間ステップ n とノードの q-値 (べき乗数: k) との関係

## 7. "q-虫" へ進化

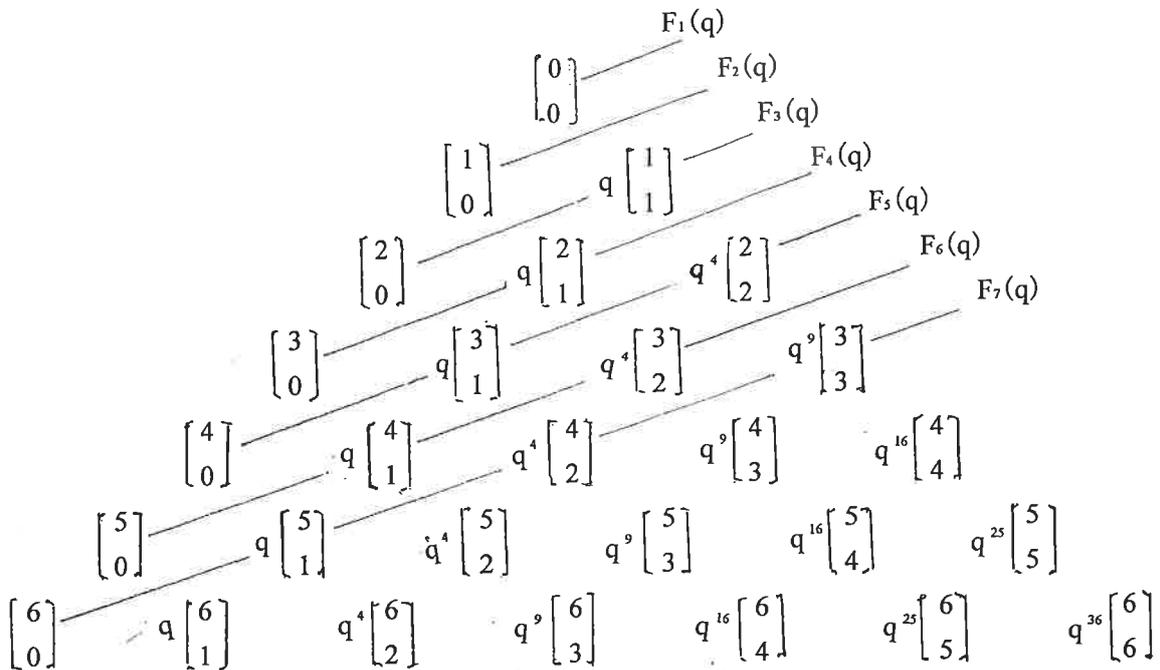


図5 パスカルの三角形による  $q$ -フィボナッチ数  $F_n(q)$  の構成.

記号  $[ ]$  は  $q$ -二項係数. 図では  $[ ]_q$  に添え字  $q$  を省略している.

$q$ -フィボナッチ数  $F_n(q)$  の構成をパスカルの三角形によって表すと図5のようになる. ここに記号  $[ ]$  は  $q$ -二項係数であり, これを用いれば  $F_n(q)$  は次式により表せる.

$$F_{n+1}(q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{k^2} \quad (18)$$

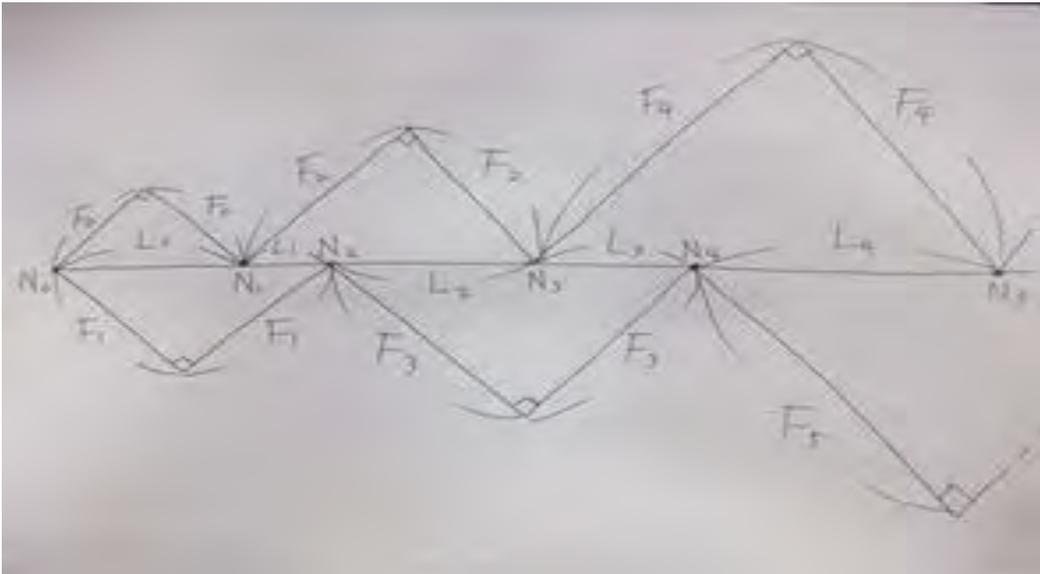
ここに

$$[n]_q = (1 - q^n) / (1 - q), \quad [n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = [n]_q! / \{ [n-k]_q! [k]_q! \} \quad (20)$$

$q$ -フィボナッチ樹型に影響を与えるためには, これ迄のような「通常の虫」では対抗できそうもない. 図5の構成に影響を与える虫を"q-虫"と呼ぶものとするれば, q-虫は例えば「 $q$ 以上の高次の葉を食べる虫」のように高度の進化を遂げなければならないであろう.

# フィボナッチ数に関する いくつかの数列の可除性 について



$$P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2, P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \text{ for } n \geq 3$$

長野県飯山高等学校  
 田中億 西澤康汰  
 藤原望 丸山慶介

# よく知られているフィボナッチ数列の可除性

任意の整数  $l$  に対して  $l \mid F_m$  となる 1 以上の整数  $m$  が存在する.

ここで  $F_m$  は  $m$  番目のフィボナッチ数.

# 和型フィボナッチ数列と積型フィボナッチ数列

和型そして積型  
のフィボナッチ数列の  
可除性は活発に  
研究されている

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$M_{n+2} = M_{n+1}M_n$$

# 変形型フィボナッチ数列 $\{F_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$

$\lambda$  を非負整数とし，初期条件  $F_0^{(\lambda)} = 0$ ，  $F_1^{(\lambda)} = 1$ ，

$\lambda$  の値を動かすことで  
和型にも積型にもなる数列を  
考える

漸化式  $F_{n+2}^{(\lambda)} = F_{n+1}^{(\lambda)} + F_n^{(\lambda)} + \lambda F_{n+1}^{(\lambda)} F_n^{(\lambda)}$  によって定まる

数列  $\{F_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$  を考える。もし，  $\lambda = 0$  ならフィボナッチ数列に他ならない。

任意の非負整数  $n$  に対して  $M_n = 1 + \lambda F_n^{(\lambda)}$  とおくと  $M_{n+2} = M_{n+1}M_n$

が成り立つ. よって数学的帰納法より,  $M_n = (1 + \lambda F_1^\lambda)^{F_n} = (1 + \lambda)^{F_n}$ .

ここで  $F_n$  は  $n$  番目のフィボナッチ数.

このことから、一般項は, 
$$F_n^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{(1 + \lambda)^{F_n} - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \text{ のとき} \\ F_n & \lambda = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる.

任意の非負整数  $l$  に対して  $l \mid F_m^{(\lambda)}$  となる 1 以上の整数  $m$  は存在するか？



必ずしも存在しない！

偽 (反例:  $\lambda = 3, l = 4$ )

$m$	0	1	2	3	4
$F_m^{(3)} \pmod{4}$	0	1	1	1	1

# 変形型フィボナッチ数列 $\{F_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ の可除性

定理 1  $l$  を 2 以上の整数とする. このとき  $\{F_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$  について,  $l \mid F_m^{(\lambda)}$  となる 1 以上の自然数  $m$  が存在するための必要十分条件は  $1 + \lambda$  と  $l$  が互いに素であることである.

# 定理1の証明のアイデア

$1 + \lambda$  と  $l$  が互いに素であるとする. 任意の  $0$  以上の整数  $n$  について

$$F_{n+2}^{(\lambda)} = F_{n+1}^{(\lambda)} + F_n^{(\lambda)} + \lambda F_{n+1}^{(\lambda)} F_n^{(\lambda)} \text{ より}$$

$$(1 + \lambda F_{n+1}^{(\lambda)}) F_n^{(\lambda)} \equiv F_{n+2}^{(\lambda)} - F_{n+1}^{(\lambda)} \pmod{l} \quad \dots \textcircled{1}$$

$(1 + \lambda F_{n+1}^{(\lambda)}) = (1 + \lambda)^{F_{n+1}}$  より  $1 + \lambda F_{n+1}^{(\lambda)}$  と  $l$  は互いに素なので

$P(1 + \lambda F_{n+1}^{(\lambda)}) \equiv 1 \pmod{l}$  となる整数  $P$  が存在する.

これから、0以上の整数 $n$ に対し、 $F_n^{(\lambda)}$ を $l$ で割った余りを $r_n$ とおくと

$$\textcircled{1} \text{ の両辺に } P \text{ を掛け } r_n \equiv P(r_{n+2} - r_{n+1}) \pmod{l} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

$P$ を $l$ で割った余りは $r_{n+1}$ によってただ一つ定まるので、 $\textcircled{2}$ より

$r_{n+1}$ と $r_{n+2}$ から $r_n$ が唯一つ定まる。鳩ノ巣原理から

$(r_s, r_{s+1}) = (r_t, r_{t+1})$ となる0以上の整数 $s, t (s < t)$ が存在する。

$r_t \neq 0$ なら $(r_{s-1}, r_s) = (r_{t-1}, r_t)$ なので $r_0 = r_N$ となる1以上の整数 $N$ が存在する。

$r_t = 0$  ならなにも言うことはない。

逆に、 $l \mid F_m^{(\lambda)}$  となる 1 以上の整数  $m$  が存在するとする。

$\lambda = 0$  なら  $1 + \lambda$  と  $l$  は互いに素である。

$\lambda \neq 0$  のとき一般項から  $\lambda F_m^{(\lambda)} = (1 + \lambda)^{F_m} - 1$  より

$1 + \lambda$  と  $l$  は互いに素である。

# 変形型フィボナッチ数列と関係する数列

$\lambda, p, q$  を非負整数とする. このとき, 2つの数列  $\{P_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ ,  $\{Q_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$  を

$$P_0^{(\lambda)} = 0, \quad P_1^{(\lambda)} = p, \quad Q_0^{(\lambda)} = 0, \quad Q_1^{(\lambda)} = q,$$

$$\text{連立漸化式} \begin{cases} P_{n+2}^{(\lambda)} = P_{n+1}^{(\lambda)} + P_n^{(\lambda)} + 2\lambda P_{n+1}^{(\lambda)} Q_n^{(\lambda)} + 2\lambda P_n^{(\lambda)} Q_{n+1}^{(\lambda)} \\ Q_{n+2}^{(\lambda)} = Q_{n+1}^{(\lambda)} + Q_n^{(\lambda)} + 2\lambda Q_{n+1}^{(\lambda)} Q_n^{(\lambda)} + 2P_{n+1}^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)} \end{cases}$$

によって定める.

2つの数列  $\{P_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}, \{Q_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$  について,  $F_n^{(\sqrt{\lambda})} = 2(P_n^{(\lambda)} + \sqrt{\lambda}Q_n^{(\lambda)})$  とおくと

$$F_{n+2}^{(\sqrt{\lambda})} = F_{n+1}^{(\sqrt{\lambda})} + F_n^{(\sqrt{\lambda})} + \sqrt{\lambda}F_{n+1}^{(\sqrt{\lambda})}F_n^{(\sqrt{\lambda})} \text{ が成り立つ.}$$

$$\text{さらに, } P_n^{(\lambda)} = \frac{2F_n^{(\sqrt{\lambda})} + \sqrt{\lambda}(F_n^{(\sqrt{\lambda})})^2}{4(1 + \sqrt{\lambda}F_n^{(\sqrt{\lambda})})}, \quad Q_n^{(\lambda)} = \frac{(F_n^{(\sqrt{\lambda})})^2}{4(1 + \sqrt{\lambda}F_n^{(\sqrt{\lambda})})}$$

が成り立つ.

このことから, 2つの数列  $\{P_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}, \{Q_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$  の一般項を求めることができる.

# 2つの数列 $\{P_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}, \{Q_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ の可除性

定理 2  $l$  を 2 以上の整数とする. このとき, 上で定義した 2 つの数列  $\{P_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}, \{Q_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$  につ

いて  $l | P_m^{(\lambda)}$  かつ  $l | Q_m^{(\lambda)}$  となる 1 以上の整数  $m$  が存在するための必要十分条件は,

$1 - 4\lambda(p^2 - \lambda q^2 - q)$  と  $l$  が互いに素であることである.

# 定理2の証明のアイデア

補題 二つの数列  $\{P_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ ,  $\{Q_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$

について  $D_n = 1 - 4\lambda (P_n^{(\lambda)^2} - \lambda Q_n^{(\lambda)^2} - Q_n^{(\lambda)})$

とおくと、1以上の整数  $n$  に対して  $D_{n+2} = D_{n+1}D_n$  が成り立つ。

このことから、 $D_n = \{1 - 4\lambda(p^2 - \lambda q^2 - q)\}^{F_n}$  となる。

ここで  $F_n$  は  $n$  番目のフィボナッチ数。

この補題を用いることで、定理1と同様にして証明することができる。

# 参考文献

Yuji Tsuno

Degeneration of the Kummer sequence in characteristic  $p > 0$

Journal de théorie des nombres de Bordeaux, 22 no. 1 (2010), p. 219–257

中村滋『フィボナッチ数の小宇宙（マイクロコスモス） フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割』日本評論社、2002年9月30日

山根映介、岩田寛大、寺本誠司、中村彰吾、倉田久靖. 自然数を法としたフィボナッチ型数列の周期. 米子工業高等専門学校 研究報告 第50号、平成27年

ご清聴有難うございました。

# 一般 Lucas sequence の素数における 可除性と Laxton 群について

酒井 悠帆

## 1 はじめに

この研究は、青木美穂先生 (島根大学) との共同研究である。まず、私がこの研究を始めるきっかけとなった疑問について紹介する。固定された2つの整数  $t, s$  に対して、一般 Lucas sequence  $\{\mathcal{G}_n\}$  ( $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{G}_n = t\mathcal{G}_{n-1} + \mathcal{G}_{n-2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )) を考える。これ以降は、簡単のために一般 Lucas sequence  $\{\mathcal{G}_n\}$  を次で表す。

$$\mathcal{G}_0 = a, \mathcal{G}_1 = b \iff \{\mathcal{G}(a, b)\}$$

**定義 1** Lucas sequence  $\{\mathcal{F}_n\}$  と companion Lucas sequence  $\{\mathcal{L}_n\}$  を次のように定める。

$$\{\mathcal{F}_n\} = \{\mathcal{G}(0, 1)\}, \{\mathcal{L}_n\} = \{\mathcal{G}(2, t)\}$$

ここで私は、素数  $p$  を固定したとき、どのような一般 Lucas sequence が  $p$  で割り切れる項を持つか、という疑問を持ち、研究を行った。この疑問に対する答えと先行研究との関係について紹介する。

## 2 結果

**定義 2** 3項間漸化式の特性方程式を  $f(X) = X^2 - tX + s$  と定める。さらに、 $f(X)$  の根を  $\alpha, \beta$  とし、判別式を  $D = t^2 - 4s$  とおく。

これ以降は、 $\alpha, \beta$  が2次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$  の  $\pm 1$  以外の単数のときを考える。このように仮定することで、 $s = \alpha\beta = \pm 1$  となり、任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、 $\mathcal{G}_n$  が整数である数列を考えることができる。

**定義 3** 一般 Lucas sequence  $\{\mathcal{G}_n\}, \{\mathcal{G}'_n\}$  に対し、関係  $\sim_p, \sim_p^*$  を

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_n\} \sim_p \{\mathcal{G}'_n\} &\iff \mathcal{G}_1\mathcal{G}'_0 \equiv \mathcal{G}'_1\mathcal{G}_0 \pmod{p} \\ \{\mathcal{G}_n\} \sim_p^* \{\mathcal{G}'_n\} &\iff \exists m, n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \mathcal{G}_{n+1}\mathcal{G}'_m \equiv \mathcal{G}'_{m+1}\mathcal{G}_n \pmod{p} \end{aligned}$$

と定める。

このとき、関係  $\sim_p, \sim_p^*$  は集合  $\{\{\mathcal{G}_n\} \mid p \nmid \mathcal{G}_1 \text{ or } p \nmid \mathcal{G}_2\}$  上で同値関係となる。この関係における商集合をそれぞれ

$$X_p = \{\{\mathcal{G}_n\} \mid p \nmid \mathcal{G}_1 \text{ or } p \nmid \mathcal{G}_2\} / \sim_p$$

$$X_p^* = \{\{\mathcal{G}_n\} \mid p \nmid \mathcal{G}_1 \text{ or } p \nmid \mathcal{G}_2\} / \sim_p^*$$

さらに, 部分集合  $Y_p, Y_p^*$  を

$$Y_p = \{\overline{\{\mathcal{G}_n\}} \in X_p \mid p \nmid \mathcal{G}_n (\forall n \in \mathbb{Z})\}$$

$$Y_p^* = \{\overline{\{\mathcal{G}_n\}} \in X_p^* \mid p \nmid \mathcal{G}_n (\forall n \in \mathbb{Z})\}$$

とおく.

**Remark 1** 関係  $\sim_p, \sim_p^*$  の定め方から

$$X_p = \{\overline{\{\mathcal{G}(k, 1)\}} \mid 0 \leq k \leq p-1\} \cup \{\overline{\{\mathcal{G}(1, 0)\}}\}$$

$$X_p^* = Y_p^* \cup \{\overline{\{\mathcal{F}_n\}}\}$$

である. また,  $X_p^*$  の表し方からわかるように, 素数  $p$  で割り切れる項が存在する数列は, 全て *Lucas sequence*  $\{\mathcal{F}_n\}$  と関係  $\sim_p^*$  を持つことがわかる.

**定義 4**  $d(p)$  を  $\mathcal{F}_n \equiv 0 \pmod{p}$  を満たす最小の自然数  $n$  とする.

**定義 5**  $i \not\equiv -1 \pmod{d(p)}$  に対して,  $0 \leq f_i \leq p-1$  を

$$f_i \equiv \mathcal{F}_i \mathcal{F}_{i+1}^{-1} \pmod{p}$$

で定める.

次の2つの定理が, 疑問の答えとなる結果である.

**定理 1**

- (1)  $Y_p = \{\overline{\{\mathcal{G}(a, 1)\}} \mid 1 \leq a \leq p-1, a \neq f_0, \dots, f_{d(p)-2}\}$ .
- (2)  $|Y_p| = p+1 - d(p)$ .

**系 1** 一般 *Lucas sequence*  $\{\mathcal{G}_n\}$  に対して,

$$\{\mathcal{G}_n\} \in \overline{\{\mathcal{G}(f_i, 1)\}} \implies \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \mid \mathcal{G}_n$$

が成り立つ.

**定理 2**

- (1)  $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$  のとき,  $|Y_p^*| = 2 + \frac{|Y_p| - 2}{d(p)} = \frac{p-1}{d(p)} + 1$ .
- (2)  $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$  のとき,  $|Y_p^*| = 0 + \frac{|Y_p| + 0}{d(p)} = \frac{p+1}{d(p)} - 1$ .
- (3)  $\left(\frac{D}{p}\right) = 0$  のとき,  $|Y_p^*| = 1 + \frac{|Y_p| - 1}{d(p)} = 1$ .

**Remark 2**  $p$  を奇素数とする.  $f(X) = X^2 - tX + s$  に対し,

- (1)  $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$  のとき,  $f(X) = 0$  は  $\mathbb{F}_p$  において異なる2つの解を持つ.
- (2)  $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$  のとき,  $f(X) = 0$  は  $\mathbb{F}_p$  において解を持たない.
- (3)  $\left(\frac{D}{p}\right) = 0$  のとき,  $f(X) = 0$  は  $\mathbb{F}_p$  において重解を持つ.

が成り立つ. このとき, 特性方程式の解の個数と定理2に現れる数  $2, 0, 1$  が対応している.

**Remark 3**  $s(p) = \frac{p - \left(\frac{D}{p}\right)}{d(p)}$  とおくと,

$$|Y_p^*| = s(p) + \left(\frac{D}{p}\right)$$

と表すことができる.

次は,  $t = 1, s = -1$  と  $t = 6, s = 1$  のときの  $Y_p, Y_p^*$  の表である.  $t = 1, s = -1$  のときは, 通常の一般フィボナッチ数列で,  $t = 6, s = 1$  のときは, Balancing numbers という数列である.

$p$	$d(p)$	$Y_p$	$Y_p^*$
3	4	$\emptyset$	$\emptyset$
5	5	$\overline{\{\mathcal{G}(2, 1)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(2, 1)\}}$
7	8	$\emptyset$	$\emptyset$
11	10	$\overline{\{\mathcal{G}(3, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(7, 1)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(3, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(7, 1)\}}$
13	7	$\overline{\{\mathcal{G}(2, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(3, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(4, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(6, 1)\}},$ $\overline{\{\mathcal{G}(8, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(9, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(10, 1)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(2, 1)\}}$
17	9	$\overline{\{\mathcal{G}(2, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(3, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(5, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(6, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(8, 1)\}},$ $\overline{\{\mathcal{G}(10, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(11, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(13, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(14, 1)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(2, 1)\}}$
19	18	$\overline{\{\mathcal{G}(4, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(14, 1)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(4, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(14, 1)\}}$

表 1:  $t = 1, s = -1$

$p$	$d(p)$	$Y_p$	$Y_p^*$
3	2	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 2)\}},$	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 1)\}}$
5	3	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 2)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 3)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 4)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 2)\}}$
7	3	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 2)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 3)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 4)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 5)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 2)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 4)\}}$
11	6	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 1)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 5)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 7)\}},$ $\overline{\{\mathcal{G}(1, 8)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 9)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 10)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 1)\}}$
13	7	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 2)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 3)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 4)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 7)\}},$ $\overline{\{\mathcal{G}(1, 9)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 10)\}}, \overline{\{\mathcal{G}(1, 12)\}}$	$\overline{\{\mathcal{G}(1, 2)\}}$

表 2:  $t = 6, s = 1$

### 3 先行研究との関係

先行研究として, R. R. Laxton の論文

On groups of linear recurrences. I, Duke Mathematical Journal 36(4), 721-736 (1969)

を挙げる. この論文において Laxton は先程定めた同値関係と類似した関係を定めている. それらの結果との関係について述べる.

**定義 6** 2つの数列  $\{\mathcal{G}_n\}, \{\mathcal{G}'_n\}$  に対して, 関係  $\sim, \sim^*$  を次で定める.

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}_n\} \sim \{\mathcal{G}'_n\} &\iff \exists \lambda, \mu (\neq 0) \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \lambda \mathcal{G}_n = \mu \mathcal{G}'_n \\ \{\mathcal{G}_n\} \sim^* \{\mathcal{G}'_n\} &\iff \exists \lambda, \mu (\neq 0) \in \mathbb{Z}, \exists v \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \lambda \mathcal{G}_{n+v} = \mu \mathcal{G}'_n\end{aligned}$$

この関係は,  $\sim_p, \sim_p^*$  においては合同で与えていた条件を, mod  $p$  せずに等号で与えた関係である.

**補題 1** 関係  $\sim, \sim^*$  は集合  $\{\{\mathcal{G}_n\} \mid p \nmid \mathcal{G}_1 \text{ or } p \nmid \mathcal{G}_2\}$  上で同値関係となる.

**定義 7** 関係  $\sim, \sim^*$  における商集合をそれぞれ,

$$G(f) := \{\{\mathcal{G}_n\} \mid \mathcal{G}_0 \neq 0 \text{ or } \mathcal{G}_1 \neq 0\} / \sim, \quad G^*(f) := \{\{\mathcal{G}_n\} \mid \mathcal{G}_0 \neq 0 \text{ or } \mathcal{G}_1 \neq 0\} / \sim^*$$

と定める.

ここで, Laxton は数列に対して積を導入した.

**定義 8** 2つの数列  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_n\}, \mathcal{G}' = \{\mathcal{G}'_n\}$  に対して, 一般項をそれぞれ

$$\mathcal{G}_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \mathcal{G}'_n = \frac{C\alpha^n - D\beta^n}{\alpha - \beta}$$

と与えたとき, 積  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}' = \{\mathcal{G}''_n\}$  を次で定める.

$$\mathcal{G}''_n = \frac{AC\alpha^n - BD\beta^n}{\alpha - \beta}$$

この積を類の積  $\overline{\mathcal{G}} \times \overline{\mathcal{G}'} = \overline{\mathcal{G} \times \mathcal{G}'}$  に拡張すると, 次の定理を得る.

**定理 3** (R. R. Laxton, 1969)

商集合  $G(f), G^*(f)$  は上記の積でアーベル群となる.

**定義 9**  $p$  を奇素数とする. さらに  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_n\}$  としたとき,  $\Lambda(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1^2 - t\mathcal{G}_1\mathcal{G}_0 + s\mathcal{G}_0^2$  とする. このとき,

$$\begin{aligned}I(f, p) &:= \{\mathcal{G} \in G(f) \mid \exists \mathcal{G} \in \mathcal{G} \text{ s.t. } \Lambda(\mathcal{G}) \not\equiv 0 \pmod{p}\} \\ I^*(f, p) &:= \{\mathcal{G} \in G^*(f) \mid \exists \mathcal{G} \in \mathcal{G} \text{ s.t. } \Lambda(\mathcal{G}) \not\equiv 0 \pmod{p}\} \\ G(f, p) &:= \{\mathcal{G} \in G(f) \mid \forall \{\mathcal{G}_n\} \in \mathcal{G}, p \mid \mathcal{G}_0\} \\ G^*(f, p) &:= \{\mathcal{G} \in G^*(f) \mid \forall \{\mathcal{G}_n\} \in \mathcal{G}, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \mid \mathcal{G}_k\}\end{aligned}$$

と定める.

このとき, 4つの集合は部分群であり, 次の包含関係を満たす.

**補題 2**

$$G(f) \supset I(f, p) \supset G(f, p), \quad G^*(f) \supset I^*(f, p) \supset G^*(f, p)$$

さらに, 次の群の同型が成り立つことを示している.

定理 4 (R. R. Laxton, 1969)

群の短完全列

$$0 \longrightarrow I^*(f, p)/G^*(f, p) \longrightarrow G^*(f)/G^*(f, p) \longrightarrow G^*(f)/I^*(f, p) \longrightarrow 0$$

に対して次の同型が成り立つ.

$$I^*(f, p)/G^*(f, p) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/s(p)\mathbb{Z} & ((\frac{D}{p}) = \pm 1) \\ 0 & ((\frac{D}{p}) = 0) \end{cases}$$

$$G^*(f)/I^*(f, p) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^{\frac{(\frac{D}{p})+1}{2}} & ((\frac{D}{p}) = \pm 1) \\ 0 & ((\frac{D}{p}) = 0) \end{cases}$$

但し,  $s(p) = \frac{p - (\frac{D}{p})}{d(p)}$  である.

ここで, 我々の定めた集合  $X_p, X_p^*$  との関係について述べる.  $X_p, X_p^*$  は前述の積で群にはならない. 例として,  $1 + s - t \equiv 0 \pmod{p}$  で,  $\mathcal{G}_0 \equiv \mathcal{G}_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  かつ  $\mathcal{G}'_0 \equiv \mathcal{G}'_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  のとき, 積を  $\{\mathcal{H}_n\}$  とすると,  $\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_1 \equiv 0 \pmod{p}$  となる. しかし, 部分集合を次のように定めると次のような関係があることがわかった.

定理 5  $X_p$  と  $X_p^*$  の部分集合をそれぞれ次で定める.

$$Z_p(f) := \{\bar{\mathcal{G}} \in X_p(f) \mid \Lambda(\mathcal{G}) \not\equiv 0 \pmod{p}\}$$

$$Z_p^*(f) := \{\bar{\mathcal{G}} \in X_p^*(f) \mid \Lambda(\mathcal{G}) \not\equiv 0 \pmod{p}\}$$

このとき, それぞれ well-defined であり, 前述の積でアーベル群である.

さらに, 次の同型を得た.

定理 6

$$I(f, p)/G(f, p) \simeq Z_p(f), \quad I^*(f, p)/G^*(f, p) \simeq Z_p^*(f)$$

Remark 4 上記の同型は

$$\psi_p : I(f, p) \longrightarrow Z(f, p)$$

$$\psi_p^* : I^*(f, p) \longrightarrow Z^*(f, p)$$

が全射準同型であることから導ける.

ここで, 定理 4 と定理 6 を用いることで, 同型を用いることで, 定理 2 の証明を与えることができる.

定理 2 の証明

$(\frac{D}{p}) = \pm 1$  のときのみ与える. 定理 4 と定理 6 の同型を用いると

$$|Z_p^*(f)| = |I^*(f, p)/G^*(f, p)| = |\mathbb{Z}/s(p)\mathbb{Z}| = s(p)$$

を得る. ここで,  $Z_p^*(f) = \{\overline{\mathcal{G}} \in X_p^*(f) \mid \Lambda(\mathcal{G}) \not\equiv 0 \pmod{p}\}$  であることを用いると,  $\Lambda(\mathcal{G}) \equiv 0 \pmod{p}$  を満たすのは  $f(X)$  の根の個数と一致するので,  $|Z_p^*(f)| = |X_p^*| - \left\{\left(\frac{D}{p}\right) + 1\right\}$  が成り立つ.  $X_p^* = Y_p^* \cup \{\overline{\{\mathcal{F}_n\}}\}$  であったので,

$$|Z_p^*(f)| = |Y_p^*| + 1 - \left\{\left(\frac{D}{p}\right) + 1\right\}$$

となる. よって,  $|Y_p^*| = s(p) + \left(\frac{D}{p}\right)$  となり, 定理 2 を満たす.  $\square$

最後に発表では時間の都合上紹介できなかった, 関係について述べる.  $F = \mathbb{Q}(\alpha)$  とおき,  $F$  の整数環を  $\mathcal{O}_F$  とする. さらに, 素数  $p$  の上の素イデアルを  $\mathfrak{p}$  に対し,  $K_1 := \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$ ,  $K_2 := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  とおく. このとき, 以下の可換図式を得る.

(I)  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$  のとき.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\iota) & \longrightarrow & I(f,p)/G(f,p) & \xrightarrow{\iota} & I^*(f,p)/G^*(f,p) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \psi_p \downarrow & & \psi_p^* \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{\{\{\mathcal{G}(f_i, 1)\} \mid i = 0, \dots, r(p) - 2\} \cup \{\overline{\{\mathcal{G}(1, 0)\}}\}} & \longrightarrow & Z_p(f) & \longrightarrow & Z_p^*(f) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \varphi_p^+ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \langle \beta/\alpha \rangle & \longrightarrow & K_1^* & \longrightarrow & K_1^*/\langle \beta/\alpha \rangle \longrightarrow 0 \end{array}$$

ここで,  $\iota$  は自然な全射であり,  $\varphi_p^+$  は  $\varphi_p^+(\overline{\mathcal{G}}) = (\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0\alpha)/(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0\beta)$  で与えられる.

(II)  $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$  のとき.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\iota) & \longrightarrow & I(f,p)/G(f,p) & \xrightarrow{\iota} & I^*(f,p)/G^*(f,p) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \psi_p \downarrow & & \psi_p^* \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{\{\{\mathcal{G}(f_i, 1)\} \mid i = 0, \dots, r(p) - 2\} \cup \{\overline{\{\mathcal{G}(1, 0)\}}\}} & \longrightarrow & Z_p(f) & \longrightarrow & Z_p^*(f) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \varphi_p^- \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K_2^*\langle \alpha \rangle/K_2^* & \longrightarrow & K_1^*/K_2^* & \longrightarrow & K_1^*/K_2^*\langle \alpha \rangle \longrightarrow 0 \end{array}$$

ここで  $\iota$  は自然な全射であり,  $\varphi_p^-$  は  $\varphi_p^-(\overline{\mathcal{G}}) = \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0\beta$  で与えられる.

(III)  $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$  のとき.

$$I^*(f,p)/G^*(f,p) \xrightarrow{\psi_p^*} Z_p^*(f) \simeq 0$$

であり,

$$\begin{aligned} Z_p(f) &= \overline{\{\{\mathcal{G}(f_i, 1)\} \mid i = 0, \dots, r(p) - 2\} \cup \{\overline{\{\mathcal{G}(1, 0)\}}\}} \\ &= \overline{\{\{\mathcal{G}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_{i+1})\} \mid i = 0, \dots, r(p) - 1\}} \xrightarrow[\varphi_p^0]{\sim} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{aligned}$$

ここで,  $\varphi_p^0$  は  $\varphi_p^0(\overline{\{\mathcal{G}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_{i+1})\}}) = i$  で与えられる.

## 4 謝辞

第14回日本フィボナッチ協会研究集会の開催に尽力していただきました, 大関先生を初めとする関係者の皆様に感謝いたします.

## 参考文献

- [1] M. Aoki and Y. Sakai, On divisibility of generalized Fibonacci numbers, *Integers*, vol.15, Paper No. A31 (2015).
- [2] M. Aoki and Y. Sakai, On Equivalence Classes of Generalized Fibonacci sequences, *Journal of Integer Sequences*, volume19, Article 16.2.6 (2016).
- [3] R. D. Carmichael, On the numerical factors of the arithmetic forms  $\alpha^n \pm \beta^n$ . *Annals of Math.*, 15, 30-70 (1913).
- [4] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, Pure and Applied Mathematics, New York (2001).
- [5] E. Lucas, Théorie des fonctions numériques simplement périodiques, *Amer. J. Math.*, 1, 184-240 and 289-321 (1878).
- [6] R. R. Laxton, On groups of linear recurrences. I, *Duke Mathematical Journal* 36(4), 721-736 (1969).
- [7] M. Kōzaki and T. Nakahara, On Arithmetic Properties of Generalized Fibonacci Sequences, *Reports of the Faculty of Science and Engineering, Saga University* Vol.28 no.1 p.1 -17 (1999).
- [8] 中村 滋, *フィボナッチ数の小宇宙*, 日本評論社 (2002).
- [9] A. Schinzel, Abelian binomials, power residues and exponential congruences. *Acta Arith.* 32, no. 3, 245–274 (1977).
- [10] A. Schinzel, On the congruence  $u_n \equiv c \pmod{p}$ , where  $u_n$  is a recurring sequence of the second order, *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis Sectio Mathematicae* 30 147-165 (2003).
- [11] 山本 芳彦, *数論入門*, 岩波書店 (2003).

# 「七金三パズル」のその後の進展

Golden Septet Triangles

黄金 七 三角形

細矢治夫

2016年8月26日

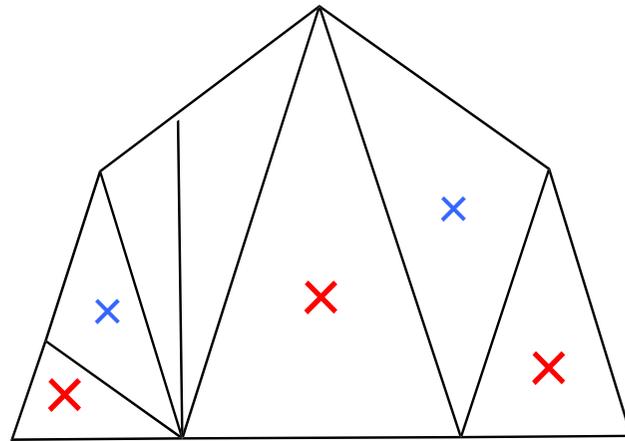
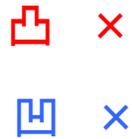
日本フィボナッチ協会研究集会

東京理科大学 神楽坂

# 七金三パズルとは

## シルエットパズルの1種

黄金三角形



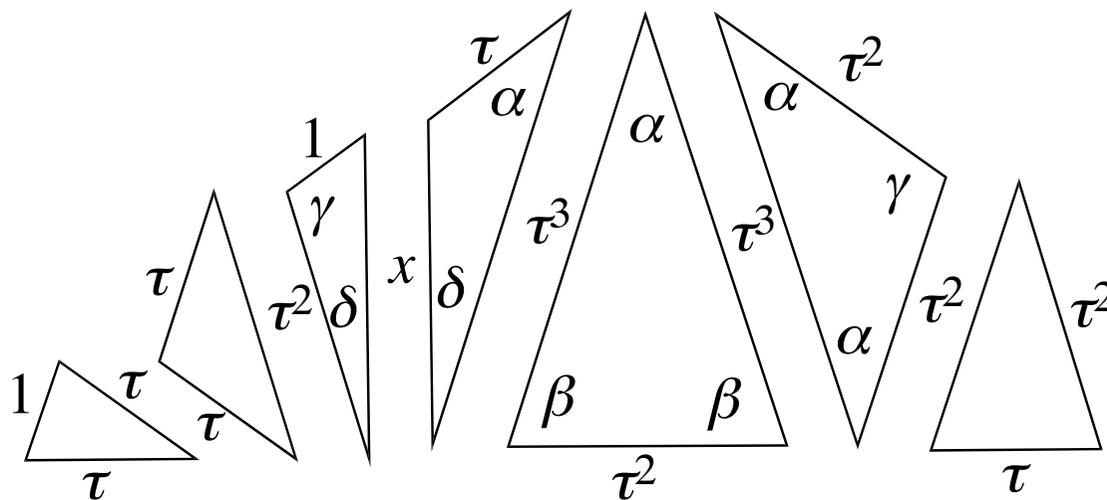
Designed by H. Hosoya  
(2015)

発売: イメージミッション

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.618\dots$$

$$\alpha = 36^\circ \quad \beta = 72^\circ$$

$$\gamma = 108^\circ \quad \delta = 18^\circ$$



ワンダーシリーズ8  
平行多面体の元素パズル

ペンタドロン®



ペンタドロン®は2007年に秋山仁博士とその研究仲間が発見した平行多面体の元素です。商品は12個のペンタドロン®から成る立方体の組立パズルで、遊びを通して形の不思議と面白さを体験できます。



PEN0001  
ペンタドロン  
対象:6歳以上 価格:3,500円 人数:25個  
JAN:4562187431658



※全ての平行多面体を作るためには、32セット必要です。

ワンダーシリーズ9  
黄金三角形の不思議なパズル  
七金三パズル



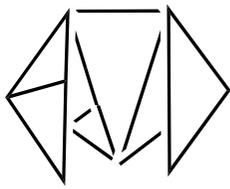
【考案者】  
細矢 治夫先生  
お茶の水女子大学名誉教授

パズル懇話会の前会長 細矢先生が考案した黄金三角形を元に考え出された新しい並び替えパズルです。7ピース使うだけで、驚くほどの形や文字が作れます。是非チャレンジして下さい。

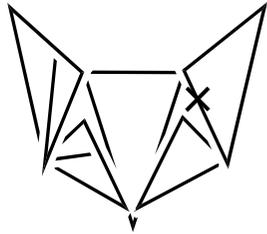


TEHH001  
七金三パズル  
対象:6歳以上 価格:1,500円 人数:6個  
JAN:4562187432150

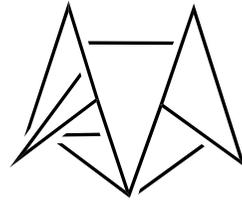
ペンタドロン  
秋山 仁



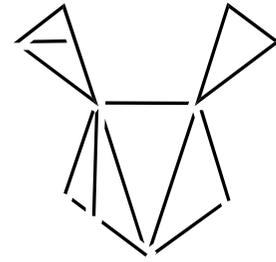
犬の顔



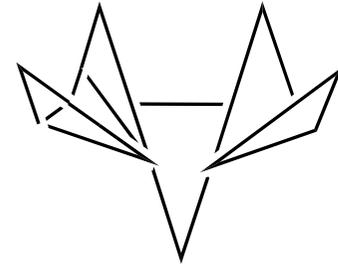
狐の顔



狸の顔



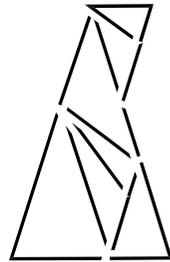
兔、or りす



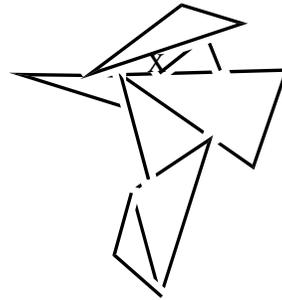
トナカイ



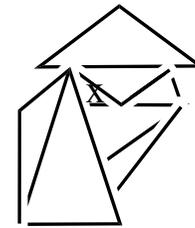
尼僧



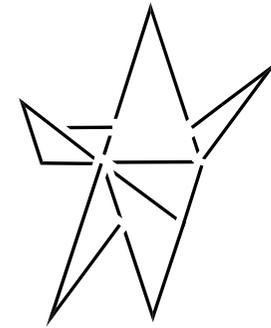
大僧正



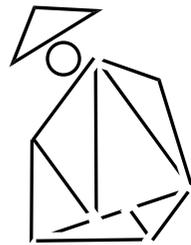
佐渡おけさ



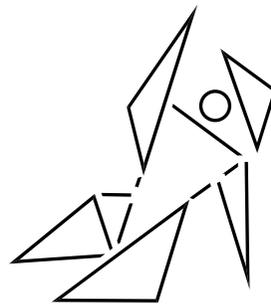
お祈り



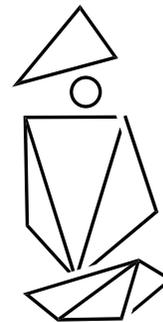
歌え、踊れや



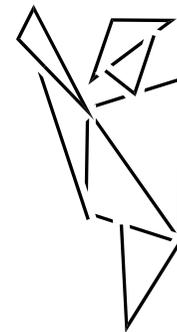
旅がらす、何を思う



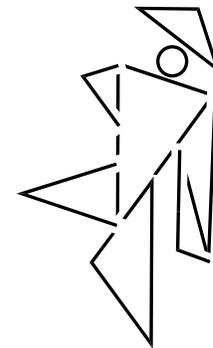
滑り込みセーフ



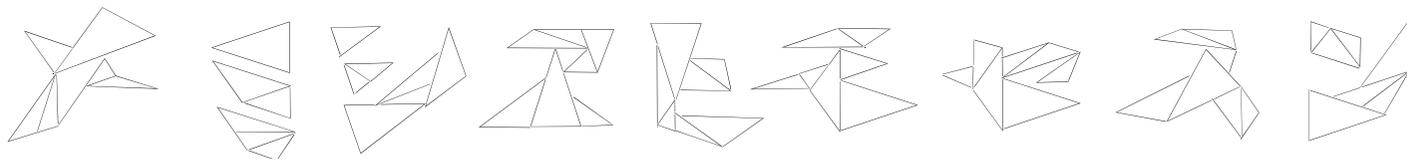
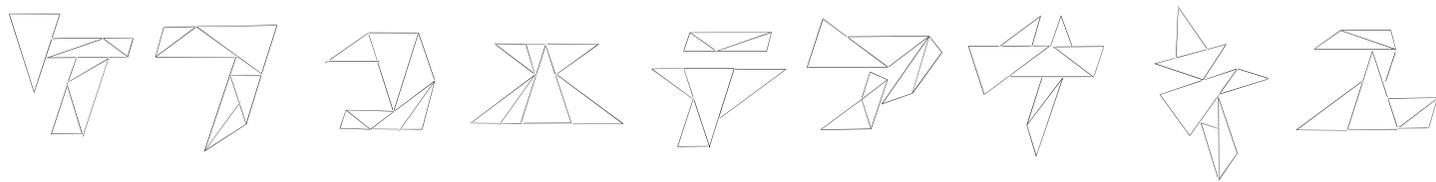
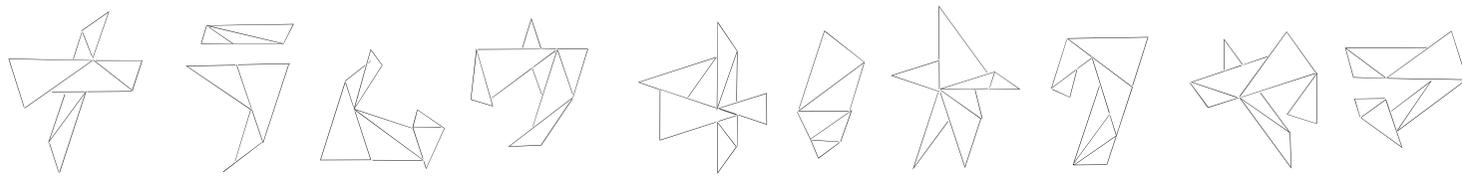
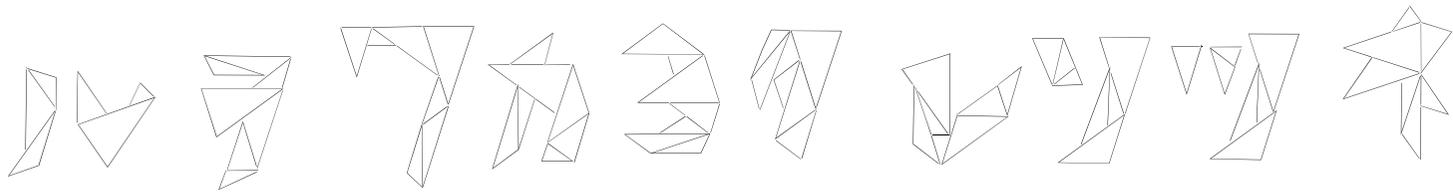
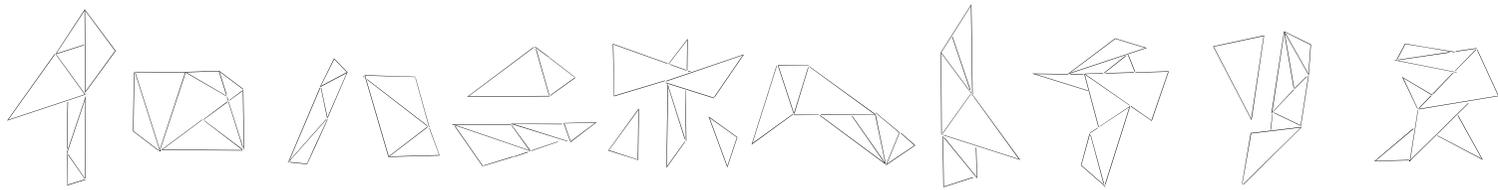
キャッチャー

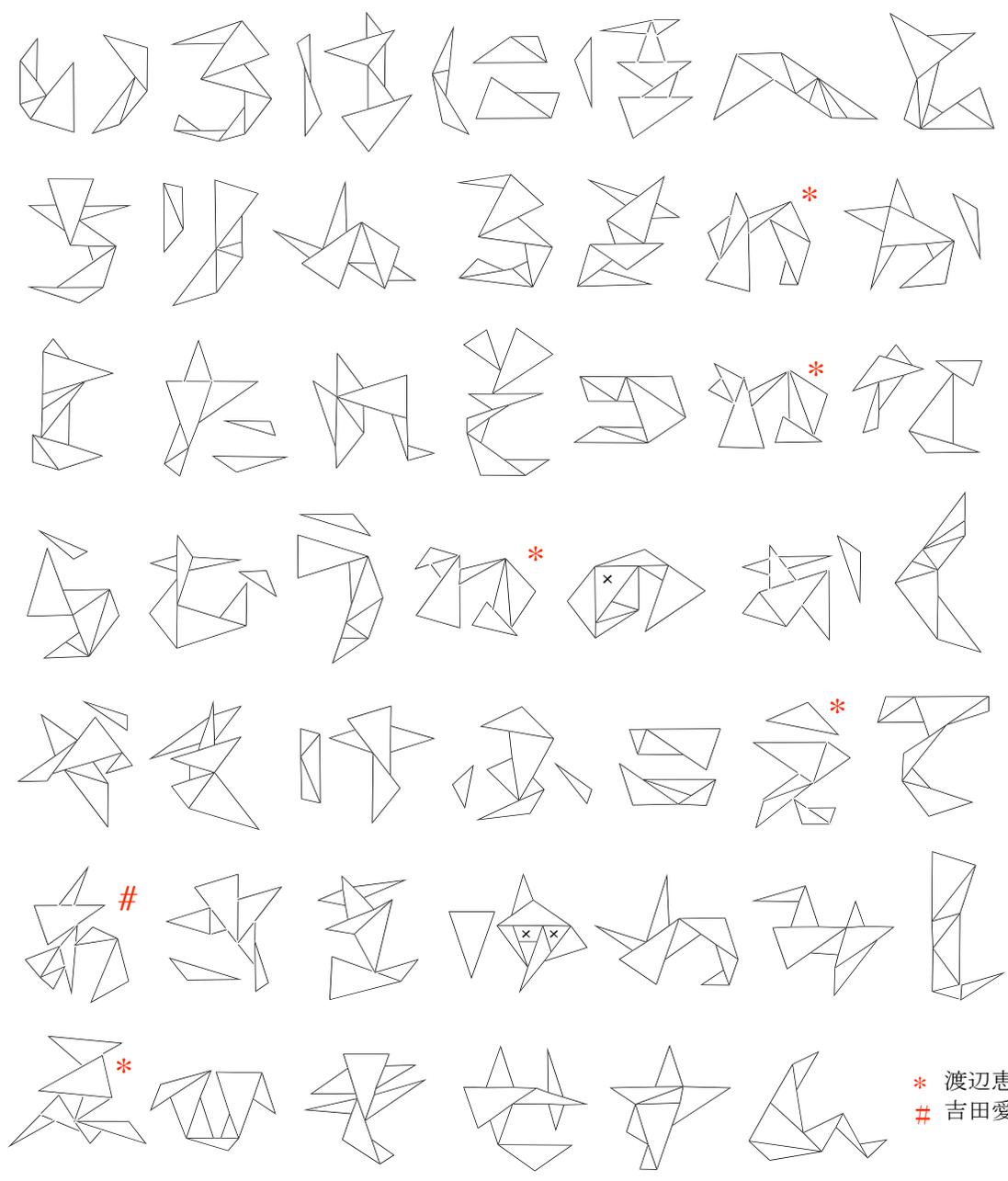


バッター

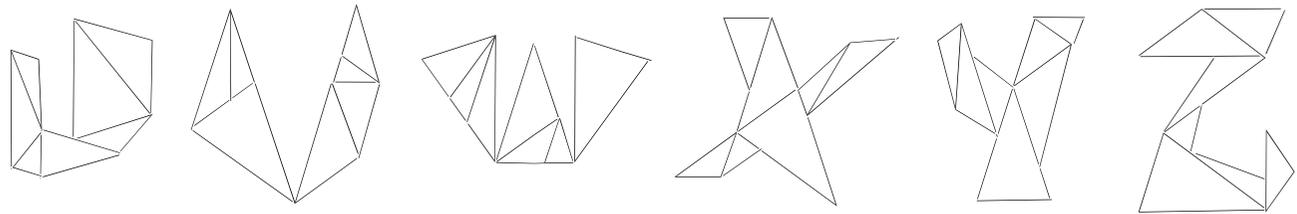
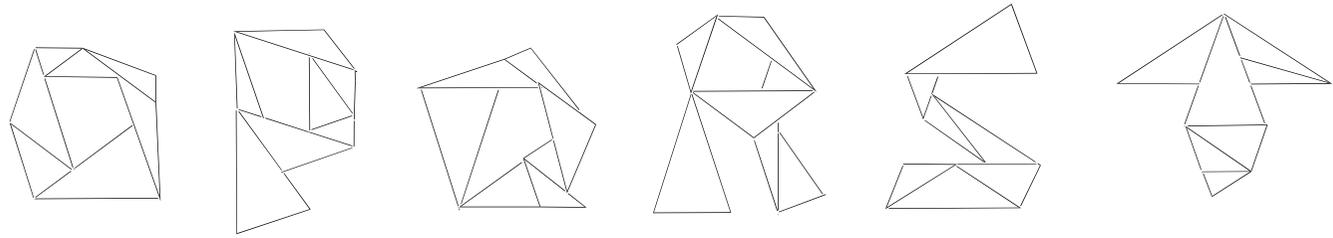
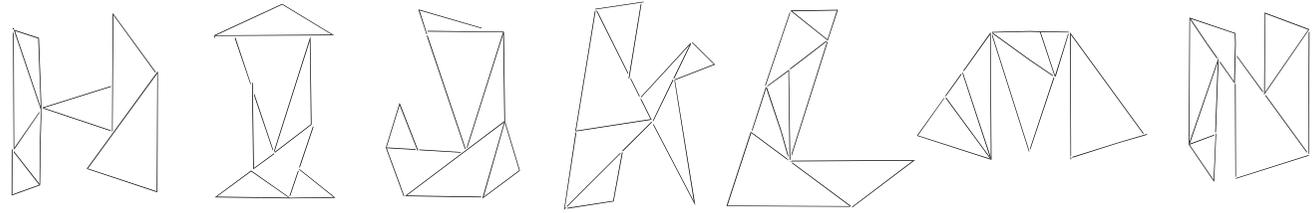
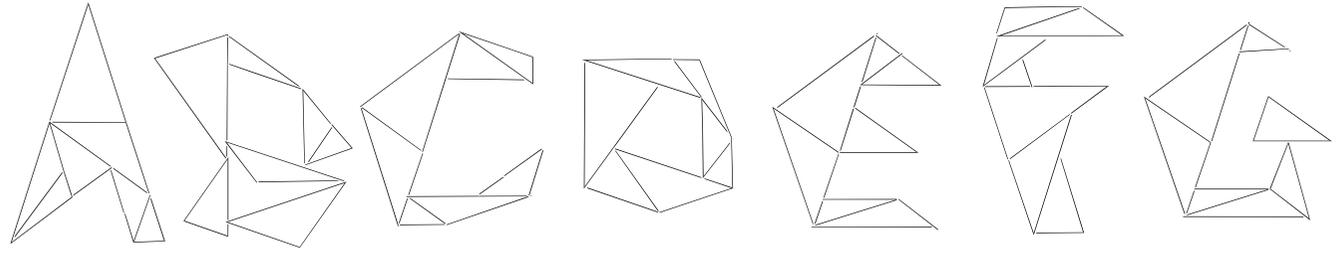


ピッチャー

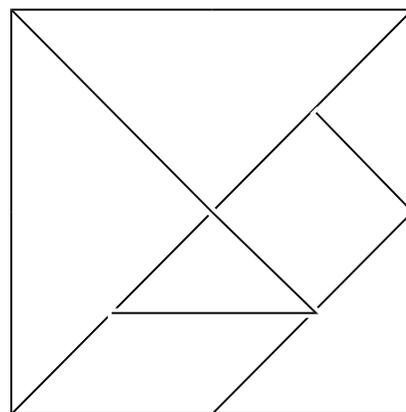
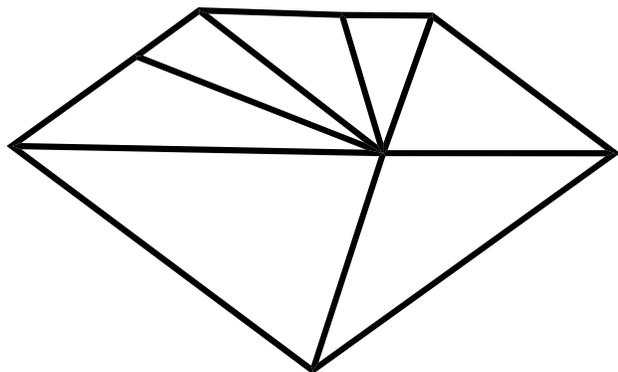




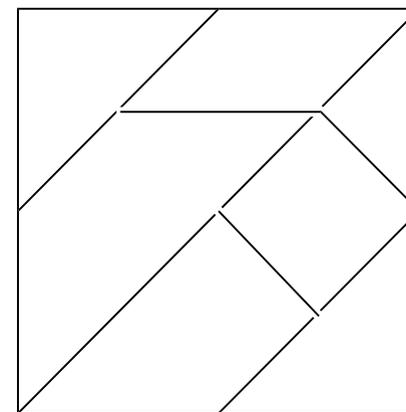
\* 渡辺恵  
# 吉田愛音



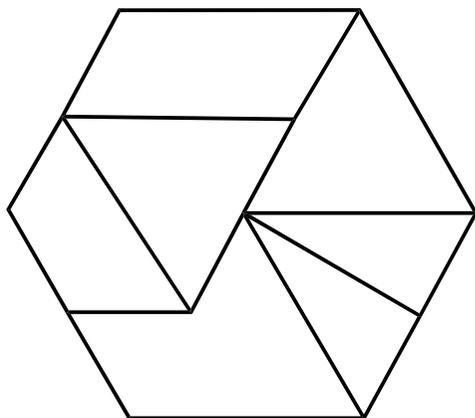
# 7片のシルエットパズルの色々



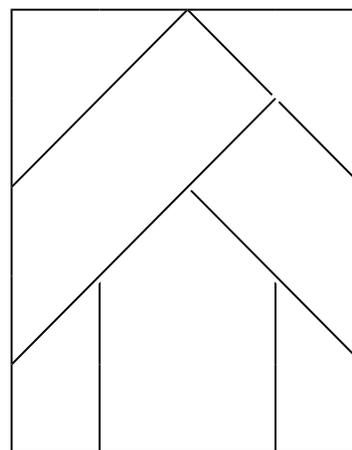
タングラム



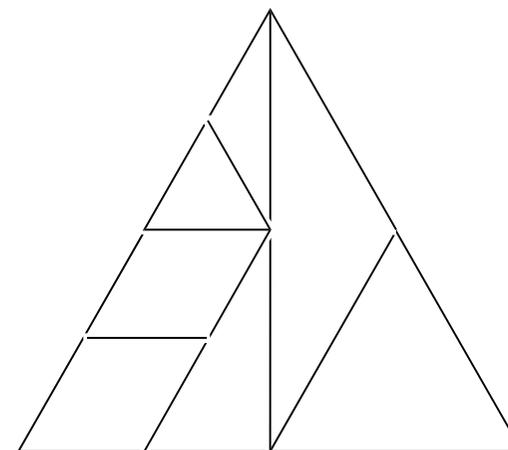
清少納言智恵の板



IVYパズル  
小黒三郎



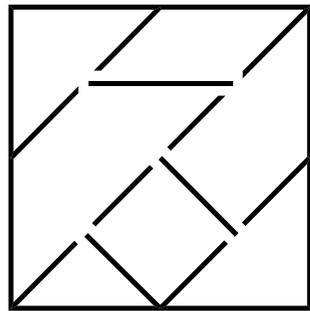
ラッキーパズル



ロングラム  
芦ヶ原伸之

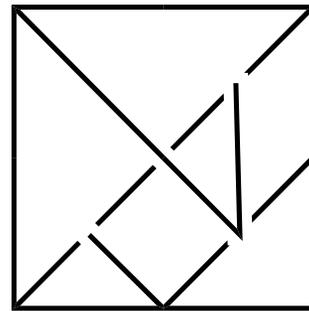
# 色々なシルエットパズルの凸多角形の数

タングラム



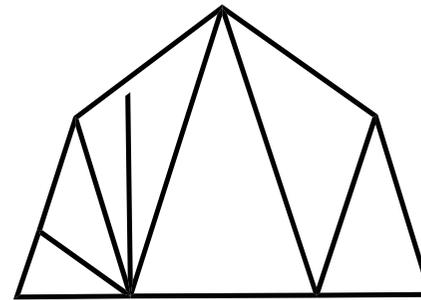
13

清少納言知恵の板



16

七金三パズル



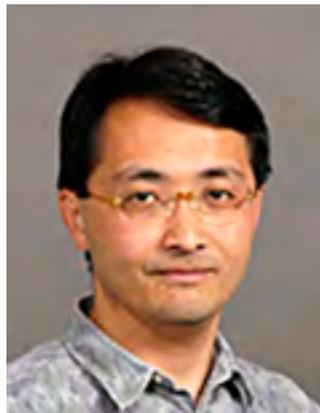
?

# Convex Configuration on **Nana-kin-san** Puzzle

8th International Conference on Fun with Algorithm, (FUN2016)  
June 8-10, La Maddalena, Maddalena Islands, Italy



Takashi Horiyama  
(Saitama Univ.)



Ryuhei Uehara  
(JAIST)



Haruo Hosoya  
(Ochanomizu Univ.)

# Convex Configurations on Nana-kin-san Puzzle

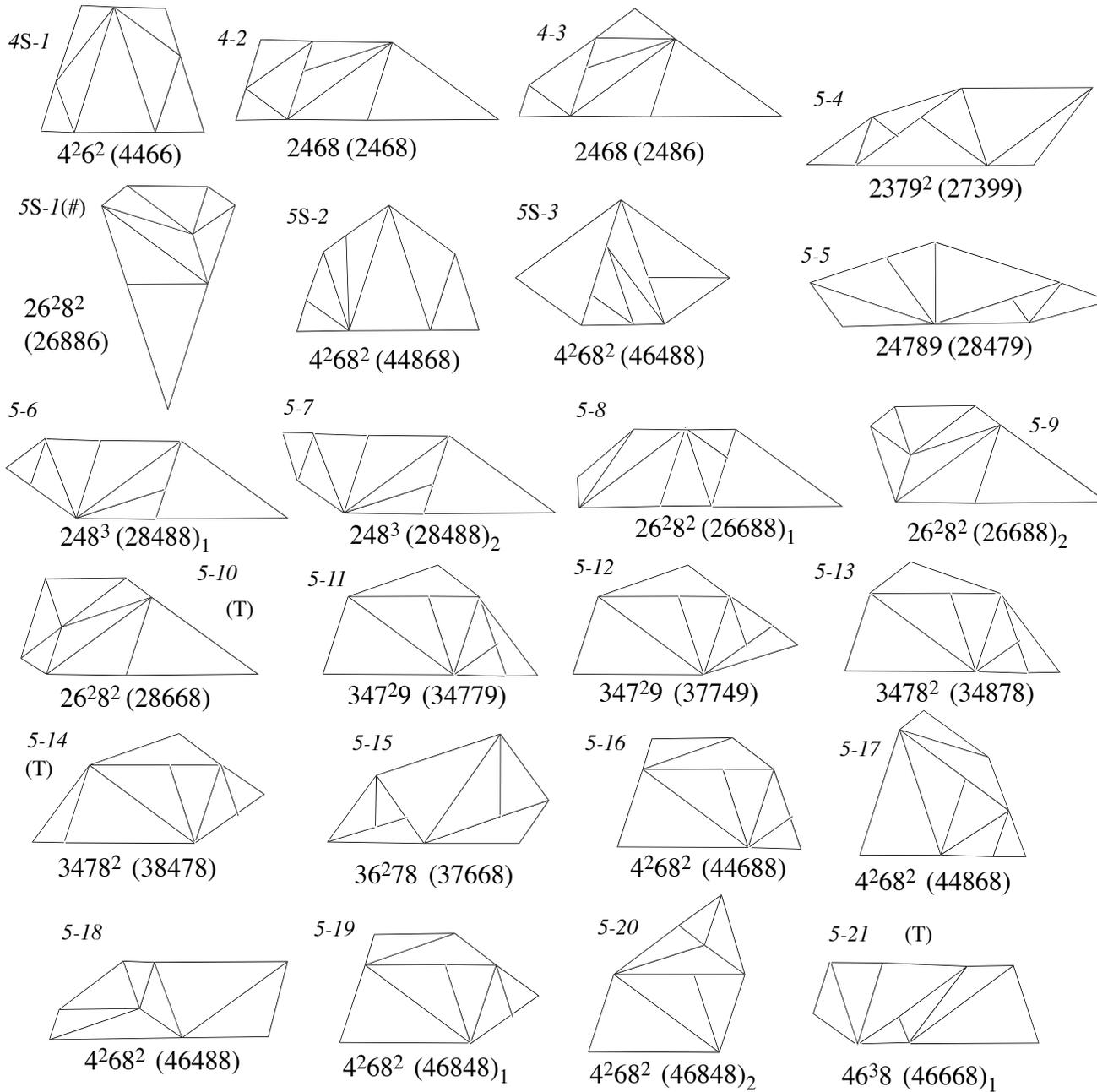
Takashi Horiyama<sup>1</sup>, Ryuhei Uehara<sup>2</sup>, and Haruo Hosoya<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Saitama University,

<sup>2</sup> Japan Advanced Institute of Science and Technology

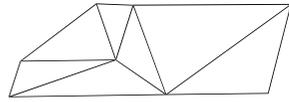
<sup>3</sup> Ochanomizu University

# 62 Snug Golds of Nana-Kin-San



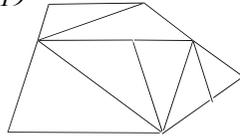
(K) : 佐藤洸風  
 (T) : 堀山貴史  
 S : mirror symmetric  
 (#) : unique solution  
 (\*) : all obtuse angles

5-18



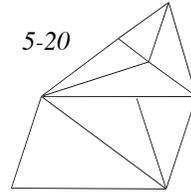
$4^2 6 8^2$  (46488)

5-19



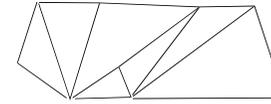
$4^2 6 8^2$  (46848)<sub>1</sub>

5-20



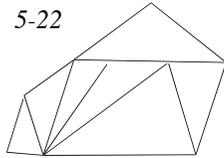
$4^2 6 8^2$  (46848)<sub>2</sub>

5-21 (T)



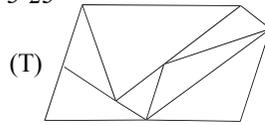
$46^3 8$  (46668)<sub>1</sub>

5-22



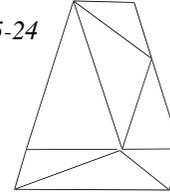
$46^3 8$  (46668)<sub>2</sub>

5-23



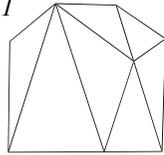
(T)  
 $46^3 8$  (46686)<sub>1</sub>

5-24



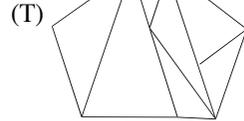
$46^3 8$  (46686)<sub>2</sub>

6S-1



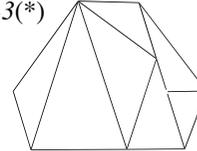
$5^2 7^2 8^2$  (557887)

6S-2(\*)



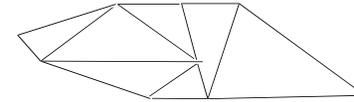
(T)  
 $6^4 8^2$  (666688)

6S-3(\*)



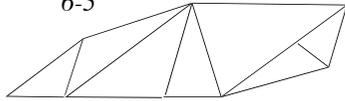
$6^2 7^4$  (667777)

6-4(#) (T)



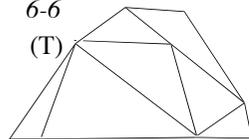
$2389^3$  (289399)

6-5



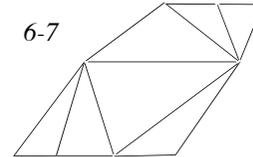
$3479^3$  (297499)

6-6



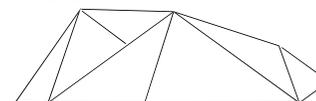
(T)  
 $34789^2$  (349789)

6-7



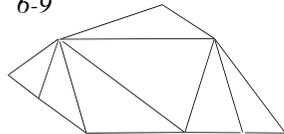
$34789^2$  (379489)

6-8



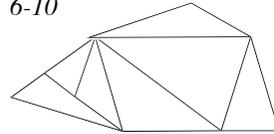
$34789^2$  (379948)

6-9



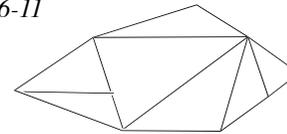
$34789^2$  (384979)

6-10



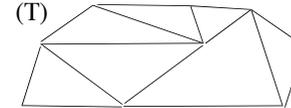
$34789^2$  (394879)

6-11



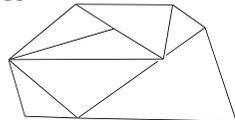
$34789^2$  (397489)

6-12



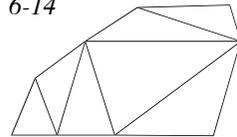
(T)  
 $46^2 8^3$  (466888)<sub>1</sub>

6-13



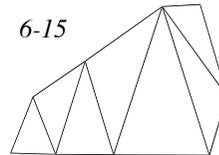
$46^2 8^3$  (466888)<sub>2</sub>

6-14



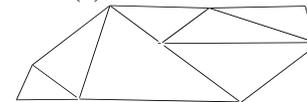
$46^2 8^3$  (468688)

6-15



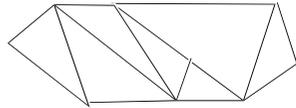
$46^2 8^3$  (468868)

6-16(#) (T)



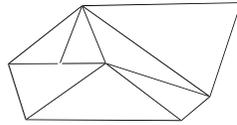
$46^2 8^3$  (486688)<sub>1</sub>

6-17 (T)



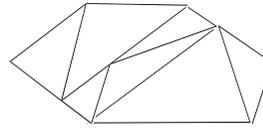
$$46^2 8^3 (486688)_2$$

6-18



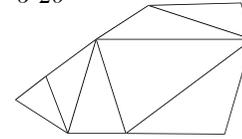
$$46^2 8^3 (486688)_3$$

6-19 (T)



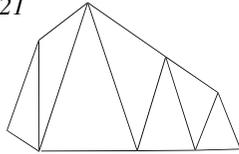
$$46^2 8^3 (486688)_4$$

6-20



$$46^2 8^3 (486868)_1$$

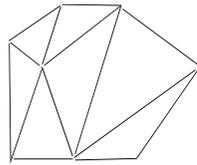
6-21



$$46^2 8^3 (486868)_2$$

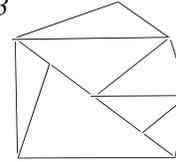
6-22

(K)



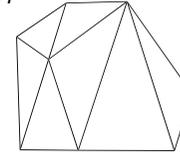
$$5^2 7^2 8^2 (575788)$$

6-23



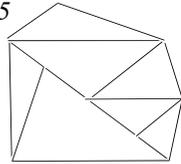
$$56^2 7 8^2 (567886)$$

6-24



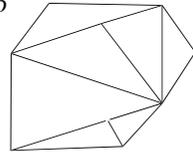
$$567^3 8 (567787)$$

6-25



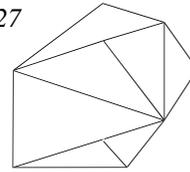
$$567^3 8 (568777)$$

6-26



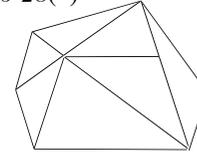
$$567^3 8 (576778)$$

6-27



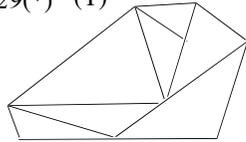
$$567^3 8 (576877)$$

6-28(\*)



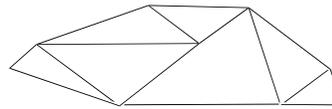
$$6^3 7^2 8 (667678)$$

6-29(\*) (T)



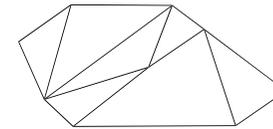
$$6^4 8^2 (666688)$$

7-1(#) (K)



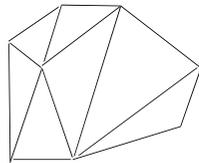
$$348^2 9^3 (3948899)$$

7-2 (T)



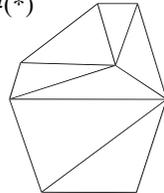
$$468^5 (4886888)$$

7-3



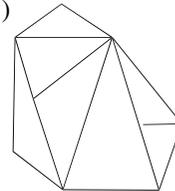
$$567^2 8^2 9 (5788679)$$

7-4(\*)



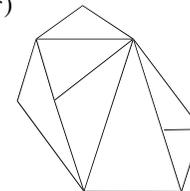
$$6^3 8^4 (6686888)$$

7-5(\*)



$$6^2 7^3 8 9 (6778679)$$

7-6(\*)



$$6^2 7^3 8 9 (6778697)$$

## 7 ピースシルエットパズルからできる 凸多角形の数とその分布

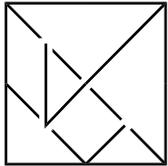
多角形	3	4	5	6	7	8	計
タンگرام	1	6	2	4	0	0	13
清少納言	1	9	2	4	0	0	16
ラッキーパズル	0	5	7	8	0	1	21
七金三パズル	0	3	24	29	6	0	62

## 7 ピースシルエットパズルからできる 凸多角形の数とその分布

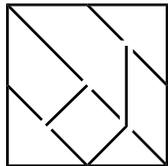
多角形	3	4	5	6	7	8	計
タングラム	1	6	2	4	0	0	13
清少納言	1	9	2	4	0	0	16
ラッキーパズル	0	5	7	8	0	1	21
七金三パズル	0	3	24	29	6	0	62

では、何故「七金三」では、  
凸多角形が沢山できるのか

タングラムと清少納言のどのピースも  
直角二等辺三角形の組合せでできているので、  
組み上がる図形の多様性が欠けている



タングラム



清少納言智恵の板

小さな直角二等辺三角形16枚を  
組んでもこの20種しかできない



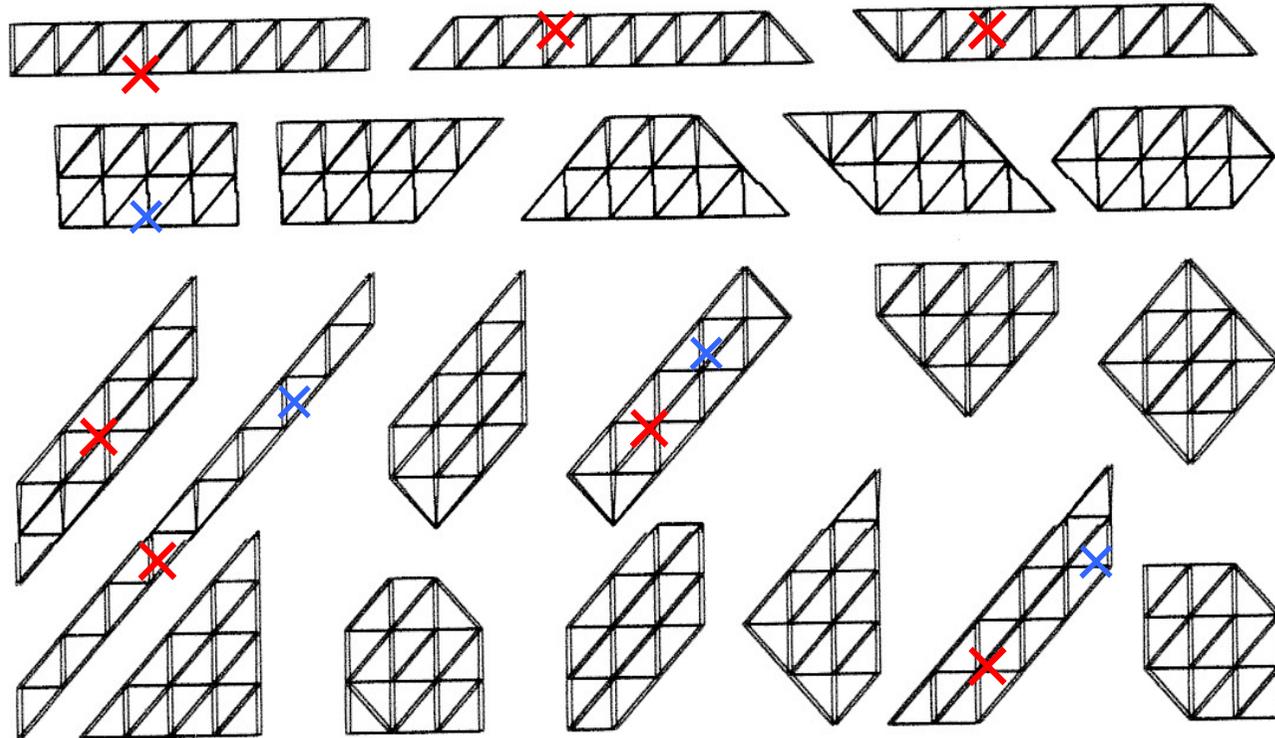
# タングラムと清少納言でできない図形

× タングラム

× 清少納言智恵の板

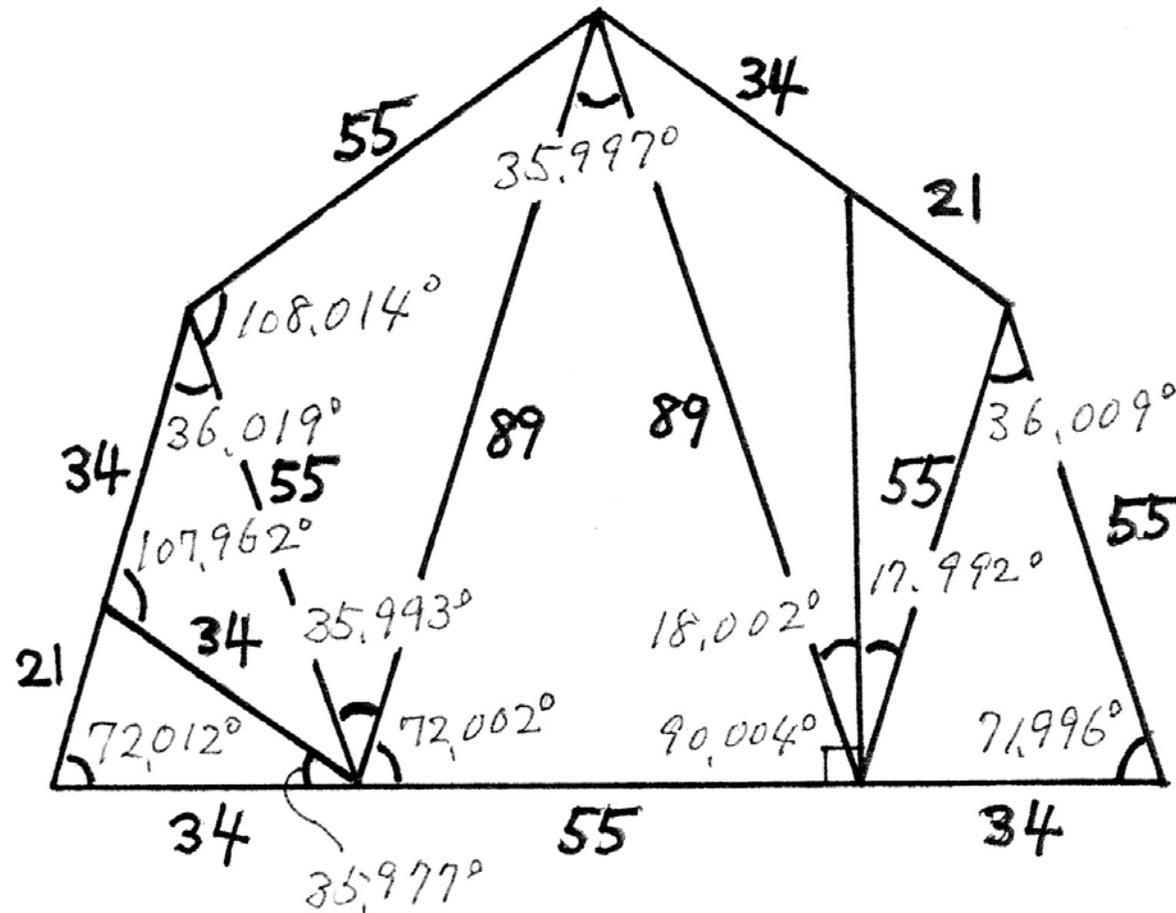
$$20 - 7 = 13$$

$$20 - 4 = 16$$

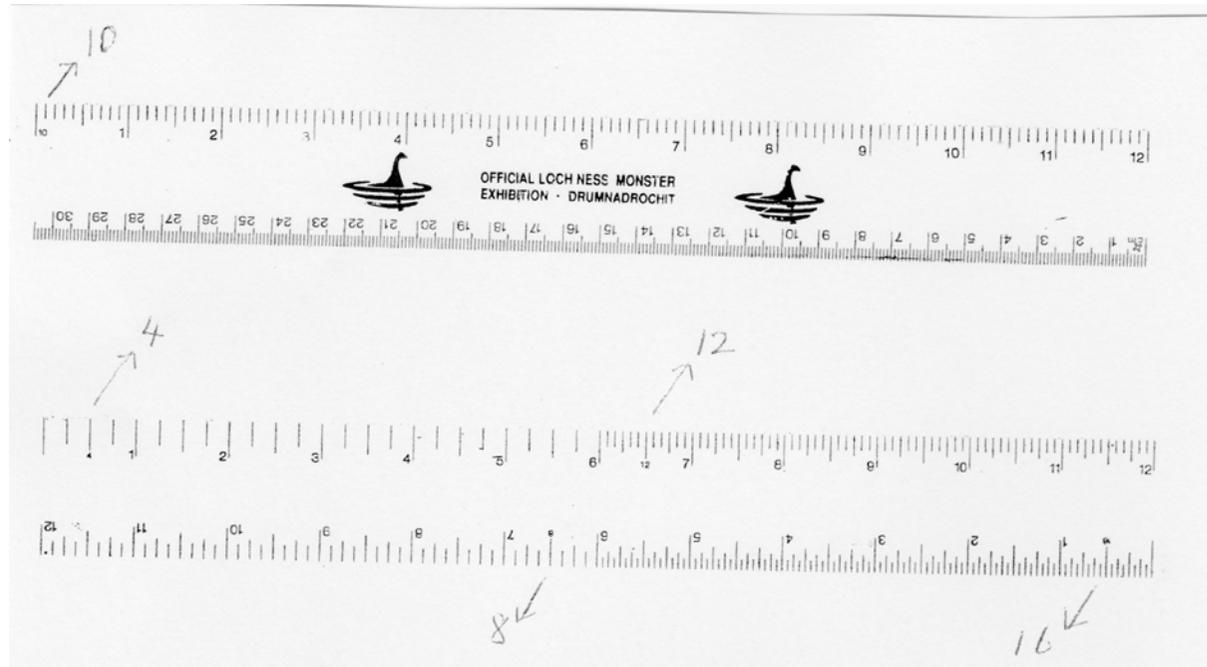
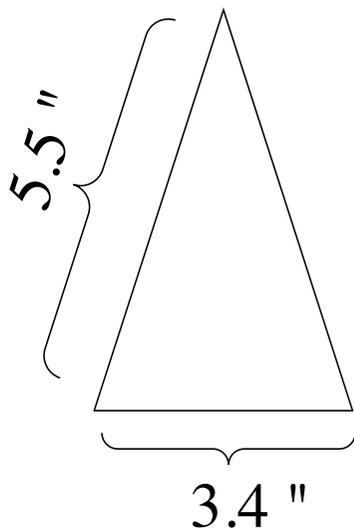


# 七金三パズルの作図

フィボナッチ数を使えば、  
分度器なしに「正確に」作図できる



アメリカのパズルメーカーも  
その秘密を知っていた (decimal inch scale)



御清聴を感謝します

更なるアイデアや御忠告を  
お願い致します

福島算額

五輪教一

～算額（さんがく）～

それは、○△□が繰り広げる無限の世界

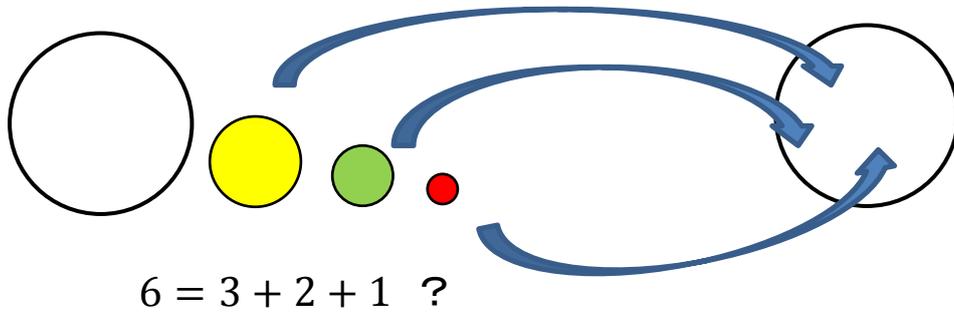


1. 算額図の素材 ○△□

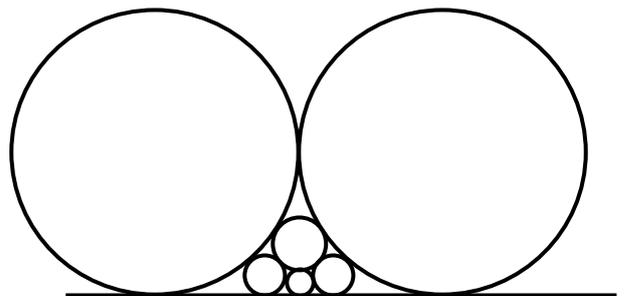
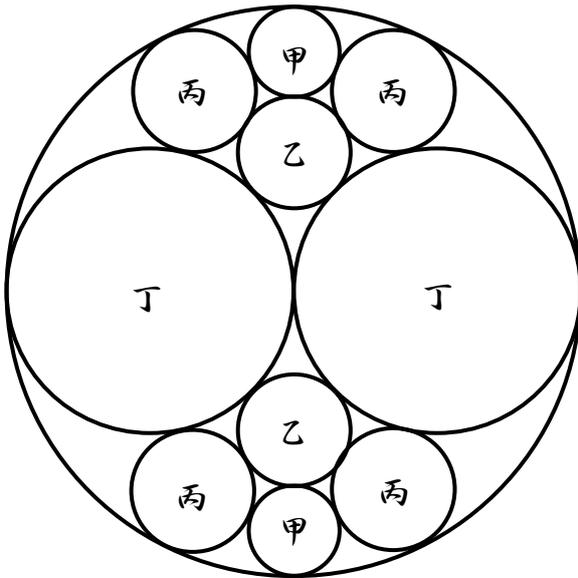
(1) ○（まる）

① 内・外接する累円

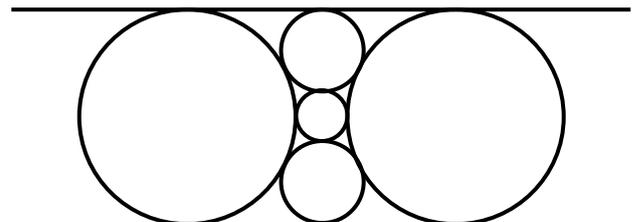
(イ) 有理数列の例



(ロ) 黄金比が現れる例



梁川八幡神社算額 (1817)



『異形同術』 (山上光道、1843)

『神壁算法』 (藤田貞資門下、1789)

…類題算額：檜葉郡天神社 (1894)

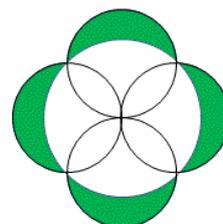
② 交わる円（例：姉屋観世音堂算額）

郡山市田村町田母神地区。国道49号線から小野新町に通じる街道筋に、馬頭観音堂があり、ここに明治初期に奉納された算額が現存します（庸軒佐久間續社中）。写真右は、ここで取り上げる問題図です。問題文の方は判読が難しくなっています。



【問題】

図のように、同じ大きさの4つの小円と、それらのすべての交点を通る大円がある。小円の直径が与えられたとき、緑色の部分の面積（総和）を求めよ。



（明治11年、中畑柳蔵）

図形をじっくりと見ているだけで結論が出てしまう、すばらしい問題です。「四つ葉のクローバー術」と呼ぶには無理がありますが、御堂にしても図柄にしても、道端で見つけた素敵な数学です。

実は、この問題の基になったと思われる問題が、師の和算書(佐久間續『算法起源集』)に存在しました。その写しと、本物の「四葉のクローバー」の写真を載せておきましょう。えっ？「答えは如何」ですって？ 図が教えてくれていますよ。



（ホームページ『街角の数学』～落書き帳「○△□」3より～）

(2) ○(まる)と△(さんかく)

二本松市杉沢の愛宕神社算額(破片)。1999年、社殿改築の折に天井裏から発見されました。すっきりしたデザインの図柄が、有名な黄金分割を与えています。

【問題】

大正三角形の一辺の長さは、小正三角形の一辺の長さの何倍か。

(年代不明 石森村 佐久間治郎太郎編)



(3) ○(まる)と△(さんかく)と□(しかく)

佐久間庸軒は、明治9年(1876)、57歳のときに自宅の敷地内に「庸軒塾」を開設し、以後亡くなるまで多くの門人を受け入れ、和算(洋算を含む)の教授に当たりました。その翌年の著書から、○△□をちょうど一つずつ使った典型的な名問題を紹介します。

【問題】

今有如図円内容方及三角

但各面等 面一寸

問円径幾何

答円径二寸

『算法起源集』(1877(明治10))

これも、見てそれと分かる問題であり、数学的にも興味深い内容を持っています。

簡素で素敵な図柄には、きっと美しい数理が隠されているのですね。



## 2. 折り紙を素材にして作られた問題

### (1) 名作



福島市黒岩の万願寺にある虚空蔵堂には、1893（明治26）年に奉納された算額の復元額があります。軒下に掛けられているため、いつでも外から観覧することができます。秋には木々の葉が美しく色づき、眼下には阿武隈川の流れを望むことのできる景勝地です。

全17題からなる算額の中から、折り紙を素材にしたすばらしい問題（世界的に有名）と、折り紙を使って解決することができる問題を紹介します。



## (2) 折鶴はなぜ美しいのか。

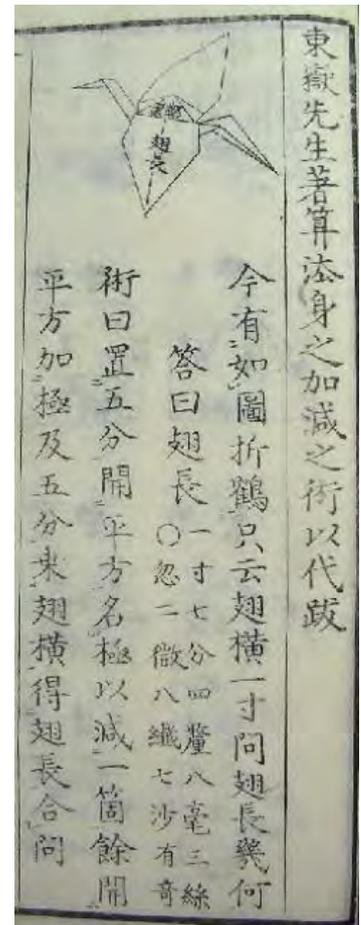
(ホームページ『街角の数学』～落書き帳「○△□」71改め～)



上の写真のうち、3枚目にあるマンホールの蓋の写真を取り上げます。2枚目の写真からお察しの通り、これは高村光太郎の妻智恵子の生家（記念館）前にあるものです。このマンホールの存在は、次にご紹介する和算問題とともに前川淳氏（日本を代表する折り紙作家）から教わりました。灯台下暗し、です。

最上流和算家佐久間庸軒が著した『当用算法』（嘉永6年、1853）に、折り鶴の問題が載っています。

右の写真は、その和算書（大枚を叩いて購入）を写したものです。これを見ると、元は庸軒の師匠渡辺東嶽の著書『算法身之加減』にあることが分かります。こちらは福島県立図書館で閲覧することができますが、残念ながら鶴の絵が不鮮明なっています。



写真から読み取れるように、題意は、折り鶴の翅の「翅横（付け根の長さ）を一寸とすると、翅長（付け根から先端までの長さ）は？」というもの。

折り目はすべて直線でありながら、空気を入れ胴を膨らますことによって優美な姿を現す折り鶴。そのとき広がる翅の形と大きさは翅横と翅長によって決まり、これらが全体の姿形に調和と安定をもたらします。翻って、

「美しさの源は、角の二等分線が織りなす「折り図」（の数理）にある」

ことを、この問題は示唆しています。答を表す数式もまた美しい、と感じるのは街角の翁だけでしょうか。



駅が設けられたのは、1917年（大正6年）。

今から98年前のことです。

地元（上川崎）出身の作家：東野辺薫（教師として長く旧安達中に勤務）は、

『和紙』で戦時中の芥川賞を受賞（第18回、1943）しましたが、

この小説にも安達駅が出てきます。

主人公が出征前夜に最後の紙すきをしているとき、密かに思う娘が訪うのですが、

いつしか漉き三昧の境地に入っていた主人公には聞こえない。

…戦時中の、しかし紙漉き三昧そのままの静寂な筆致の中に、

当時の様子が浮かび上がります。

写真を2枚添付します。

良いお年をお迎えください。 五輪

### 3. 動物が描かれた算額

現存算額の中から、天井板に描かれた巖島神社（三春町御木沢）の算額をご紹介します。

花鳥風月の見事な絵や書が描かれた社殿の格天井に、5枚の算額があることはすでに知られていましたが、2009年7月、蛇の絵の板が算額であることが新たに確認されました。

算額問題には珍しく、中学生に最適の良問です。そればかりでなく、動物、特に蛇が描かれた算額は全国にも例がありません。貴重な文化遺産として、永く保存されなければなりません。

#### 【問題】

今、蛇あり。

その長さは10尺あるという。

これを「の」の字の形に巻くとき、

その中径は何程なるや。

ただし、円周率には3.16を用いよ。

（明治18年 宇古内 渡辺市郎）



### 4. 桃のエンブレム

（ホームページ『街角の数学』～落書き帳「○△□」67より～）

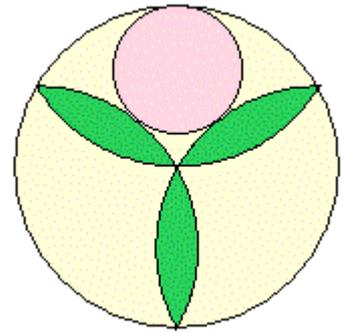
福島市篠葉沢稲荷の失われた算額から、「どこかで見たような」図柄の算額問題をご紹介します。ただし、それこそ「どこかで見たよう」に原図を修正（3個の円を1個に）しています。果物王国福島の夏を思い出していただければ幸いです。

**【問題】**

外円があり、その中心を通り外円と同半径の円弧が3個つながって描かれている。さらに、「桃」円が、図のように外円と2個の円弧に接して容れてある。

外円の半径を5寸として、「桃」円の半径を求めよ。

(飯野村 菅野 福松)



今年の桃の収穫は例年より1週間から十日早く、甘くて日持ちの良い人気種「あかつき」は、8月初旬にはもう最盛期を迎えました。熱中症知らずの桃は、人間の体温を越える猛暑を好むのでしょうか。(2015.8.16記)

桃が出てくる小説で忘れられないのが、明治の文豪夏目漱石の『三四郎』。この小説が朝日新聞に再連載されたので、そこから少し「水蜜桃」の話を引用させていただきます。

～その男の説によると、桃は果物のうちで一番仙人めいている。何だか馬鹿見たような味がする。第一核子(たね)の恰好(かつこう)が不器用だ。かつ穴だらけで大変面白く出来上っているという。～

この後、子規が樽柿を十六個食ったことや、豚の鼻が延びる話、レオナルド・ダ・ヴィンチが桃の幹に砒石(ひせき)を注射したことなどが語られます。語り手は、三四郎が熊本を出て、名古屋から東京へ向かう車中で出会った髭(ひげ)の男。そう、鼻から哲学の煙を吐く広田先生です。

毎年夏が来て、桃を丸ごとベチャベチャ食べるたびに、富士山の話や女に言われた「あなたはよっぽど度胸のない方(かた)ですね」というセリフとともに思い出す冒頭のシーン。何度読んでも、そして百年経っても色褪せない作品です。

**【備考】**・参考文献：『算法身之加減』(渡辺一、1830)

『当用算法』『算法起源集』(佐久間續、1853、1877)

『学術を中心とした和算史上の人々』(平山諦、富士短期大学出版部 1965)

『例題で知る日本の数学と算額』(深川英俊、森北出版 1998)

『福島の算額』(福島県和算研究保存会編、1989)

『Computational Programs Related to Paper Crane in the Edo Period』

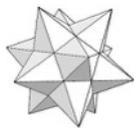
(前川淳、60SME 2014)

『黄金比の眠るほこら』(五輪教一、日本評論社 2015)

・ホームページ：『街角の数学』(<http://streetwasan.web.fc2.com/>)

## 星型正多面体の体積

小星型 12 面体の体積 (辺長 1 の正 20 面体に内接)



$$\begin{aligned} \frac{5\varphi^{-2}}{2} &= \frac{5(2-\varphi)}{2} \approx \frac{5(2-1.618)}{2} \approx \frac{5 \times 0.382}{2} \approx 0.955 \\ &\Downarrow \\ &= \frac{5(2-\varphi)}{2} = \frac{10-5\varphi}{2} = 5 - \frac{5}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{20-5-5\sqrt{5}}{4} = \frac{15-5\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

大 12 面体の体積 (辺長 1 の正 20 面体に内接)



$$\begin{aligned} \frac{5\varphi^{-1}}{2} &= \frac{5(\varphi-1)}{2} \approx \frac{5 \times 0.618}{2} \approx 1.545 \\ &\Downarrow \\ &= \frac{5(\varphi-1)}{2} = \frac{5\varphi-5}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{5+5\sqrt{5}}{4} - \frac{10}{4} = \frac{5\sqrt{5}-5}{4} \end{aligned}$$

大星型 12 面体 (辺長 1 の正 12 面体に内接)



$$\begin{aligned} \frac{5\varphi^{-1}}{2} &= \frac{5(\varphi-1)}{2} \approx \frac{5 \times 0.618}{2} \approx 1.545 \\ &\Downarrow \\ &= \frac{5(\varphi-1)}{2} = \frac{5\varphi-5}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{5+5\sqrt{5}}{4} - \frac{10}{4} = \frac{5\sqrt{5}-5}{4} \end{aligned}$$

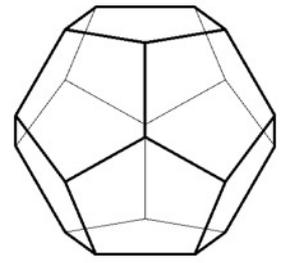
大二十面体の体積 (辺長 1 の正 20 面体に内接)



$$\begin{aligned} \frac{32-19\varphi}{2} &= \frac{\varphi-20\varphi+32}{2} = \frac{\varphi}{2} - (10\varphi-16) \approx \frac{1.618}{2} - (16.18-16) \approx 0.809-0.18 \approx 0.629 \\ &\Downarrow \\ \frac{32-19\varphi}{2} &= \frac{32}{2} - \frac{19}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{64}{4} - \frac{19+19\sqrt{5}}{4} = \frac{45-19\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

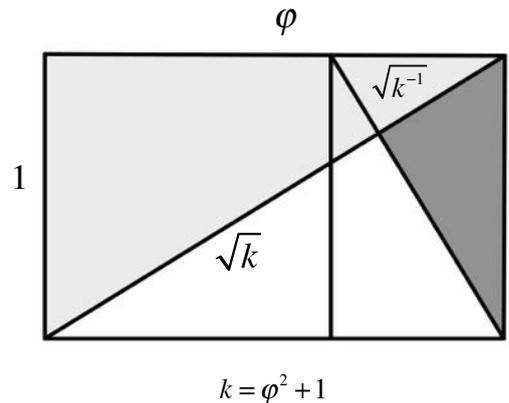
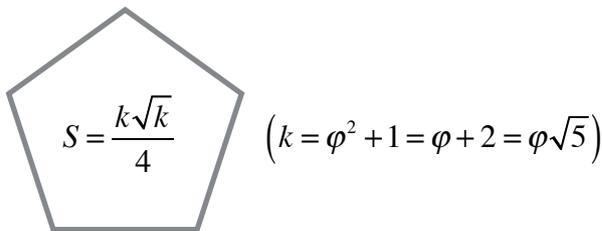
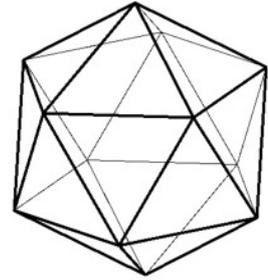
Regular Dodecahedron Volume (edge=1)

$$\frac{\varphi^3 \cdot k}{2} = \frac{\varphi^3(\varphi+2)}{2} = \frac{\varphi^4+2\varphi^3}{2} = \frac{\varphi^4+\varphi^3+\varphi^3}{2} = \frac{\varphi^4+\varphi^3+\varphi^2+\varphi}{2}$$



Regular Icosahedron Volume (edge=1)

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{6} &= \frac{5\varphi^2}{6} = \frac{3\varphi^2+2\varphi^2}{6} = \frac{(\varphi^2+\varphi^{-2})\varphi^2+2\varphi^2}{6} = \frac{\varphi^4+1+2\varphi^2}{6} \\ &= \frac{\varphi^4+1+\varphi^2+\varphi^2+(\varphi+\varphi^{-1})-(\varphi+\varphi^{-1})}{6} \\ &= \frac{\varphi^4+\varphi^2+\varphi+\varphi^2+\varphi^{-1}+1-(\varphi+\varphi^{-1})}{6} \\ &= \frac{\varphi^4+\varphi^3+\varphi^2+\varphi-\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

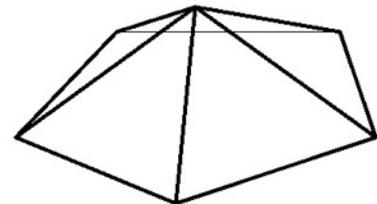


$$\begin{aligned} 1 : x = \sqrt{k} : 1 &\Rightarrow x = \sqrt{k^{-1}} \\ &\swarrow \\ \sqrt{k^{-1}} : \frac{\sqrt{k}}{2} &= 1 : \frac{k}{2} \end{aligned}$$

五角錐 (正20面体) の体積

$$\frac{\varphi^2}{24} \times 5 \div \frac{k}{2} = \frac{5\varphi^2}{24} \times \frac{2}{k} = \frac{k^2}{12} \times \frac{1}{k} = \frac{k}{12}$$

$$\frac{k\sqrt{k}}{4} \times \sqrt{k^{-1}} \times \frac{1}{3} = \frac{k}{12}$$

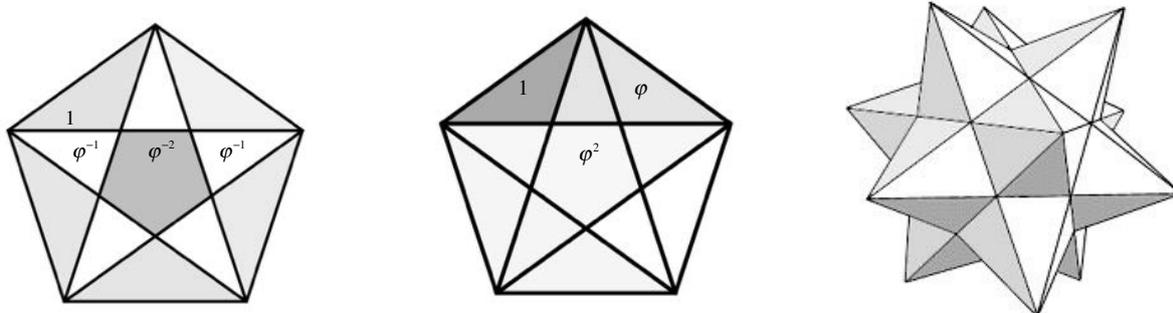


五角錐の体積 (小星型12面体の角部分)

$$\frac{k}{12} \times (\varphi^{-2})^2 = \frac{\varphi^{-4}k}{12} = \frac{\varphi^{-4} \times \varphi\sqrt{5}}{12} = \frac{\varphi^{-3}\sqrt{5}}{12} \quad (k = \varphi^2 + 1 = \varphi + 2 = \varphi\sqrt{5})$$

**小星型 12 面体の体積** (辺長 1 の正 20 面体に内接している)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^3 k}{2} \times (\varphi^{-2})^3 + \frac{\varphi^{-4} k}{12} \times 12 &= \frac{\varphi^{-3} k + 2\varphi^{-4} k}{2} = \frac{\varphi^{-4} k(\varphi + 2)}{2} = \frac{\varphi^{-4} k \cdot k}{2} = \frac{\varphi^{-4} \times 5\varphi^2}{2} = \frac{5\varphi^{-2}}{2} = \frac{5(2-\varphi)}{2} \approx \frac{5(2-1.618)}{2} \approx \frac{5 \times 0.382}{2} \approx 0.955 \\ &= \frac{5(2-\varphi)}{2} = \frac{10-5\varphi}{2} = 5 - \frac{5}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{20-5-5\sqrt{5}}{4} = \frac{15-5\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

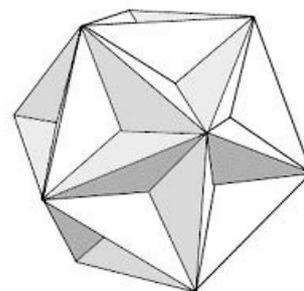


正五角形の面積比

$$\begin{aligned} 3(1+\varphi) + \varphi &= 3\varphi^2 + \varphi = 2\varphi^2 + \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi^4 \\ &= \varphi^2(1+\varphi^2) = \varphi^2 k \end{aligned}$$

窪み部分 (正 20 面体) の体積

$$\frac{k}{12} \div \varphi^2 k = \frac{\varphi^{-2}}{12}$$



**大 12 面体の体積** (辺長 1 の正 20 面体に内接している)

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{6} - \frac{\varphi^{-2}}{12} \times 20 &= \frac{k^2 - 10\varphi^{-2}}{6} = \frac{5\varphi^2 - 10\varphi^{-2}}{6} = \frac{5\varphi^2 + 5\varphi^{-2} - 15\varphi^{-2}}{6} = \frac{5(\varphi^2 + \varphi^{-2}) - 15\varphi^{-2}}{6} = \frac{5 \times 3 - 15\varphi^{-2}}{6} = \frac{15(1-\varphi^{-2})}{6} \\ &= \frac{15\varphi^{-1}}{6} = \frac{5\varphi^{-1}}{2} = \frac{5(\varphi-1)}{2} \approx \frac{5 \times 0.618}{2} \approx 1.545 \\ &= \frac{5(\varphi-1)}{2} = \frac{5\varphi-5}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{5+5\sqrt{5}}{4} - \frac{10}{4} = \frac{5\sqrt{5}-5}{4} \end{aligned}$$

同一の正 20 面体に内接している小星型 12 面体と大 12 面体の体積比は黄金比となる。また、表面積の比も黄金比となる。

$$\text{小星型 12 面体の体積} : \text{大 12 面体の体積} \rightarrow \frac{5\varphi^{-2}}{2} : \frac{5\varphi^{-1}}{2} = 1 : \varphi$$

**大星型 12 面体** (辺長 1 の正 12 面体に内接している)

正 20 面体の各面に三角錐 (底辺と斜辺の長さの比が 1 : φ) が付いている。下図

上記の正20面体の辺長  $\varphi^{-1}$  なので、体積は  $\frac{5\varphi^2}{6} \times (\varphi^{-1})^3 = \frac{5\varphi^{-1}}{6}$

edge=1  $\frac{\varphi^2}{24} = 1 \times \frac{\varphi}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\varphi}{2} \times \frac{1}{3}$

$\frac{\varphi^2}{24} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{h}{3} \longrightarrow h = \frac{\varphi^2 \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\varphi^2 \sqrt{3}}{6}$

edge =  $\varphi^{-1}$   $h = \frac{\varphi^2 \sqrt{3}}{6} \times \varphi^{-1} = \frac{\varphi \sqrt{3}}{6}$

角部分の高さh  $\frac{\varphi \sqrt{3}}{2} - \frac{\varphi \sqrt{3}}{6} = \frac{\varphi \sqrt{3}}{3}$

角部分の体積  $\frac{\varphi^2 \sqrt{3}}{4} \times \frac{\varphi \sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\varphi^{-1}}{12}$

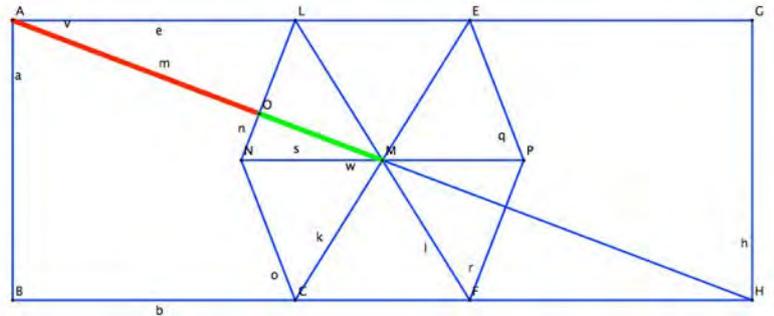
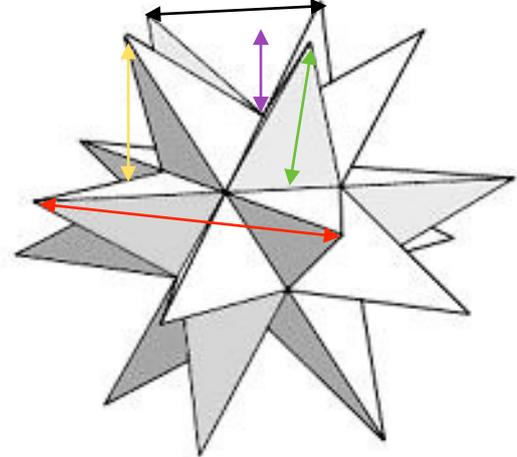


図 大星型12面体 黒→1 赤→ $\phi$



大星型12面体の体積 1 (足し算)

$\frac{5\varphi^{-1}}{6} + \frac{\varphi^{-1}}{12} \times 20 = \frac{5\varphi^{-1}}{6} + \frac{10\varphi^{-1}}{6} = \frac{15\varphi^{-1}}{6} = \frac{5\varphi^{-1}}{2} = \frac{5(\varphi-1)}{2} \approx \frac{5 \times 0.618}{2} \approx 1.545$

其の2

正12面体(edge=1)を12等分割する正五角錐の高さp

紫→p を高さとする正五角錐は正20面体(edge=1)と同じなので、高さpと体積は下記

$p = \sqrt{k^{-1}}$   $Volume = \frac{k}{12}$

上記の確認です。紫→p は上記(A)から、正20面体の外接円の半径を引いたもの

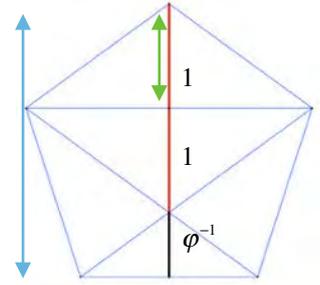
$p = \frac{\varphi^3 \sqrt{k^{-1}}}{2} - \frac{\varphi^{-1} \sqrt{k}}{2} = \frac{\varphi^{-1} \sqrt{k^{-1}} (\varphi^4 - k)}{2} = \frac{\varphi^{-1} \sqrt{k^{-1}} (3\varphi + 2 - \varphi - 2)}{2} = \frac{2\varphi \cdot \varphi^{-1} \sqrt{k^{-1}}}{2} = \sqrt{k^{-1}}$

$Volume = \frac{k\sqrt{k}}{4} \times \sqrt{k^{-1}} \times \frac{1}{3} = \frac{k}{12}$

右図の青→の長さ

$$edge = \sqrt{k}$$

$$\frac{\varphi^2}{2} + \varphi = \frac{\varphi^2 + 2\varphi}{2} = \frac{\varphi^3 + \varphi}{2} = \frac{\varphi(\varphi^2 + 1)}{2} = \frac{\varphi k}{2}$$



$$edge = \varphi$$

$$\frac{\varphi k}{2} \times \varphi \sqrt{k^{-1}} = \frac{\varphi^2 \sqrt{k}}{2}$$

右図の黄緑→の長さ

$$edge = \varphi \quad \frac{\varphi^2 \sqrt{k}}{2} \times \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\sqrt{k}}{2}$$

前図 大星型 1 2 面体の角の側面 (二等辺三角形) の面積

$$\varphi^{-1} \times \frac{\sqrt{k}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\varphi^{-1} \sqrt{k}}{4}$$

前図 大星型 1 2 面体の黄→の長さ

$$\sqrt{k^{-1}} + \varphi^{-1} \sqrt{k^{-1}} = \sqrt{k^{-1}} (1 + \varphi^{-1}) = \varphi \sqrt{k^{-1}}$$

前図 大星型 1 2 面体の角と角の谷間の体積

$$\frac{\varphi^{-1} \sqrt{k}}{4} \times \varphi \sqrt{k^{-1}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

### 大星型 1 2 面体の体積 2 (引き算)

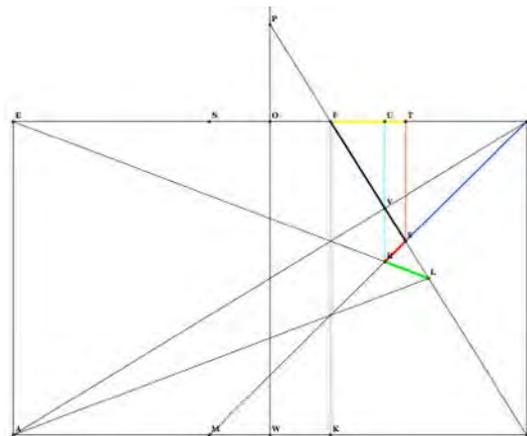
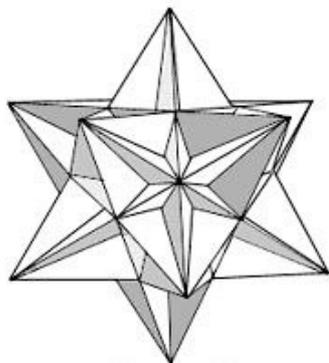
$$\begin{aligned} \frac{\varphi^3 k}{2} - \frac{1}{12} \times 30 - \frac{k}{12} \times 12 &= \frac{\varphi^3 k}{2} - \frac{5}{2} - \frac{2k}{2} = \frac{k(\varphi^3 - 2) - 5}{2} = \frac{k(2\varphi - 1) - 5}{2} = \frac{k(\varphi + \varphi^{-1}) - 5}{2} \\ &= \frac{k\sqrt{5} - 5}{2} = \frac{5\varphi - 5}{2} = \frac{5\varphi^{-1}}{2} = \frac{5(\varphi - 1)}{2} \approx \frac{5 \times 0.618}{2} \approx 1.545 \end{aligned}$$

正 1 2 面体と正 2 0 面体の辺長が等しいとき

- 1、内接している大星型 1 2 面体と大 1 2 面体の体積は等しくなる。
- 2、内接している大星型 1 2 面体と大 1 2 面体の表面積比は  $\varphi : 1$
- 3、内接している大星型 1 2 面体と小星型 1 2 面体の体積比は  $\varphi : 1$
- 4、内接している大星型 1 2 面体と小星型 1 2 面体の表面積比は  $\varphi^2 : 1$

(大星型 1 2 面体の枠は正 1 2 面体です。大 1 2 面体と小星型 1 2 面体の枠は正 2 0 面体です。)

大20面体の体積 (辺長1の正20面体に内接している)



小星型12面体の体積から一溝全体の体積  $B \times 60$  ( $5 \times 12 = 60$ 本) を引いたものになる

$$\begin{aligned} \frac{5\varphi^{-2}}{2} - B \times 60 &= \frac{5\varphi^{-2}}{2} - \frac{\varphi^{-4}\sqrt{5}}{12 \times 5} \times 60 = \frac{5\varphi^{-2} - 2\varphi^{-4}(\varphi + \varphi^{-1})}{2} = \frac{5\varphi^{-2} - 2\varphi^{-3} - 2\varphi^{-5}}{2} = \frac{3\varphi^{-2} + 2\varphi^{-4} - 2\varphi^{-5}}{2} = \frac{3\varphi^{-2} + 2\varphi^{-6}}{2} \\ &= \frac{3(2-\varphi) + 2(13-8\varphi)}{2} = \frac{32-19\varphi}{2} = \frac{\varphi - 20\varphi + 32}{2} = \frac{\varphi}{2} - \frac{20\varphi - 32}{2} = \frac{\varphi}{2} - (10\varphi - 16) \approx \frac{1.618}{2} - (16.18 - 16) \approx 0.809 - 0.18 \approx 0.629 \\ &= \frac{32-19\varphi}{2} = \frac{32}{2} - \frac{19}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{64}{4} - \frac{19+19\sqrt{5}}{4} = \frac{45-19\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

五角錐の体積 (小星型12面体の角部分)  $\rightarrow \frac{\varphi^{-3}\sqrt{5}}{12}$

正五角形の面積比  $\rightarrow \varphi^2 k : 1$

一溝 (正五角形上面) の体積  $A \rightarrow A = \frac{\varphi^{-3}\sqrt{5}}{12} \div \varphi^2 k = \frac{\varphi^{-3}\sqrt{5}}{12\varphi^2 k} = \frac{\varphi^{-3}\sqrt{5}}{12\varphi^2 \cdot \varphi\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{-6}}{12}$

太黒線  $FS=w$  (正五角形の対角線中の正五角形より)  $\rightarrow w = \varphi^{-3}\sqrt{k}$

長方形OGHWは黄金長方形なので

$TS = \varphi^{-2} \quad FT = \varphi^{-3} \Rightarrow TG = FG - FT = \varphi^{-1} - \varphi^{-3} = \varphi^{-2} \Rightarrow TS = TG \therefore \angle TGS = 45^\circ$

星型五角錐の内溝辺長 (正五角形上面・青線)  $GS=y \rightarrow y = \varphi^{-2}\sqrt{2}$

星型五角錐の内溝辺長 (正五角形全面・青線+赤線)  $GR=x \curvearrowright$

$UR = UG \Rightarrow x^2 = (UR)^2 + (UG)^2 = 2(UR)^2 \Rightarrow x = UR \times \sqrt{2} \rightarrow (1)$

$1 : \varphi^2 = UR : (\varphi - UG) = UR : (\varphi - UR) \Rightarrow \frac{1}{\varphi^2} = \frac{UR}{\varphi - UR} \Rightarrow \varphi^2 \times UR = \varphi - UR \Rightarrow \varphi^2 \times UR + UR = \varphi \quad \perp$

$UR(\varphi^2 + 1) = \varphi \Rightarrow UR \cdot k = \varphi \Rightarrow UR = \varphi \cdot k^{-1} \rightarrow (2) \quad \rightarrow (2) \rightarrow (1) \quad x = \varphi \cdot k^{-1}\sqrt{2}$

一溝全体の体積  $B \rightarrow B = A \times \frac{x}{y} = A \times \frac{\varphi \cdot k^{-1}\sqrt{2}}{\varphi^{-2}\sqrt{2}} = \frac{\varphi^{-6}}{12} \times \varphi^3 \cdot k^{-1} = \frac{\varphi^{-3}}{12k} = \frac{\varphi^{-3}}{12\varphi\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{-4}\sqrt{5}}{12 \times 5}$

「17th International Conference on  
Fibonacci Numbers and Their Applications,  
at University of Caen, 6/27-7/2, 2016」

の報告



青木美穂 (島根大学大学院総合理工学研究科)



カーンは中世からの歴史を持ち、ノルマンディー公兼イングランド王ウィリアム1世の建てた城、修道院、教会などの歴史的建造物で知られる。1060年頃に建てられたカーン城は、西ヨーロッパでも最大級の中世城砦である。

第二次世界大戦の終盤、ノルマンディー上陸作戦の後、カーンは激戦地となり、街は聖堂と病院を残し灰燼に帰した。街の再建には14年間（1948年 - 1962年）が費やされた。（Wikipedia）

# International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications

とは？

The Fibonacci Association (1963年にフィボナッチ数と関連する数学に関する結果, 研究提案をするためにアルフレッド・ブルソーとバーナー・エミール・フォガットによって設立された団体, 詳細はHP <http://www.mathstat.dal.ca/fibonacci/> 参照) が1984年から2年に1回開催する国際研究集会.

- 2000: Luxembourg.
- 1998: Rochester, NY.
- 1996: Graz, Austria.
- 1994: Pullman, WA.
- 1992: St. Andrews, Scotland.
- 1990: Winston-Salem, NC.
- 1988: Pisa, Italy.
- 1986: San Jose, CA.
- 1984: Patras, Greece.
- 2016: Caen, France.
- 2014: Rochester, New York.
- 2012: Eger, Hungary,.
- 2010: Morelia, Mexico.
- 2008: Patras, Greece.
- 2006: San Francisco, CA.
- 2004: Braunschweig, Germany.
- 2002: Flagstaff, AZ.



**Caen Castle**



**Church of Saint-Pierre**



**Wine & Cheese  
Reception  
at the City Hall**

18th International Conference on  
Fibonacci Numbers and Their Applications

開催地:

Dalhousie University in Halifax, Canada, 2018

オーガナイザー: Karl Dilcher

次からのスライドは, Keith Johnson さんが  
17th International Conference on Fibonacci Numbers  
and Their Applications においてアナウンスに使用した  
ファイルで御本人に提供して頂きました.

# An Invitation ...



... to hold the 2018  
Fibonacci Conference at



# in Halifax, Nova Scotia, Canada







## Possible dates:

- Monday, July 2 to Friday, July 6;
- Monday, July 9 to Friday, July 13.
- Other dates may also be possible.
- In each case, as for past conferences:
  - Arrival day is Sunday; registration and welcoming reception late afternoon and/or early evening.
  - Departure day is Saturday, with optional full-day excursion that day.

# フィボナッチ数とリュカ数の概念の拡張 M 数列、N 数列

福島県立矢吹病院 宗像 修

2016 年 8 月 26 日 日本フィボナッチ協会 第 14 回研究集会

## M 数列, N 数列の定義

$q$  は  $q \equiv 1 \pmod{4}$  を満たす整数とする.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{q}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{q}}{2} \quad \text{とおき} \quad M_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{q}}, \quad N_n = \alpha^n + \beta^n$$

( $n$  は整数) と定義する.

## M 数列の漸化式

$$\begin{aligned} M_n + M_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{q}} \{(\alpha^n - \beta^n) + (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \{\alpha^n(1 + \alpha) - \beta^n(1 + \beta)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left\{ \alpha^n \left( \alpha^2 - \frac{q-5}{4} \right) - \beta^n \left( \beta^2 - \frac{q-5}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left\{ (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) - \frac{q-5}{4} (\alpha^n - \beta^n) \right\} \\ &= M_{n+2} - \frac{q-5}{4} M_n. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{q-1}{4} M_n + M_{n+1} = M_{n+2}.$$

## N 数列の漸化式

$$\begin{aligned} N_n + N_{n+1} &= (\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \alpha^n(1 + \alpha) + \beta^n(1 + \beta) \\ &= \alpha^n \left( \alpha^2 - \frac{q-5}{4} \right) + \beta^n \left( \beta^2 - \frac{q-5}{4} \right) \\ &= (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) - \frac{q-5}{4} (\alpha^n + \beta^n) \\ &= N_{n+2} - \frac{q-5}{4} N_n. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{q-1}{4}N_n + N_{n+1} = N_{n+2}.$$

$M$  数列

$$M_0 = 0,$$

$$M_1 = 1,$$

$$M_2 = 1,$$

$$M_3 = \frac{3+q}{4},$$

$$M_4 = \frac{1+q}{2},$$

$$M_5 = \frac{5+10q+q^2}{16},$$

$$M_6 = \frac{3+10q+3q^2}{16},$$

$$M_7 = \frac{7+35q+21q^2+q^3}{64},$$

· ·  
· ·

$N$  数列

$$N_0 = 2,$$

$$N_1 = 1,$$

$$N_2 = \frac{1+q}{2},$$

$$N_3 = \frac{1+3q}{4},$$

$$N_4 = \frac{1+6q+q^2}{8},$$

$$N_5 = \frac{1+10q+5q^2}{16},$$

$$N_6 = \frac{1+15q+15q^2+q^3}{32},$$

$$N_7 = \frac{1+21q+35q^2+7q^3}{64},$$

· ·  
· ·

### **M 数列, N 数列の定理**

以下  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{q}}{2}$ ,  $\beta = \frac{1 - \sqrt{q}}{2}$ ,  $\frac{q-1}{4} = r$  とする.

定理 1  $M$  数の加法定理

$$M_{m+n} = M_m M_{n+1} + r M_{m-1} M_n.$$

定理 2 負の添数

$$M_{-n} = (-r)^{n+1} M_n.$$

定理 3

$$(a) \quad M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = \frac{1}{r}(M_{n+2} - 1),$$

$$(b) \quad M_1 - M_2 + M_3 - \cdots + (-1)^{n-1} M_n = (-1)^n \left( \frac{r-1}{2-r} \right) M_n + (-1)^{n-1} \left( \frac{r}{2-r} \right) M_{n-1} + \frac{1}{2-r}.$$

証明 (a)

$$rM_1 = M_3 - M_2,$$

$$rM_2 = M_4 - M_3,$$

$$rM_3 = M_5 - M_4,$$

· · ·

· · ·

· · ·

$$rM_n = M_{n+2} - M_{n+1}.$$

これらを辺々加え合わせると, 右辺は相殺しあって

$$r(M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n) = M_{n+2} - M_2,$$

$$M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = \frac{1}{r}(M_{n+2} - 1).$$

(b)  $S_n = M_1 - M_2 + M_3 - \cdots + (-1)^{n-1}M_n$  とおく.

$$M_{n+2} = M_n + M_{n+1} + (r-1)M_n,$$

$$\begin{aligned} S_n &= M_1 - M_2 + M_3 - \cdots + (-1)^{n-1}M_n, \\ &= M_1 - \{M_0 + M_1 + (r-1)M_0\} + \{M_1 + M_2 + (r-1)M_1\} - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1}\{M_{n-2} + M_{n-1} + (r-1)M_{n-2}\} \\ &= M_1 + (-1)^{n-1}M_{n-1} + (r-1)\{M_1 - M_2 + M_3 - \cdots + (-1)^{n-1}M_{n-2}\} \\ &= 1 + (-1)^{n-1}M_{n-1} + (r-1)\{S_n - (-1)^{n-2}M_{n-1} - (-1)^{n-1}M_n\}, \end{aligned}$$

$$(2-r)S_n = (-1)^n(r-1)M_n + (-1)^{n-1} \cdot rM_{n-1} + 1$$

$$S_n = (-1)^n \left( \frac{r-1}{2-r} \right) M_n + (-1)^{n-1} \left( \frac{r}{2-r} \right) M_{n-1} + \frac{1}{2-r}. \square$$

系 1

$$(a) \quad M_1 + M_3 + M_5 + \cdots + M_{2n-1} = \left( \frac{1}{2r} \right) M_{2n+2} + \frac{r-1}{2(2-r)} M_{2n} - \frac{r}{2(2-r)} M_{2n-1} + \frac{r-1}{r(2-r)},$$

$$(b) \quad M_2 + M_4 + M_6 + \cdots + M_{2n} = \left( \frac{1}{2r} \right) M_{2n+2} - \frac{r-1}{2(2-r)} M_{2n} + \frac{r}{2(2-r)} M_{2n-1} - \frac{1}{r(2-r)}.$$

定理 4  $M$  数のカッシーニ・シムソンの定理

$$M_{n-k}M_{n+k} - M_n^2 = -(-r)^{n-k}M_k^2.$$

定理 5  $N$  数の加法定理

$$N_{m+n} = M_m N_{n+1} + rM_{m-1}N_n.$$

定理 6

$$(a) \quad N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n = \frac{1}{r} \left( N_{n+2} - \frac{1+q}{2} \right) = \frac{1}{r} (N_{n+2} - 2r - 1),$$

$$(b) \quad N_1 - N_2 + N_3 - \cdots + (-1)^{n-1}N_n = (-1)^n \left( \frac{r-1}{2-r} \right) N_n + (-1)^{n-1} \left( \frac{r}{2-r} \right) N_{n-1} + \frac{1-2r}{2-r}.$$

系 2

$$\begin{aligned}
 (a) \quad N_1 + N_3 + N_5 + \cdots + N_{2n-1} &= \left( \frac{1}{2r} \right) N_{2n+2} + \frac{r-1}{2(2-r)} N_{2n} \\
 &\quad - \frac{r}{2(2-r)} N_{2n-1} - \frac{r+1}{r(2-r)}, \\
 (b) \quad N_2 + N_4 + N_6 + \cdots + N_{2n} &= \left( \frac{1}{2r} \right) N_{2n+2} - \frac{r-1}{2(2-r)} N_{2n} \\
 &\quad + \frac{r}{2(2-r)} N_{2n-1} + \frac{2r^2 - 2r - 1}{r(2-r)}.
 \end{aligned}$$

定理 7  $N$  数のカッシーニ・シムソンの定理

$$N_{n-k}N_{n+k} - N_n^2 = (-r)^{n-k} \cdot qM_k^2.$$

定理 8

$$\begin{aligned}
 (a) \quad rM_{n-1} + M_{n+1} &= N_n, \\
 (b) \quad rN_{n-1} + N_{n+1} &= qM_n.
 \end{aligned}$$

定理 9

$$\begin{aligned}
 (a) \quad M_n^2 &= \frac{1}{q}N_{2n} - \frac{2}{q}(-r)^n, \\
 (b) \quad N_n^2 &= qM_n^2 + 4(-r)^n, \\
 (c) \quad M_nN_n &= M_{2n}, \\
 (d) \quad N_n^2 &= N_{2n} + 2(-r)^n, \\
 (e) \quad M_nN_{n+1} &= M_{2n+1} - (-r)^n, \\
 (f) \quad M_{n+1}N_n &= M_{2n+1} + (-r)^n, \\
 (g) \quad N_nN_{n+1} &= N_{2n+1} + (-r)^n.
 \end{aligned}$$

定理 10

$$\begin{aligned}
 (a) \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots + M_n^2 &= \frac{1}{2qr}N_{2n+2} - \frac{r-1}{2q(2-r)}N_{2n} + \frac{r}{2q(2-r)}N_{2n-1} \\
 &\quad + \frac{2r^2 - 2r - 1}{qr(2-r)} - \frac{2r}{q(r+1)} \left\{ (-r)^n - 1 \right\}, \\
 (b) \quad N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + \cdots + N_n^2 &= \frac{1}{2r}N_{2n+2} - \frac{r-1}{2(2-r)}N_{2n} + \frac{r}{2(2-r)}N_{2n-1} \\
 &\quad + \frac{2r^2 - 2r - 1}{r(2-r)} + \frac{2r}{(r+1)} \left\{ (-r)^n - 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

証明 (a) 定理 9(a) より

$$\sum_{k=1}^n M_k^2 = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n N_{2k} - \frac{2}{q} \sum_{k=1}^n (-r)^k$$

系 2(b) より

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2qr} N_{2n+2} - \frac{r-1}{2q(2-r)} N_{2n} + \frac{r}{2q(2-r)} N_{2n-1} \\ &+ \frac{2r^2 - 2r - 1}{qr(2-r)} - \frac{2}{q} \left\{ \frac{(-r)^{n+1} - (-r)}{(-r) - 1} \right\} \\ &= \frac{1}{2qr} N_{2n+2} - \frac{r-1}{2q(2-r)} N_{2n} + \frac{r}{2q(2-r)} N_{2n-1} \\ &+ \frac{2r^2 - 2r - 1}{qr(2-r)} - \frac{2r}{q(r+1)} \left\{ (-r)^n - 1 \right\}. \square \end{aligned}$$

定理 10(a) において  $q = 5, r = 1$  とすると

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots + M_n^2 = \frac{1}{10} N_{2n+2} + \frac{1}{10} N_{2n-1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left\{ (-1)^n - 1 \right\}$$

$N$  はリュカ数となり

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} (L_{2n+2} + L_{2n-1}) - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left\{ (-1)^n - 1 \right\}, \\ &= \frac{1}{5} L_{2n+1} - \frac{1}{5} (-1)^n. \end{aligned}$$

公式

$$\begin{aligned} A \quad &L_{2n+1} = L_n L_{n+1} + (-1)^{n-1}, \\ B \quad &2L_{2n+1} = L_{n+(n+1)} = L_n L_{n+1} + 5F_n F_{n+1} \end{aligned}$$

から

$$B - A = L_{2n+1} = 5F_n F_{n+1} - (-1)^{n-1}$$

したがって

$$F_n F_{n+1} = \frac{1}{5} L_{2n+1} - \frac{1}{5} (-1)^n,$$

となり定理 10(a) は  $q = 5$  のときフィボナッチ数の公式に一致する.

定理 11

- (a)  $M_m N_n + M_n N_m = 2M_{m+n},$
- (b)  $M_m N_n - M_m N_n = 2(-r)^n M_{m-n},$
- (c)  $N_m N_n + qM_m M_n = 2N_{m+n},$
- (d)  $N_m N_n - qM_m M_n = 2(-r)^n N_{m-n}.$

定理 12

$$N_m N_{n+1} + rN_{m-1} N_n = qM_{m+n}$$

系 3

- (a)  $M_{m+n} + (-r)^n M_{m-n} = M_m N_n,$
- (b)  $M_{m+n} - (-r)^n M_{m-n} = M_n N_m,$
- (c)  $N_{m+n} + (-r)^n N_{m-n} = N_m N_n,$
- (d)  $N_{m+n} - (-r)^n N_{m-n} = qM_m M_n.$

定理 13

- (a)  $(M_n, M_{n+1}) = 1,$
- (b)  $(N_n, N_{n+1}) = 1.$

## まとめ

M 数列、N 数列はそれぞれフィボナッチ数列、リュカ数列を内包する。

# RECIPROCAL SUMS OF SEQUENCES INVOLVING BALANCING AND LUCAS-BALANCING NUMBERS

TAKAO KOMATSU

ABSTRACT. Many authors studied bounds for reciprocal sums involving terms from Fibonacci and other related sequences. The purpose of this paper is to provide bounds for reciprocal sums with terms from balancing and Lucas-balancing numbers.

**Key words:** Balancing and Lucas balancing numbers, recurrence relation, Binet form.  
**2010 Subject classification [A.M.S.]:** 11B39, 11B83.

## 1. INTRODUCTION

A positive integer  $x$  is called balancing number if

$$1 + 2 + \cdots + (x - 1) = (x + 1) + \cdots + (y - 1)$$

holds for some integer  $y \geq x + 2$ . The problem of determining all balancing numbers leads to the Pell equation  $y^2 - 8x^2 = 1$ , whose solutions in  $x$  can be described by the recurrence  $B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) with  $B_0 = 0$  and  $B_1 = 1$  (see e.g. [1, 2, 12]). Balancing numbers have been extensively studied by many authors. Karaatli et. al [11] expressed the positive integral solutions of a Diophantine equation in terms of balancing numbers. Liptai [8] proved that there is no Fibonacci balancing number except 1. In [13] the period, rank and order of the sequence of balancing numbers are studied. One of the most general extensions of the defining equation of balancing numbers is the Diophantine equation

$$1^k + 2^k + \cdots + (x - 1)^k = (x + 1)^l + \cdots + (y - 1)^l,$$

where the exponents  $k$  and  $l$  are given positive integers. In [9] effective and non-effective finiteness theorems for the above equation are proved. In [6] a balancing problem of ordinary binomial coefficients is studied, and effective and non-effective finiteness theorems are given.

Further,  $C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$  is called the  $n^{\text{th}}$  Lucas-balancing number [12], and these numbers satisfy the recurrence relation  $C_n = 6C_{n-1} - C_{n-2}$  with initial values  $C_0 = 1, C_1 = 3$ . The Binet forms for  $B_n$  and  $C_n$  are respectively

$$B_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{4\sqrt{2}}, \quad C_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$$

where  $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$  and  $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$ . The balancing and Lucas-balancing numbers satisfy the identities

$$B_{n-r}B_{n+r} = B_n^2 - B_r^2, \quad C_{n-r}C_{n+r} = C_n^2 + C_r^2 - 1$$

for  $n \geq r$  respectively. In particular, for  $n \geq 1$  we have

$$B_{n-1}B_{n+1} = B_n^2 - 1 \quad \text{and} \quad C_{n-1}C_{n+1} = C_n^2 + 8.$$

The identity

$$B_1 + B_3 + \cdots + B_{2n-1} = B_n^2$$

gives

$$B_{2n-1} = B_n^2 - B_{n-1}^2.$$

The proofs of the above identities are available in [14]. In the subsequent sections, we shall use the above identities without further reference.

The intention of this paper is to develop certain interesting bounds for reciprocal sums with terms involving balancing and Lucas-balancing numbers in some combinations.

The reciprocal of partial infinite sums of reciprocal Fibonacci numbers has been extensively studied by many authors (e.g., see [4, 5, 7, 10, 15]). In [3], the following identities are shown for generalized Fibonacci numbers  $G_n$ , defined by

$$G_n = aG_{n-1} + G_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad G_0 = 0, \quad G_1 = 1,$$

where  $a$  is a positive integer. If  $a = 1$ , then  $G_n$ 's equal the Fibonacci numbers. Throughout this paper, integer part of a number is denoted by  $[\cdot]$ .

**Proposition 1.1.**

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} G_n - G_{n-1} & \text{if } n \text{ is even and } n \geq 2; \\ G_n - G_{n-1} - 1 & \text{if } n \text{ is odd and } n \geq 1. \end{cases} \\
(2) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} aG_{n-1}G_n - 1 & \text{if } n \text{ is even and } n \geq 2; \\ aG_{n-1}G_n & \text{if } n \text{ is odd and } n \geq 1. \end{cases} \\
(3) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k}} \right)^{-1} \right] = G_{2n} - G_{2n-2} - 1 \quad (n \geq 1) \\
(4) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}} \right)^{-1} \right] = G_{2n-1} - G_{2n-3} \quad (n \geq 2) \\
(5) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}G_{2k+1}} \right)^{-1} \right] = G_{4n-1} - G_{4n-3} \quad (n \geq 1) \\
(6) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k}G_{2k+2}} \right)^{-1} \right] = G_{4n+1} - G_{4n-1} - 1 \quad (n \geq 1) \\
(7) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k}^2} \right)^{-1} \right] = G_{4n-1} - G_{4n-3} - 1 \quad (n \geq 1) \\
(8) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}^2} \right)^{-1} \right] = G_{4n-3} - G_{4n-5} \quad (n \geq 2) \\
(9) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}G_{2k}} \right)^{-1} \right] = G_{4n-2} - G_{4n-4} \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

In this paper, we shall show some analogous results for the sequences of balancing and Luca-balancing numbers.

**Proposition 1.2.**

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_k} \right)^{-1} \right] = B_n - B_{n-1} - 1 \quad (n \geq 1) \\
(2) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_k^2} \right)^{-1} \right] = B_n^2 - B_{n-1}^2 - 1 = B_{2n-1} - 1 \quad (n \geq 1) \\
(3) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_k B_{k+1}} \right)^{-1} \right] = B_n B_{n+1} - B_{n-1} B_n - 1 \quad (n \geq 1) \\
(4) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_k} \right)^{-1} \right] = C_n - C_{n-1} \quad (n \geq 2) \\
(5) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_k^2} \right)^{-1} \right] = C_n^2 - C_{n-1}^2 \quad (n \geq 1) \\
(6) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_k C_{k+1}} \right)^{-1} \right] = C_n C_{n+1} - C_{n-1} C_n + 1 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

## 2. RECIPROCAL SUMS INVOLVING BALANCING NUMBERS

In this section we will establish bounds for several reciprocal sums involving balancing numbers. By using the bounds, we obtain the results in Proposition 1.2 (1), (2) and (3).

The following theorem gives sharp bounds for reciprocal sums of balancing numbers.

**Theorem 2.1.** *For any positive integer  $n$ ,*

$$\frac{1}{B_n - B_{n-1}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_k} < \frac{1}{B_n - B_{n-1} - 1}.$$

The following theorem provides sharp bounds for the reciprocal sum of squares of balancing numbers.

**Theorem 2.2.** *For any positive integer  $n$ ,*

$$\frac{1}{B_{2n-1}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_k^2} < \frac{1}{B_{2n-1} - 1}.$$

The reciprocal sum of products of two consecutive balancing numbers has analogous bounds. The following theorem is important in this regard.

**Theorem 2.3.** *For any positive integer  $n$ ,*

$$\frac{1}{B_n B_{n+1} - B_{n-1} B_n} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_k B_{k+1}} < \frac{1}{B_n B_{n+1} - B_{n-1} B_n - 1}.$$

The following theorem can be proved in a similar fashion. However, the bounds are not as sharp as those in the previous theorems.

**Theorem 2.4.** For positive integers  $n$  and  $r \geq 3$ ,

$$\frac{1}{B_n^r - B_{n-1}^r} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_k^r} < \frac{1}{B_n^r - (B_{n-1} - 1)^r}.$$

### 3. RECIPROCAL SUMS INVOLVING LUCAS-BALANCING NUMBERS

In this section, we shall establish certain bounds for the reciprocal sums involving Lucas-balancing numbers. By using these bounds, we obtain the results in Proposition 1.2 (4), (5) and (6).

The following theorem provides sharp bounds for reciprocal sums of the Lucas-balancing numbers.

**Theorem 3.1.** For any positive integer  $n \geq 2$ ,

$$\frac{1}{C_n - C_{n-1} + 1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_k} < \frac{1}{C_n - C_{n-1}}.$$

The following theorem provides sharp bounds for the reciprocal sum of squares of Lucas-balancing numbers.

**Theorem 3.2.** For any positive integer  $n$ ,

$$\frac{1}{C_n^2 - C_{n-1}^2 + 1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_k^2} < \frac{1}{C_n^2 - C_{n-1}^2}$$

The reciprocal sum of products of two consecutive Lucas-balancing numbers has analogous bounds. The following theorem is important in this regard.

**Theorem 3.3.** For any positive integer  $n$ ,

$$\frac{1}{C_n C_{n+1} - C_{n-1} C_n + 2} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_k C_{k+1}} < \frac{1}{C_n C_{n+1} - C_{n-1} C_n + 1}.$$

The following theorem can be proved in a similar fashion. However, the bounds are not so sharp as compared to those in the previous theorems.

**Theorem 3.4.** For positive integers  $n$  and  $r \geq 3$

$$\frac{1}{C_n^r - (C_{n-1} - 1)^r} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_k^r} < \frac{1}{C_n^r - C_{n-1}^r}.$$

### 4. SOME MORE RESULTS

Using the techniques of last two sections, one can establish the following results for balancing and Lucas-balancing numbers.

**Proposition 4.1.**

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_{2k}} \right)^{-1} \right] = B_{2n} - B_{2n-2} - 1 \quad (n \geq 1) \\
 (2) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_{2k-1}} \right)^{-1} \right] = B_{2n-1} - B_{2n-3} - 1 \quad (n \geq 2) \\
 (3) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_{2k-1}B_{2k+1}} \right)^{-1} \right] = B_{2n}^2 - B_{2n-2}^2 - 2 \quad (n \geq 1) \\
 (4) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_{2k}B_{2k+2}} \right)^{-1} \right] = B_{2n+1}^2 - B_{2n-1}^2 - 2 \quad (n \geq 1) \\
 (5) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_{2k}^2} \right)^{-1} \right] = B_{2n}^2 - B_{2n-2}^2 - 1 \quad (n \geq 1) \\
 (6) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_{2k-1}^2} \right)^{-1} \right] = B_{2n-1}^2 - B_{2n-3}^2 - 1 \quad (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.**

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_{2k}} \right)^{-1} \right] = C_{2n} - C_{2n-2} \quad (n \geq 1) \\
 (2) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_{2k-1}} \right)^{-1} \right] = C_{2n-1} - C_{2n-3} \quad (n \geq 2) \\
 (3) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_{2k-1}C_{2k+1}} \right)^{-1} \right] = C_{2n}^2 - C_{2n-2}^2 + 8 \quad (n \geq 1) \\
 (4) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_{2k}C_{2k+2}} \right)^{-1} \right] = C_{2n+1}^2 - C_{2n-1}^2 + 8 \quad (n \geq 1) \\
 (5) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_{2k}^2} \right)^{-1} \right] = C_{2n}^2 - C_{2n-2}^2 \quad (n \geq 1) \\
 (6) \quad & \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_{2k-1}^2} \right)^{-1} \right] = C_{2n-1}^2 - C_{2n-3}^2 \quad (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

5. RECIPROCAL SUMS OF BALANCING NUMBERS

We shall show several results about alternating sums of reciprocal balancing numbers  $B_n$  and Luca-balancing numbers  $C_n$ .

**Theorem 5.1.** *Let  $l$  be a fixed positive number. Then for  $n \geq 1$  we have*

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{B_{lk}} \right)^{-1} \right] = B_{ln} - B_{l(n-1)} - 1, \quad (5.1)$$

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{C_{lk}} \right)^{-1} \right] = C_{ln} - C_{l(n-1)}. \quad (5.2)$$

**Theorem 5.2.**

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_k} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_n + B_{n-1} & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_n + B_{n-1} + 1) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

**Theorem 5.3.**

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_k^2} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_n^2 + B_{n-1}^2 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_n^2 + B_{n-1}^2 + 1) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

**Theorem 5.4.**

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_{2k}} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_{2n} + B_{2n-2} & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_{2n} + B_{2n-2} + 1) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

The following odd case can be proven similarly, so the proof is omitted.

**Theorem 5.5.**

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_{2k+1}} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_{2n+1} + B_{2n-1} & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_{2n+1} + B_{2n-1} + 1) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

If two consecutive balancing numbers appear, we have the following result.

**Theorem 5.6.**

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_k B_{k+1}} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_n B_{n+1} + B_{n-1} B_n & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_n B_{n+1} + B_{n-1} B_n + 1) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

Similarly, we can have the following results.

**Theorem 5.7.**

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_{2k}^2} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_{2n}^2 + B_{2n-2}^2 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_{2n}^2 + B_{2n-2}^2 + 1) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_{2k-1}^2} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_{2n-1}^2 + B_{2n-3}^2 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_{2n-1}^2 + B_{2n-3}^2 + 1) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_{2k-1} B_{2k+1}} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_{2n}^2 + B_{2n-2}^2 - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_{2n}^2 + B_{2n-2}^2) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

$$\left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{B_{2k} B_{2k+2}} \right)^{-1} \right] = \begin{cases} B_{2n+1}^2 + B_{2n-1}^2 - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(B_{2n+1}^2 + B_{2n-1}^2) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

For Lucas-balancing numbers  $C_n$  we have the following corresponding results. Notice that  $C_n$  satisfies the recurrence relation  $C_n = 6C_{n-1} - C_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) with  $C_0 = 1$  and  $C_1 = 3$ .

**Theorem 5.8.**

$$\begin{aligned} \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_k} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_n + C_{n-1} - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_n + C_{n-1}) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_k^2} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_n^2 + C_{n-1}^2 - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_n^2 + C_{n-1}^2) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_{2k}} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_{2n} + C_{2n-2} - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_{2n} + C_{2n-2}) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_{2k+1}} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_{2n+1} + C_{2n-1} - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_{2n+1} + C_{2n-1}) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_k C_{k+1}} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_n C_{n+1} + C_{n-1} C_n - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_n C_{n+1} + C_{n-1} C_n) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_{2k}^2} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_{2n}^2 + C_{2n-2}^2 - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_{2n}^2 + C_{2n-2}^2) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_{2k-1}^2} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_{2n-1}^2 + C_{2n-3}^2 - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_{2n-1}^2 + C_{2n-3}^2) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_{2k-1} C_{2k+1}} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_{2n}^2 + C_{2n-2}^2 - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_{2n}^2 + C_{2n-2}^2) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \\ \left[ \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{C_{2k} C_{2k+2}} \right)^{-1} \right] &= \begin{cases} C_{2n+1}^2 + C_{2n-1}^2 - 1 & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(C_{2n+1}^2 + C_{2n-1}^2) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \end{aligned}$$

#### REFERENCES

- [1] A. Behera and G. K. Panda, *On the square roots of triangular numbers*, Fibonacci Quart. **37** (1999) 98–105.
- [2] R. Finkelstein, *The house problem*, Amer. Math. Monthly **72** (1965) 1082–1088.
- [3] S. H. Holliday and T. Komatsu, *On the sum of reciprocal generalized Fibonacci numbers*, Integers **11** (2011) 441–455.
- [4] T. Komatsu and V. Laohakosol, *On the sum of reciprocals of numbers satisfying a recurrence relation of order  $s$* , J. Integer Seq. **13** (2010), Article 10.5.8 (9 pages).
- [5] T. Komatsu, *On the nearest integer of the sum of reciprocal Fibonacci numbers*, Aportaciones Matematicas Investigacion, **20** (2011), 171–184.
- [6] T. Komatsu and L. Szalay, *Balancing with binomial coefficients*, Intern. J. Number Theory **10** (2014), 1729–1742.

- [7] K. Kuhapatanakul, *On the sums of reciprocal generalized Fibonacci numbers*, J. Integer Seq. **16** (2013), Article 13.7.1 (8 pages).
- [8] K. Liptai, *Fibonacci Balancing numbers*, Fibonacci Quart. **42** (2004), 330–340.
- [9] K. Liptai, F. Luca, Á. Pintér and L. Szalay, *Generalized balancing numbers*, Indag. Math. (N.S.) **20** (2009) 87–100.
- [10] H. Ohtsuka and S. Nakamura, *On the sum of reciprocal Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. **46/47** (2008/2009), 153–159.
- [11] O. Karaatli, R. Keskin and H. Zhu, *Infinitely many positive integer solutions of the quadratic Diophantine equation  $x^2 - 8B_nxy - 2y^2 = \pm 2r$* , Ir. Math. Soc. Bull. **73** (2014), 29–45.
- [12] G. K. Panda, *Some fascinating properties of balancing numbers*, In Proc. of Eleventh Internat. Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, Cong. Numerantium **194** (2009), 185–189.
- [13] B. K. Patel and P. K. Ray, *The period, rank and order of the sequence of balancing numbers modulo  $m$* , Math. Rep. (Bucur.) **18**, No.3 (2016), Article No.9.
- [14] P. K. Ray, *Balancing and cobalancing numbers*, Ph.D. Thesis, National Institute of Technology, Rourkela, (2009).
- [15] G. J. Zhang, *The infinite sum of reciprocal of Fibonacci numbers*, J. Math. Res. Expo. **31** (2011), 1030–1034.

SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS, WUHAN UNIVERSITY, WUHAN 430072 CHINA  
*E-mail address:* komatsu@whu.edu.cn

# abenacci 数と abelucas 数

渋川元樹

阪大情報

日本フィボナッチ協会第 14 回研究集会  
東京理科大学神楽坂キャンパス  
2676/08/26

古典的な Fibonacci 数  $F_n$  は, 初期値を  $F_0 = 0, F_1 = 1$  とする漸化式

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

で定義される.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

同様に Lucas 数  $L_n$  は, 同じ漸化式  $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$  を満たす初期値  $L_0 = 2, L_1 = 1$  を満たす数列として定まる.

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, ...

これらの数列に関しては、非常に多くの性質が知られている。  
(当たり前のように大事な) 正值単調非減少整数列

$$F_n, L_n \in \mathbb{Z}, F_{n+1} \geq F_n > 0, L_{n+1} \geq L_n > 0 \quad (n > 0). \quad (1)$$

de Moivre-Binet の公式

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, \quad L_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (2)$$

母関数

$$\frac{1}{1 - t - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^n, \quad \frac{1 + 2t}{1 - t - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n. \quad (3)$$

比の極限 (黄金比との関連)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+m}}{F_n} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+m}}{L_n} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m. \quad (4)$$

Cassini の公式 任意の自然数  $n$  に対し,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}. \quad (5)$$

相互関係式

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n, \quad L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n. \quad (6)$$

加法公式

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \quad L_{m+n} = F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1}. \quad (7)$$

整除性  $p$  を素数とする.  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  のとき,

$$F_{n+p-1} \equiv F_n \pmod{p}, \quad L_{n+p-1} \equiv L_n \pmod{p}. \quad (8)$$

$p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  のとき,

$$F_{n+p+1} \equiv -F_n \pmod{p}, \quad L_{n+p+1} \equiv -L_n \pmod{p}. \quad (9)$$

既にこれまでも様々な Fibonacci 数の類似, 拡張, 一般化は考えられている.

例 1 : 一般 Fibonacci 数 or 一般 Lucas 数 初期値を一般にする (一般 Fibonacci 数?) . 漸化式も

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \implies f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$$

とする (一般 Lucas 数?) .

例 2 : Fibonacci 多項式 de Moivre-Binet の公式からの一般化.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{x}}{2} \right)^n \right\}$$

例 3 : tribonacci 数 (高階化) 漸化式の項数を増やす.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \implies T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$$

## 従来の Fibonacci 数の一般化の不満な点

### (1) 上述した諸公式が部分的にしか保たれない点

「よい類似」, 「よい一般化」ならば通常の Fibonacci 数に関して成り立つ諸公式の類似がなるべくたくさん成り立ってほしい.



むしろ逆に通常の Fibonacci 数の諸公式の類似がたくさん成り立てば成り立つほど, 「よい類似」, 「よい一般化」.

### (2) 上述した諸公式が成立する数学的背景が明らかにならない点

公式の証明のカラクリや背景がわからないこと. 更にいえば, 何らかの理論的文脈や面白い topics と関連する一般化が欲しい.

今回, この問題点を (かなり) クリアすると思われる Fibonacci 数 (及び Lucas 数) の一般化を与え, その諸性質を与えることができた. 今日はその一部を簡単に話したい.

以下, 例として, 高階化の良く知られた例 (3 階の漸化式で定まる数列) である tribonacci 数

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 1,$$

を中心に話すことにする.

この拡張の最大の問題点は**整除性 (整数論的性質)** が成り立たないこと (何故か?) .



原因は定義漸化式の特性多項式  $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  が abelian ではないから (可換類体論の範疇の外だから) .

2 次多項式は全て abelian なので, 2 階までの漸化式を考えている段階ではわからなかった問題点.

特性多項式が abelian になるように修正すればよい？

そこでもう一度通常の Fibonacci, Lucas 数を思い出してみる.

まず

$$-2 \cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad -2 \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

に注意しよう.

またここで 2 変数の  $n$  次完全対称式  $h_n(X, Y)$  と  $n$  次ベキ和対称式  $p_n(X, Y)$  を考える.

$$\begin{aligned} h_n(X, Y) &:= X^n + X^{n-1}Y + X^{n-2}Y^2 + \cdots + X^2Y^{n-2} + XY^{n-1} + Y^n \\ &\left( = \frac{X^{n+1} - Y^{n+1}}{X - Y} \right), \end{aligned}$$

$$p_n(X, Y) := X^n + Y^n,$$

おまけ (2 変数の基本対称式) :  $e_1(X, Y) = X + Y$ ,  $e_2(X, Y) = XY$ .

これら三種類の対称式は, 対称関数論において非常に基本的かつ中心的役割を果たす.

よって de Moivre-Binet の公式より, Fibonacci, Lucas 数は 2 変数の  $n$  次完全対称式  $h_n(X, Y)$  と  $n$  次ベキ和対称式  $p_n(X, Y)$  を用いると,

$$F_{n+1} = h_n \left( -2 \cos \left( \frac{4}{5} \pi \right), -2 \cos \left( \frac{2}{5} \pi \right) \right),$$
$$L_n = p_n \left( -2 \cos \left( \frac{4}{5} \pi \right), -2 \cos \left( \frac{2}{5} \pi \right) \right),$$

と書ける.  
つまり,

Fibonacci 数  $\implies$  完全対称多項式の特特殊値,

Lucas 数  $\implies$  ベキ和対称多項式の特特殊値,

とみなせる.

但し, ここでいう特特殊値とは各々の対称多項式にある abelian な多項式の根を代入した値を指すものとする.

## abenacci 数と abelucas 数

実はこれだけでは弱い (Stirling 数等の別の有名な数列も Fibonacci 数になってしまう) ので,

- $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  の最小分解体の  $\mathbb{Q}$  上の拡大次数は 2 以上,
- 完全対称多項式の特殊値 (Fibonacci) は正值単調非減少整数列,  
という条件を課そう.

これらの条件と円分体の数論 ( $\mathbb{Q}$  上の類体論的事実) を踏まえた上で,  $r$  変数  $n$  次完全対称多項式

$$h_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq r} x_{i_1} \cdots x_{i_n} = \sum_{v_1 + \dots + v_r = n} x_1^{v_1} \cdots x_r^{v_r}$$

とベキ和対称多項式

$$p_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^r x_i^n$$

を用いて, 次のような Fibonacci 数の拡張を考えるのは自然であろう.

# abenacci 数と abelucas 数

## Definition 1

$\mathbb{Q}$  係数の  $r$  次多項式  $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r) \in \mathbb{Q}[x]$  について,

- $\deg(\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)/\mathbb{Q}) \geq 2$ ,
- $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)/\mathbb{Q})$  は Abel 群,

が成り立つとする. ここで

$$F_{n+1}^{(r)}(f) := h_n(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \quad L_n^{(r)}(f) := p_n(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

とおき,

$$F_n^{(r)}(f) \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq F_n^{(r)}(f) \leq F_{n+1}^{(r)}(f) \quad (n \geq 1)$$

が成り立つとき,  $F_{n+1}^{(r)}(f), L_n^{(r)}(f)$  をそれぞれ ( $f$  に付随する) **abenacci 数** と **abelucas 数** と呼ぶことにする.

## cosine abenacci 数と cosine abelucas 数

特に typical example として

$$f(x) = \left(x + 2 \cos\left(\frac{2\pi r}{2r+1}\right)\right) \cdots \left(x + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{2r+1}\right)\right)$$

としたとき,

$$F_{n+1}^{(r)} := h_n \left(-2 \cos\left(\frac{2\pi r}{2r+1}\right), \dots, -2 \cos\left(\frac{2\pi}{2r+1}\right)\right),$$

$$L_n^{(r)} := p_n \left(-2 \cos\left(\frac{2\pi r}{2r+1}\right), \dots, -2 \cos\left(\frac{2\pi}{2r+1}\right)\right),$$

とする (こうすると正值や単調性は自明ではなくなる!!) .

これを cosine abenacci 数と cosine abelucas 数と呼ぶことにする.

$F_{n+1}^{(2)} = F_{n+1}, L_n^{(2)} = L_n$  となっていることに注意.

### Theorem 1

cosine abenacci 数と cosine abelucas 数  $F_{n+1}^{(r)}, L_n^{(r)}$  は abenacci 数と abelucas 数である (i.e.  $\{F_{n+1}^{(r)}\}_{n \geq 0}$  は正值単調非減少数列).

この段階ではただ定義しただけだが、既にこの時点でこれは Fibonacci, Lucas 数の非常に良い拡張, 面白い一般化であることが (経験的に) 期待される.

### (1) 対称函数の一般論と円分体の理論 (数論) が使える点

上述した三種の対称多項式は, 非常に有名で, 非常に多くの公式が知られている. よって漸化式 (特に定義より特性多項式が abelian になる) 等の基本的諸性質が対称函数の一般論から従うことが, また整除性等の数論的性質は円分体の数論から従うことが期待される (そして実際にそうである).

つまり通常の Fibonacci, Lucas 数についての諸公式のカラクリの多くはこの二つの理論に由来する.

### (2) 更なる一般化も容易に行える点

完全対称式は一行型の Schur 函数であることに注意して, これをより一般の特殊対称函数 (一行型の Jack, Hall-Littlewood, Macodonald, Koornwinder, etc.) に置き換えたいくなる?

我々は Fibonacci 数から出発したが、一般化を突き詰めた結果

(完全) 対称式に Abel 方程式の根を代入した特殊値の研究

という問題に辿り着いた。

これはとても魅惑的な響きのするテーマである。

- Abel 方程式の根の基本対称式（係数）に関する研究はある（Kronecker 合同関係式等）。しかし、完全対称式やベキ和対称式を絡めた対称関数論と円分体の数論（あるいは類体論）の二つが関連する研究というのは、これまで恐らく皆無であった？ これらも数論的に重要な量である可能性が十分にあると考えられる。
- 一方で古典的な Fibonacci, Lucas 数については非常に多くの研究がなされてきた。ゆえに我々の abenacci 数（より一般に上述した二つの理論の接点）に関しても、通常の Fibonacci 数と同様に、多くの研究をする価値があると期待される。

なので今日は布教も兼ねて、 $r = 3$  のときの cosine abenacci 数と cosine abelucas 数

$$F_{n+1}^{(3)} := h_n(\alpha, \beta, \gamma), \quad L_n^{(3)} := p_n(\alpha, \beta, \gamma).$$

但し,

$$\alpha := -2 \cos\left(\frac{6}{7}\pi\right), \quad \beta := -2 \cos\left(\frac{4}{7}\pi\right), \quad \gamma := -2 \cos\left(\frac{2}{7}\pi\right)$$

の性質について簡単に紹介したい。

実際、 $F_{n+1}^{(3)}$  と  $L_n^{(3)}$  のみに話を絞ってもとても面白いうえに、高校生でも十分理解できる。

完全対称式にあまり馴染みがないと思われるので、漸化式による定義に書き換える（この書き換えも対称関数論の一般論を用いる）。  
漸化式と初期値  $n > 0$  に対し、

$$F_{n+3}^{(3)} = F_{n+2}^{(3)} + 2F_{n+1}^{(3)} - F_n^{(3)}, \quad F_0^{(3)} := 0, \quad F_1^{(3)} = 1, \quad F_2^{(3)} = 1, \quad F_3^{(3)} = 3,$$
$$L_{n+3}^{(3)} = L_{n+2}^{(3)} + 2L_{n+1}^{(3)} - L_n^{(3)}, \quad L_0^{(3)} = 3, \quad L_1^{(3)} = 1, \quad L_2^{(3)} = 5, \quad L_3^{(3)} = 4.$$

tribonacci 数

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 1,$$

との違いに注意せよ。  
特性多項式は、

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \left( \lambda + 2 \cos \left( \frac{6}{7} \pi \right) \right) \left( \lambda + 2 \cos \left( \frac{4}{7} \pi \right) \right) \left( \lambda + 2 \cos \left( \frac{2}{7} \pi \right) \right)$$
$$= (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma).$$

これは判別式が平方数  $49 = 7^2$  ゆえ、abelian (Galois 群は  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ) .

漸化式を使うと、容易に  $F_{n+1}^{(3)}, L_n^{(3)}$  の計算ができる.

$$F_1^{(3)} = 1, F_2^{(3)} = 1, F_3^{(3)} = 3, F_4^{(3)} = 4, F_5^{(3)} = 9, F_6^{(3)} = 14, F_7^{(3)} = 28, \dots,$$

Sloane のデータベース <https://oeis.org/>では **A006053** として登録されている.

$$L_1^{(3)} = 1, L_2^{(3)} = 5, L_3^{(3)} = 4, L_4^{(3)} = 13, L_5^{(3)} = 16, L_6^{(3)} = 38, L_7^{(3)} = 57, \dots.$$

こちらは **A096975**.

いずれもループ付の三点の棒グラフとの関連について言及されているが、大したことは書いてない.

正值単調非減少整数列  $F_{n+1}^{(3)}$  は正值単調非減少整数列である.

$$1 \leq F_1^{(3)} \leq F_2^{(3)} \leq F_3^{(3)} \leq F_4^{(3)} \leq F_5^{(3)} \leq F_6^{(3)} \leq F_7^{(3)} \leq \dots,$$

他方, 上の例をみてもわかるとおり,  $L_n^{(3)}$  は正值な整数列だが単純な単調非減少性は成立しない ( $L_2^{(3)} = 5 \geq L_3^{(3)} = 4$ ) !!  
ただし, 次が成り立つことがわかる.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \leq & L_1^{(3)} = 1 & \leq & L_3^{(3)} = 4 & \leq & L_5^{(3)} = 16 & \leq & L_7^{(3)} = 57 & \leq & \dots \\ & & \wedge \\ & & L_2^{(3)} = 5 & \leq & L_4^{(3)} = 13 & \leq & L_6^{(3)} = 38 & \leq & L_8^{(3)} = 117 & \leq & \dots \end{array}$$

寧ろ一般の場合は,  $L_n^{(r)}$  についてのこの結果を先に証明することで, cosine abenacci 数  $F_{n+1}^{(r)}$  の単調性が証明できる.

これは対称函数の一般論のみでは導けない, 難しく, 面白い結果.

## de Moivre-Binet の公式の類似

$$F_n^{(3)} = \frac{1}{7}(\alpha\beta(\alpha^n - \beta^n) + \beta\gamma(\beta^n - \gamma^n) + \gamma\alpha(\gamma^n - \alpha^n)), \quad L_n^{(3)} = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n. \quad (10)$$

## 母函数

$$\frac{1}{1-t-2t^2+t^3} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^{(3)} t^n, \quad \frac{1+4t-3t^2}{1-t-2t^2+t^3} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(3)} t^n. \quad (11)$$

## 比の極限 (黄金比との関連の類似)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+m}^{(3)}}{F_n^{(3)}} = \left(-2 \cos\left(\frac{6}{7}\pi\right)\right)^m, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+m}^{(3)}}{L_n^{(3)}} = \left(-2 \cos\left(\frac{6}{7}\pi\right)\right)^m. \quad (12)$$

Cassini の公式の類似 任意の自然数  $n$  に対し,

$$\begin{aligned} & F_{n+2}^{(3)}(F_n^{(3)}F_{n-2}^{(3)} - F_{n-1}^{(3)2}) - F_{n+1}^{(3)}(F_{n+1}^{(3)}F_{n-2}^{(3)} - F_n^{(3)}F_{n-1}^{(3)}) \\ & + F_n^{(3)}(F_{n+1}^{(3)}F_{n-1}^{(3)} - F_{n-1}^{(3)2}) = (-1)^n. \end{aligned} \quad (13)$$

相互関係式

$$F_{n+1}^{(3)} + 2F_{n-1}^{(3)} - 2F_{n-2}^{(3)} = L_n^{(3)}. \quad (14)$$

加法公式

$$F_{m+n+1}^{(3)} = F_{m+1}^{(3)}F_{n+1}^{(3)} + 2F_m^{(3)}F_n^{(3)} - F_{m-1}^{(3)}F_n^{(3)} - F_m^{(3)}F_{n-1}^{(3)}. \quad (15)$$

整除性  $p$  を素数とする.  $p \equiv \pm 1 \pmod{7}$  のとき,

$$F_{n+p-1}^{(3)} \equiv F_n^{(3)} \pmod{p}, \quad L_{n+p-1}^{(3)} \equiv L_n^{(3)} \pmod{p}. \quad (16)$$

これも対称函数の一般論からは従わない特殊値固有の結果.

## まとめ

- (1) Fibonacci 数の一般化を試みるために, Fibonacci 数を再考した結果, それが「完全対称式の特殊値である」という見方に気づいた.
- (2) これにより, Fibonacci 数の数学的背景に, 対称関数論と円分体の数論があることがわかった.
- (3) そこでこの文脈に適した形での, Fibonacci 数の拡張 (cosine abonacci 数) を考え, その基本的性質を明らかにし, それが期待通りのよい一般化であることを確かめた.

## 今後の課題

課題は山積み.  $F_{n+1}^{(3)}, L_n^{(3)}$  に限ってもやることはいくらでもある.  
高校生向け (課題研究のテーマとしてもってこい?)

- 通常の Fibonacci, Lucas 数  $F_{n+1}, L_n$  について成り立つ (特に対称関数の一般論からは導出できないような) 公式, 定理があったら, それの  $F_{n+1}^{(3)}, L_n^{(3)}$  版を考えよ. 安直ではあるが, 恐らく大事な問題?

### プロ向け

- abenacci 数の組み合わせ論的解釈.
- 円分体の周期 (各円分拡大の標準的な正規底) を代入した完全対称式の特殊値 (cosine abenacci 数の一般化) の考察. **特に正值単調非減少整数列になる条件を決定せよ.** また円分体の拡大列とこの abenacci 数との関連を調べよ.
- 有理数体ではなく, 虚二次体上の Abel 方程式の根 (modular 関数や楕円関数の等分値) を完全対称式に代入した特殊値の考察 (Kronecker の合同関係式の類似は成り立つか?).
- 完全対称式を別の特殊対称関数に置き換えよ (Hall-Littlewood 多項式が有力のように思える?).

ご清聴ありがとうございました.

# ポケモンGo より 面白い半完全数の世界

2016 年 8 月 26 日

飯高 茂

平成 28 年 8 月 29 日

## 1 完全数

$a$  を自然数とするとその約数の和を  $\sigma(a)$  と書く.

$\sigma(a) = 2a$  を満たす数を 完全数 といい, 6, 28, 496, 8128 などがあり古代の数学者ユークリッドによって考えられた.

これらを素因数分解すると

$$6 = 2 * (2^2 - 1), 28 = 2^2 * (2^3 - 1), 496 = 2^4 * (2^5 - 1), 8128 = 2^6 * (2^7 - 1)$$

などとなる.

2 のべきから 1 引いた  $Q = 2^{e+1} - 1$  が素数になるとき  $a = 2^e Q$  は完全数 (perfect numbers) でありとくにこの形の数をユークリッドの完全数という.

$Q = 2^{e+1} - 1$  とかける素数  $Q$  をメルセンヌの素数という.

一般に  $2^{e+1} - 1$  が素数になるとき  $e + 1$  は素数になることが証明できる.

$Q = 2^{e+1} - 1$  が素数になるという条件をはずして,  $e + 1$  が素数になるという条件のみをつけるとき  $a = 2^e Q$  を弱い完全数 (weakly perfect numbers) ということにする.

### 1.1 弱完全数

\* 非完全数 を指す.

表 1:  $P = 2$  :弱完全数

$p$	$Q = 2^p - 1$	素因数分解	$a$ :弱完全数
2	(3)	3	6
3	(7)	7	28
5	(31)	31	496
7	(127)	127	8128
11*	(2047)	23*89	2096128
13	(8191)	8191	33550336
17	(131071)	131071	8589869056
19	(524287)	524287	137438691328
23*	(8388607)	47*178481	35184367894528
29*	(536870911)	233*1103*2089	144115187807420416
31	(2147483647)	2147483647	2305843008139952128

## 2 $m$ だけ平行移動した完全数

$m$  だけ平行移動した完全数とは何か.

$q = 2^{e+1} - 1 + m$  : 素数のとき  $a = 2^e q$  を  $m$  だけ平行移動した完全数という.

$\sigma(a) = 2a - m$  を満たす.

表 2:  $[P = 2, m = 2]$  ;2 だけ平行移動した完全数

$a$	素因数分解
3	3
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
32896	$2^7 * 257$
2147516416	$2^{15} * 65537$

$a = 2^e q$  ( $q$  : フェルマ素数) の形をしたものが出ている.

## 3 半完全数

完全数  $2^e q$  を半分にして  $a = 2^{e-1} q$  を狭義の半完全数 (half perfect numbers) という.

$q = 2^{e+1} - 1 + m$  : 素数のとき  $a = 2^e q$  を狭義の  $m$  だけ平行移動した完全数という.

同様に  $a = 2^{e-1} q$  を狭義の  $m$  だけ平行移動した半完全数という.  
狭義の半完全数の満たす方程式を求めよう.

半完全数  $a = 2^{e-1} q$  に対して,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{e-1} q) = (2^e - 1)(q + 1) = (2^e - 1)q + 2^e - 1 = 2a - q + 2^e - 1.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$  を用いて

$$2\sigma(a) = 4a - 2q + 2^{e+1} - 2 = 4a - 2q + q + 1 - m - 2 = 4a - q - m - 1.$$

$\text{Maxp}(a)$  を  $a$  の最大素因子とおくと半完全数の満たす方程式

$$2\sigma(a) = 4a - \text{Maxp}(a) - m - 1$$

が得られた. これを満たす解を広義の半完全数という.

## 4 重完全数

$q = 2^{e+1} - 1 + m$  : 素数のとき  $a = 2^e q$  を  $m$  だけ平行移動した完全数 (perfect numbers) という. これを重ねた  $a = 2^{e+1} q$  を狭義の  $m$  だけ平行移動した重完全数 (double perfect numbers) という.

狭義の重完全数の満たす方程式を求めよう.

重完全数  $a = 2^{e+1} q$  に対して,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{e+1} q) = (2^{e+2} - 1)(q + 1) = (2^{e+1} - 1)q + 2^{e+2} - 1 = 2a - q + 2^{e+2} - 1.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$  を用いて

$$\sigma(a) = 2a + \text{Maxp}(a) - 2m + 1.$$

これを狭義の  $m$  だけ平行移動した重完全数の満たす方程式といい, これを満たす解を広義の  $m$  だけ平行移動した重完全数という.

## 5 計算例

### 5.1 $P = 2, m = 0$

完全数の方程式は  $\sigma(a) = 2a$ .

$\sigma(a) = 2a$  の解は  $a$  が偶数なら  $a = 2^e q$ , ( $q = 2^{e+1} - 1$ :素数,) の形になる.(Euler)

$a$  が奇数なら解  $a$  は存在しないと予想されている. これを奇数完全数の問題といい, 数学界では難問中の難問とされている.

$m = 0$  のとき重完全数の方程式は

$$\sigma(a) = 2a + \text{Maxp}(a) + 1.$$

表 3:  $[P = 2, m = 0]$  重完全数

$a$	素因数分解
12	$2^2 * 3$
56	$2^3 * 7$
66	$2 * 3 * 11$
992	$2^5 * 31$
3230	$2 * 5 * 17 * 19$
4730	$2 * 5 * 11 * 43$
8415	$3^2 * 5 * 11 * 17$
16256	$2^7 * 127$
28035	$3^2 * 5 * 7 * 89$
491536	$2^4 * 31 * 991$
9914264	$2^3 * 17 * 269 * 271$

$$12 = 2^2 * 3,$$

$$56 = 2^3 * 7,$$

$$992 = 2^5 * 31,$$

$16256 = 2^7 * 127$  は完全数の 2 倍になっている (重完全数の定義の意味).

しかしそれだけではなく新規参入組があり, それは次のとおり:

$$66 = 2 * 3 * 11,$$

$$3230 = 2 * 5 * 17 * 19$$

$$4730 = 2 * 5 * 11 * 43$$

$$8415 = 3^2 * 5 * 11 * 17$$

$$28035 = 3^2 * 5 * 7 * 89$$

$$491536 = 2^4 * 31 * 991$$

$$9914264 = 2^3 * 17 * 269 * 271$$

新規参入組は珍種のモンスターと呼びたくなる. これらをポケモンに例えることは許される事だろう.

ポケモンを調べこれらが重完全数になる数学的理由が明らかにできればポケモンを get したという

これは興味ある課題である.

ポケモンは無数にあるが, 手の内にできるのは 100 個もない. 私はそのうち 4 個 get した.

get するには証明がいる.

get したポケモン同士の対戦は証明が長いほうが勝ちとする.

今までポケモン同士の対戦した例はない.

後に, 優美なポケモンがでてくるが get することはきわめて困難であろう.

ポケモンである新規参入組は  $s(a) \geq 3$  を満たすことを次に証明する.

$s(a) = 2$  を仮定すると,  $a = p^e q^f, p < q$ : 素数, と書ける.

$X = p^e, Y = q^f \rho' = \bar{p}\bar{q}$  とおくと,  $\sigma(a) = 2a + \text{Maxp}(a) + 1$  は次のように書きなおせる.

$$(pX - 1)(qY - 1) = 2\rho'XY + (q + 1)\rho'.$$

計算して  $XY$  の係数を  $R$  とおくと

$$R = pq - 2\rho' = -(p - 2)(q - 2) + 2.$$

さらに  $-pX - qY + 1 + RXY = (q + 1)\rho'$  が成り立つので  $R \geq 0$ . よって  $p = 2, R = 2, \rho' = \bar{q}$ .

$$-2X - qY + 1 + 2XY = (q + 1)\bar{q}.$$

$f = 1$  とする.  $Y = q$  なので

$$-2X - q^2 + 1 + 2Xq = (q + 1)\bar{q} = q^2 - 1.$$

$$2X(q - 1) + 1 = q^2 - 1 + q^2.$$

これより  $q - 1$  で割ると  $2^e = X = q + 1$ .

$q = 2^e - 1, a = 2^e q$ .  $a$  はまさに狭義の重完全数.

$f \geq 2$  として矛盾を導く.  $Y \geq q^2$  に注意して

$$Y(2X - q) = 2X - 1 + q^2 - 1 \geq q^2(2X - q).$$

$2X - q > 0$  なので  $\xi = 2X - q$  とおけば

$$Y(2X - q) = Y\xi = 2X - 1 + q^2 - 1 = \xi + q^2 + q - 2.$$

$\xi = 1$  と仮定して矛盾を導く. 上式より

$$Y = q^2 + q - 1.$$

$q^2(q^{f-1} - 1) = q - 1$  により矛盾.

$$(Y - 1)\xi = q^2 + q - 2 \geq 2(Y - 1) \geq 2(q^2 - 1).$$

矛盾.

## 5.2 $a = 2^e qr, (r < q : \text{素数})$ と書ける解

$q = \text{Maxp}(a)$  とおくとき

$$\sigma(a) = 2a + q + 1$$

の解で  $a = 2^e qr, (r < q : \text{素数})$  と書ける解を求める.

$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)\tilde{q}\tilde{r}$  また  $2a + q + 1 = 2^{e+1}qr + q + 1$  なので

$$(2^{e+1} - 1)\tilde{q}\tilde{r} = 2^{e+1}qr + q + 1.$$

$$(2^{e+1})(\tilde{q}\tilde{r} - qr) = \tilde{q}\tilde{r} + q + 1.$$

$\Delta = q + r$  を使うと

$$(2^{e+1})(\Delta + 1) = qr + \Delta + 1 + q + 1 = q\tilde{r} + \Delta + 2.$$

よって,

$$q\tilde{r} = 2^{e+1}(\Delta + 1) - \Delta - 2.$$

$\Delta' = \Delta + 1$  とおくと  $\Delta' = q + \tilde{r}$ .

それゆえ

$$q\tilde{r} = (2^{e+1} - 1)\Delta' - 1.$$

$N_0 = 2^{e+1} - 1$  とおくと

$$q\tilde{r} = N_0\Delta' - 1.$$

$q_0 = q - N_0, \tilde{r}_0 = \tilde{r} - N_0$  とおけば

$$q_0\tilde{r}_0 = N_0^2 - 1.$$

$D = N_0^2 - 1$  とおくと  $q_0\tilde{r}_0 = D$ .

$e = 1, 2, 3, \dots$  に応じて,  $N_0, D$  を求め因数分解  $q_0\tilde{r}_0 = D$  に応じて,  $q = q_0 + N_0, r = \tilde{r}_0 + N_0 - 1$  が素数になるものを選べばよい.

パソコンでの計算の結果

$$a = 2 * 11 * 3$$

$$a = 2^4 * 991 * 31$$

$e < 10$  ではこの他に解はない.

かくして2つの ポケモン  $66 = 2 * 3 * 11, 491536 = 2^4 * 31 * 991$  が

$a = 2^e qr, (r < q : \text{素数})$  と書ける解として捕らえられた. このとき, 2つの ポケモン  $66, 491536$  を get したと言ってよい.

```
55 ?- all_nee1(0,0).
```

```
n=8
```

```
$a=2^1*3*11$      66      a=66
```

```
true.
```

```
56 ?- all_nee1(1,0).
```

```
n=48
```

```
true.
```

```
57 ?- all_nee1(2,0).
```

```
n=224
```

```
true.
```

```

58 ?- all_nee1(3,0).
n=960
$a=2^4*31*991$ 491536 a=491536
true.

```

### 5.3 $a = 2 * 5 * qr, (r < q : \text{素数})$ と書ける解

$q = \text{Maxp}(a)$  とおくと

$$\sigma(a) = 2a + q + 1$$

の解で  $a = 2 * 5 * qr, (r < q : \text{素数})$ , と書けるものを探す.

$$\sigma(a) = 18\tilde{qr},$$

$$2a + q + 1 = 20qr + q + 1 = 18(qr + q + 1) \text{ なので}$$

$$18\tilde{qr} = 20qr + q + 1.$$

$\Delta = q + r$  とおくと  $18\tilde{qr} = 18(qr + \Delta + 1) = 20qr + q + 1$  によって

$$-2(qr - 9\Delta - 9) = q + 1.$$

$q_0 = q - 9, r_0 = r - 9$  とおけば  $q_0r_0 = qr - 9\Delta + 81$  になり

$$q_0r_0 = qr - 9\Delta - 9 + 90.$$

$$-2(q_0r_0 - 90) = q + 1 = q_0 + 10.$$

これを整理して

$$170 = q_0(2r_0 + 1).$$

$q_0 : \text{偶数}, 2r_0 + 1 > 2 : \text{奇数}$ なので,  $170 = 10 * 17 = 2 * 5 * 17$  により

$$1) 2r_0 + 1 = 5, 2) 2r_0 + 1 = 17, 3) 2r_0 + 1 = 5 * 17.$$

1)  $2r_0 + 1 = 17, q_0 = 10; q = 19, r = r_0 + 9 = 17$ . これより  $a = 2 * 17 * 19$ .

2)  $2r_0 + 1 = 5, q_0 = 34. q = 43, 2r_0 + 1 = 5; r_0 = 2, r = 11$ . これより  $a = 2 * 11 * 43$ .

3)  $2r_0 + 1 = 5 * 17 = 85, q_0 = 2. q = 11, r_0 = 42; r = 51$ . これは素数ではないから矛盾.

こうしてポケモン  $a = 2 * 17 * 19, a = 2 * 11 * 43$  を get.

問  $a = 3^e r q$  の形の解を求めよ.

解は存在しない.

レアなポケモンの存在の噂をきいて探したが不存在が証明できた

#### 5.4 $a = 3^2 * 5 * qr, (7 \leq r < q : \text{素数})$ と書ける解

$$\sigma(a) = 2a + q + 1$$

の解で  $a = 3^2 * 5 * qr, (r < q : \text{素数})$ , と書けるものを探す.  $\Delta = r + q$  とおくと  
 $\sigma(a) = 13 * 6 * \tilde{qr} = 13 * 6 * (rq + \Delta + 1), 2a + q + 1 = 90rq + q + 1$  なので

$$13 * 6 * (rq + \Delta + 1) = 90rq + q + 1.$$

整理して

$$12rq + q + 1 = 78(\Delta + 1)$$

$q \geq r + 2 \geq 7$  により  $q \geq 11$ .

$r_0 = r - 7, q_0 = q - 11$  を用いると

$$77 = (12r - 77)q - 78 = (12r_0 + 7)q - 78(r_0 + 7).$$

さらに整理して

$$(12r_0 + 7)q = (12r_0 + 7)(q_0 + 11) = (12r_0 + 7)q_0 + 132r_0 + 77.$$

$$78 * 7 = 546 = q_0(12r_0 + 7) + 54r_0.$$

$r_0$  は偶数なのでこれを順次調べる.

a)  $r_0 = 0$ .  $546 = 7q_0$  になるので  $q_0 = 78; q = 89, r = 7$ .  $a = 3^2 * 5 * 7 * 89$ .

b)  $r_0 = 2$ .  $546 = 31q_0 + 108$  になるが整数解はない.

c)  $r_0 = 4$ .  $546 = q_0(48 + 7) + 54 * 4$  になるので  $q_0 = 6; q = 17, r = 11$ .  
 $a = 3^2 * 5 * 11 * 17$ .

$r_0 \geq 6$ .  $546 \geq q_0(72 + 7) + 54 * 6$  になるので  $324 \leq 79q_0; q_0 \leq 2$ .  $q \leq 13$  になるが  $r \geq 6 + 7 = 13$ . 矛盾

こうしてポケモン  $a = 3^2 * 5 * 7 * 89, a = 3^2 * 5 * 11 * 17$  を get.

しかし解  $9914264 = 2^3 * 17 * 269 * 271$  は今のところ仲間がないのでこの正体がわからない. これをポケモンとみたてても get できていない.

方程式

$$2\sigma(a) = 4a - \text{Maxp}(a) - 1.$$

$3, 14 = 2 * 7, 248 = 2^3 * 31, 4064 = 2^5 * 127$  は狭義の半完全数である.

新規参入組は次のとおり:

$1155 = 3 * 5 * 7 * 11$ , (小さいほうから 4 個の奇素数の積である. 姿が優美なポケモンと言ってよいだろう)

$483945 = 3 * 5 * 7 * 11 * 419, 3267770 = 2 * 5 * 11 * 61 * 487$ .

表 4:  $[P = 2, m = 0]$  半完全数

$a$	素因数分解
3	3
14	$2 * 7$
248	$2^3 * 31$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$
4064	$2^5 * 127$
483945	$3 * 5 * 7 * 11 * 419$
3267770	$2 * 5 * 11 * 61 * 487$

これらは  $s(a) = 4, 5$  なので扱いつらい.

新規参入組は  $s(a) \geq 3$  を満たすことを次に証明する.

$s(a) = 2$  を仮定すると,  $a = p^e q^f, p < q$ : 素数, と書ける.

$X = p^e, Y = q^f \rho' = \overline{pq}$  とおくと,  $2\sigma(a) = 4a - \text{Maxp}(a) - 1$  は次のように書きなおせる.  $q = \text{Maxp}(a)$  とおく.

$$2(pX - 1)(qY - 1) = \rho'(4XY - (q + 1)).$$

計算して  $XY$  の係数を  $R$  とおくと

$$R = 2pq - 4\rho' = 2(-(p - 2)(q - 2) + 2).$$

さらに  $-pX - qY + 1 + RXY = (q + 1)\rho'$  が成り立つので  $R \geq 0$ . よって  $p = 2, R = 4, \rho' = \bar{q}$ .

## 6 $P = 2, m = 2$

### 6.1 $[P = 2, m = 2]$ 半完全数

この場合の方程式は

$$2\sigma(a) = 4a - \text{Maxp}(a) - 3.$$

新規参入組みは次のとおり:

$$130 = 2 * 5 * 13$$

$$24616 = 2^3 * 17 * 181$$

$$244036 = 2^2 * 13^2 * 19^2$$

$$272228 = 2^2 * 11 * 23 * 269$$

表 5:  $[P = 2, m = 2]$  半完全数

$a$	素因数分解
5	5
68	$2^2 * 17$
130	$2 * 5 * 13$
16448	$2^6 * 257$
24616	$2^3 * 17 * 181$
244036	$2^2 * 13^2 * 19^2$
272228	$2^2 * 11 * 23 * 269$

これらは  $a = 2^e qr, 2^e q^2 r, 2^e q^2 r^2, 2^2 * r_1 * r_2 * q$  の形をしている。不思議な形といえよう。

$244036 = 2^2 * 13^2 * 19^2$  はとくに珍しい形で私は恐竜 ステゴザウルス を連想する。3つの平方の印が背中についた装甲の板のように見える。

$q = 19$  により方程式  $2\sigma(a) = 4a - \text{Maxp}(a) - 3$  に代入すると,  $2\sigma(a) = 4a - \text{Maxp}(a) - 3 = 4a - 22$  なので

$$\sigma(a) = 2a - 11.$$

これは 11 だけ平行移動した完全数を意味する。

$\sigma(a) = 2a - 11$  をパソコンで解の探索をすると,  $2^2 * 13^2 * 19^2$  が唯一の解らしい。半完全数が実は完全数だったという物語である。

## 6.2 $[P = 2, m = 2]$ 重完全数

$m = 2$ , 重完全数の方程式は

$$\sigma(a) = 2a + \text{Maxp}(a) - 3.$$

表 6:  $[P = 2, m = 2]$  重完全数

$a$	素因数分解
2	2
4	$2^2$
6	$2 * 3$
8	$2^3$
16	$2^4$
20	$2^2 * 5$
32	$2^5$
64	$2^6$
70	$2 * 5 * 7$
128	$2^7$
256	$2^8$
272	$2^4 * 17$
512	$2^9$
1024	$2^{10}$
1652	$2^2 * 7 * 59$
2048	$2^{11}$
4096	$2^{12}$
8192	$2^{13}$
16384	$2^{14}$
32768	$2^{15}$
65536	$2^{16}$
65792	$2^8 * 257$
131072	$2^{17}$
262144	$2^{18}$
524288	$2^{19}$
1048576	$2^{20}$
2097152	$2^{21}$
4194304	$2^{22}$

これからもわかるように重完全数の解がたくさんでてきた。

しかも, 1)  $s(a) = 1, a = 2^e$ , 2)  $s(a) = 2, a = 2^q$ , 3)  $a = 2^e q r, r < q$ : 素数と解がきれいに分類されている. このままの形で証明することは困難だが条件を少しつければ証明は可能.

1)  $s(a) = 1, a = 2^e$ , 2)  $s(a) = 2, a = 2^q$  は普通のものでポケモンとは言わない.

3)  $a = 2^e q r, r < q$ : はポケモンと言ってよい. すでに get されている.

### 6.3 いくつかの命題

$\sigma(a) = 2a + \text{Maxp}(a) - 3$  の解について.

1)  $a = 2^e$  はすべて解

$a = 2^e$  のとき,  $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ , 一方  $2a + \text{Maxp}(a) - 3 = 2 * 2^e + 2 - 3 = 2^{e+1}$ .

よって,  $a = 2^e$  は解.

一般に,  $p$ : 素数,  $a = p^e$  のとき  $\sigma(a) = 2a + \text{Maxp}(a) - 3$  を満たすとする.

$\sigma(a) = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}$ . 一方  $2a + \text{Maxp}(a) - 3 = 2 * p^e + p - 3$ .

ゆえに,

$$p^{e+1} - 1 = (2 * p^e + p - 3)(p - 1).$$

変形して

$$p(p - 4) + p^e(p - 2) + 4.$$

$$(p - 2)(p^2 + p - 2) = 0.$$

よって,  $p = 2$ .

2)  $a = 2^e q$  は解とする.

$$\sigma(a) = (2^{e+1})(q + 1), 2a + q - 3 = 2^{e+1} + q - 3$$

よって,  $2^{e+1} = 2q - 2. q = 2^e + 1$ : フェルマ素数

2)\* 解  $a$  は  $s(a) = 2$  とする.

$a = p^e * q^f, (p < q$ : 素数), と書くとき,  $X = p^e, Y = q^f, \rho' = \overline{pq}$  とおけば

$a = XY, \sigma(a) = \frac{(pX - 1)(qY - 1)}{\rho'}$   $= 2XY + q - 3$  によって

$R$  を  $XY$  の係数とおけば

$$RXY - pX - qY + 1 = \rho'(q - 3).$$

これより,  $R > 0$ .

$$R = Pq - 2\rho' = 2 - p_0q_0,$$

ここで  $(p_0 = p - 2, q_0 = q - 2)$ .

$R > 0$  によって  $p_0 = 0, p = 2, R = 2$ .

よって

$$2XY - 2X - qY + 1 = \bar{q}(q - 3).$$

$Y = q; (f = 1)$  のとき

$$2Xq - 2X - q^2 + 1 = \bar{q}(q - 3).$$

$2Xq - 2X - q^2 + 1 = 2X\bar{q} - q^2 + 1$  により  $q - 1$  で割って

$2X - q - 1 = q - 3$  により  $q = X + 1 = 2^e + 1$ : フェルマ素数.

$a = 2^e q$  は  $m = 2$ , 狭義の重完全数.

$Y = q^f; (f \geq 2)$  のとき矛盾を導く.

$2XY - 2X - qY + 1 = \bar{q}(q - 3)$  によって,  $(2X - q)Y = 2X - 1 = \bar{q}(q - 3)$ .

これより  $\xi = 2X - q \geq 1$ .

$\xi Y = 2X - 1 + \bar{q}(q - 3)$ .

$$2X - 1 = \bar{q}(q - 3) = \xi + \bar{q}(q - 2)$$

を代入して

$$\xi Y = \xi + \bar{q}(q - 2) = \bar{q}(q - 3).$$

$Y = q^f \geq 2$  により

$$\bar{q}(q - 3) = \xi Y \geq \xi q^2.$$

$$q^2 - 4q + 3 \geq \xi q^2 \geq q^2.$$

これは矛盾.

3)  $a = 2^e qr, (r < q: \text{素数})$  は解とする.

$\tilde{q} = q + 1, \tilde{r} = r + 1$ , を用いて

$$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)\tilde{q}\tilde{r} = 2^{e+1}\tilde{q}\tilde{r} - \tilde{q}\tilde{r} = 2a + q - 3.$$

$\Delta = q + r$  を使うと

$$2^{e+1}(\Delta + 1) - (qr + \Delta + 1) = q - 3.$$

$\tilde{r}$  を用いると,

$$2^{e+1}(\Delta + 1) = (qr + \Delta + 1) + q - 3 = \tilde{q}\tilde{r} + q + \tilde{r} - 3.$$

$N = 2^{e+1} - 1$  とおくとき

$\tilde{q}\tilde{r} = (q + \tilde{r})N + 3, q_0 = q - N, r'_0 = \tilde{r} - N$  により  $D = N^2 + 3$  とおけば

$$q_0 r'_0 = D.$$

$e = 1$  とすると,  $N = 3, D = 9 + 3 = 12 = 4 * 3$ .  $q_0 = q - 3$  は偶数,  $r'_0 = r' - 3$  は奇数.

よって,  $q_0 = q - 3 = 4; q = 7. r'_0 = r' - 3 = 3. r' = 6; r = 5. a = 2 * 5 * 7$  がえられた.

これからパソコン計算でいくつかの解が出る.

$$a = 2 * 7 * 5, a=70$$

$$a = 2^2 * 11 * 19, a=836$$

$$a = 2^2 * 59 * 7, a=1652$$

$$a = 2^3 * 19 * 71, a=10792$$

$$a = 2^6 * 131 * 4159, a=34869056$$

$$a = 2^6 * 563 * 163, a=5873216$$

$$a = 2^8 * 3203 * 607, a=497720576$$

しかしながら  $q > r$  を満たす必要があり

$70 = 2*7*5, 413 = 2^2*59*7, 91769 = 2^6*563*163, a = 497720576 = 2^8*3203*607$  のみが解として残る.

# エントロピー：その形式的呪縛からの解放 #1

人間の非論理的な判断の物質的根拠に関する論理的かつ非論理的な説明の試み

2016.09.28 尾立貴志

## 導入部分の概要

エントロピーの大きさは、確率的な変化の自由度の大きさに関係します。しかし、エントロピーとは何か、その本質についての理解はまだ不十分であると考えられているようです。まして物理学を専門としない人々への正確で平易な説明に成功しているとは言えない状況が続いています。

このような混乱した状況が生まれている原因は、エントロピーをめぐるよく知られた歴史的経緯だけではなく、そもそも確率とは何かということに対する理解に不足する部分があるためであろうと私は推測しました。

さて、モンティ・ホール問題という確率についての有名な問題があります。この問題は、確率の大きさについて人間が直観的 #2 に評価した大きさと、数学的・論理的に評価した大きさととのズレが面白いので有名になった問題です 1。すでに数学的・論理的な評価が正しいと決着がついたことになっている問題ですが、私はこのようなズレの生じた原因を追究することによって、確率とは何かという問題をより深く捉えることができるのではないかと期待しました。

そこで、論理的には間違っているとされる人間の直観的な確率評価方法にも何らかの物質的根拠があるのではないかと、また論理的な間違いを産み出す物質的根拠の中に、物質のエントロピーを担う物質的な確率（それはいったいどんな確率？）を見いだせるのではないかと考えました。

1. モンティ・ホール問題をマクロレベルとミクロレベルで解く
2. 物質のエントロピーを決めるのはボーア確率である
3. トポロジカル・インデックスは物質のエントロピーである
4. 素数分布と物質のエントロピー

## 1. モンティ・ホール問題をマクロレベルとミクロレベルで解く

確率的なものの見方は大昔からあるのですが、西洋数学の中で確率を数学の対象として扱うようになったのはパスカルやフェルマーの時代からのようです。その後、ベルヌーイ、ド・モアブル、ベイズ、ラプラス、・・・コルモゴロフ等によって確率論が発展してきました。

「確率とは何か」という問いに対して、現代数学を学んだ人々は、数学的な表現をできるか否かはともかく、確率がどのようなものかについて共通の概念を持っていると考えられます。そこで理解されている「確率」は1種類であり、すべての人に共通の確率概念です。

---

#1 2016.08.26 日本フィボナッチ協会 第14回研究集会（協賛：東京理科大学理数教育研究センター）

Breaking Free From the Spell of Entropy (We must take a fundamental change in the basic concept of entropy.)

本稿 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/BreakingFreeFromTheSpellOfEntropy.pdf> [Link](#)

会場配布資料 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/BreakingFreeFromTheSpellOfEntropy20160826.pdf> [Link](#)

#2 ここでは直感的であるが、興味ある対象に積極的に向かう心の能動的な働きかけを伴う場合、つまり感覚的にとらえたものを論理的理解に変換しようとする脳の働きを伴う場合について「直観的」という言葉を用いています。

そのため、モンティ・ホール問題において多くの人々の直観的な理解とは異なる答えが示されても、ベイズの定理に沿った論理的解説がなされると、直観に反する答えの数学的な正しさを誰もが認めることになります。

しかし私は、確率には根本的に異なる2種類の確率があるのではないかと疑うようになりました。つまり、モンティ・ホール問題における人々の直観的な理解を正しいと認める確率と、ベイズの定理に沿った答えが正しいと認める確率との2種類です。

そして、前者の確率は熱力学の物質的なエントロピーに関係するが、後者の確率は物質のエントロピーとは関係ない（あるいは関係が希薄な）のかもしれないと感じております。

そのように考えると、モンティ・ホール問題において（1種類の確率論に基づく）数学的に正しい答えと異なる直観的理解を多くの人々が持つことや、情報理論のシャノン・エントロピーが熱力学のエントロピーとは別物ではないかと考えられてきた歴史的経緯を、「2種類の確率を区別できていなければ、そういうことが起こっても仕方がない」と理解できるようになります。

こういう2種類の確率を考えるようなことが学問的に適切かどうかはわかりませんが、面白そうなので試してみたいと思います。

モンティ・ホール問題とその正解は、簡略に説明すると次のようなものです。

3つの部屋 (A, B, C) があり、その中の1つに宝があります。どの部屋に宝があるかは同じ確率 (=1/3) だとします。宝を狙う挑戦者が部屋を1つ選びます (例えばAとします)。残る2つの部屋 (B, C) のうち宝の無い部屋を出題者が1つ選んでドアを開けます (例えばCとします)。ドアの開いていない部屋が2つ残ります (A, B)。どちらかに宝があります。ここで出題者が、挑戦者に選ぶ部屋の変更を許可します (挑戦者は最初Aを選びましたが、Bに変えても良いと)。

さて、挑戦者が選ぶ部屋を変えると (AをやめてBを選ぶと)、宝の当たる確率は大きくなるのでしょうか、それとも変わらないのでしょうか、あるいはむしろ小さくなるのでしょうかという問題です。確率が小さくなると考える人はいないようです。

この問題を知らない一般の方で試すと、残る2つの部屋 (A, B) のどちらに宝があるか、その確率は等しいと判断するのが普通です。確率は同じであるが、心理的に部屋を変えてみたくなるという人もいますが、これは、確率が同じだから部屋を変えても良いという意味です。

しかしこの問題の正解は、挑戦者が選択する部屋を変えると (AをやめてBを選ぶと) 宝の当たる確率は2倍に大きくなるので、「部屋の選択を変えるべき」というものです<sup>1</sup> (Fig.1)。

まず、3つの部屋を (ABC) と表記します。最初は、それぞれ 1/3 の確率で (A|BC)、(A|B|C)、(A|B|C) の3種類の可能性があります。(A|BC) は部屋Aに宝があるという意味です。

挑戦者が部屋Aを選びます。記号のAを四角で囲み、挑戦者に選ばれていることを示すことにすると、3種類の可能性は (A|BC)、(A|B|C)、(A|B|C) と表わされます。(A|B|C) は、宝は部屋Bにあるが、挑戦者は部屋Aを選んでることを示しています。挑戦者は部屋を選んだだけで

あり、まだどの部屋もドアは閉じたままです。3種類はそれぞれ  $1/3$  の確率です。

(**A** B C) の場合、出題者は C か B のドアを開けます。C を開けた時を (**A** B 空)、B を開けた時を (**A** 空 C) と表します。どちらも宝は無いので、C か B かランダムに開けるとすると、各々は  $1/6$  の確率です。(**A** B 空) の確率と (**A** 空 C) の確率を併せると  $1/3$  となります。

(**A** **B** C) の場合、出題者は宝の無い C のドアを開けます。(**A** **B** 空) と表します。この確率は  $1/3$  です。

(**A** B **C**) の場合、出題者は宝の無い B のドアを開けます。(**A** 空 **C**) と表します。この確率は  $1/3$  です。

さて、出題者が部屋の数 を 2 つに減らし、挑戦者に選択の変更を許可した後も挑戦者が最初に選んだ部屋 A を選び続けたとき、宝が当たるパターンは (**A** B 空) か (**A** 空 C) の場合であり、当たる確率は両者を併せた  $1/3$  です。

挑戦者が部屋 A を他の部屋に変えたとき、宝が当たるパターンは (**A** **B** 空) か (**A** 空 **C**) であり、当たる確率は両者を併せた  $2/3$  となります。

宝が A にある確率は  $1/3$ 、B または C にある確率は  $2/3$  ですが、宝が B または C にある時は、出題者が開けなかった方の部屋を選ぶと必ず宝が当たります。

したがって、最初に選んだ部屋を変えることにより宝の当たる確率は  $1/3$  から  $2/3$  へ増えるので、挑戦者は最初に選んだ部屋を変えるべきであるというのが数学的・論理的な正解です。

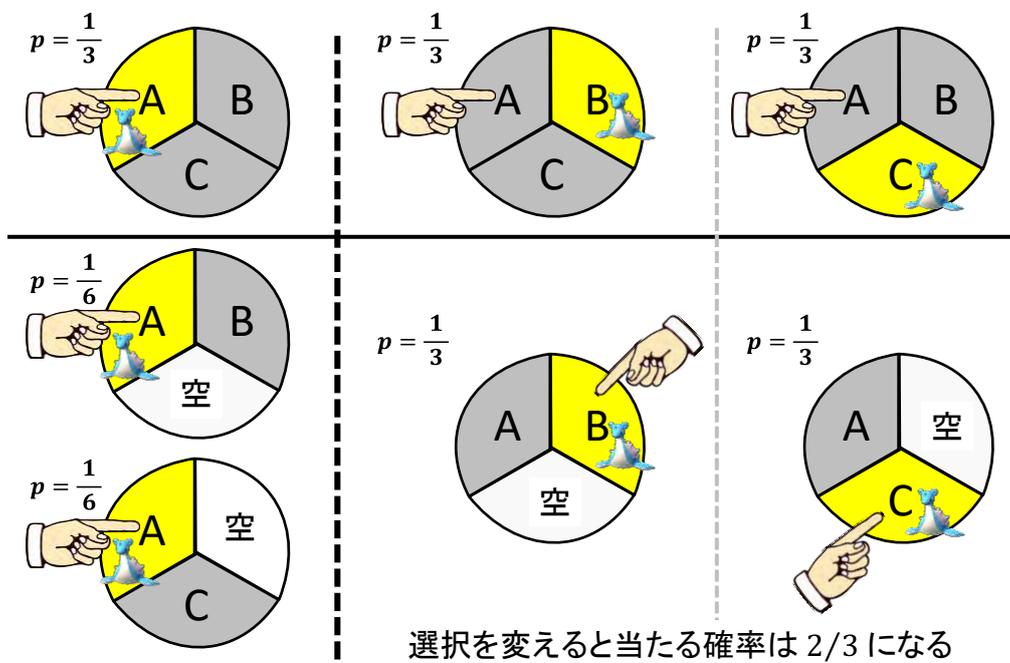


Fig.1 モンティ・ホール問題の正解 (マクロレベル)

それではここで、宝の代わりに1個の電子を使ってモンティ・ホール問題を考えてみましょう。なお、私は量子力学を知らないなので、用語の使い方などは不適切かもしれません。

まず、電子が中心に1個ある空間を、(小さな?大きな?)仕切りで等しく3つに区分できたとします。現実になんな区分けはできないので思考実験となります。3つの小空間を(ABC)と表記します。最初、1個の電子が(ABC)に均等に分布しているものとします。つまり、何らかの観察を行ったときに電子が見つかる確率は、A、B、Cとも各1/3で等しいとします(Fig.2)。

つまり最初は、(ABC)となります。電子はあらゆる場所に存在しています。電子の位置を調べるために何らかの観察を行うと、それぞれ1/3の確率で小空間AかBかCか、そのどこかで電子が見つかります。(ABC)、(ABC)、(ABC)の3種類の観察結果のどれかが、それぞれ1/3の確率で起こるものとします。(ABC)は小空間Aで電子が見つかるという意味です。

マクロにおけるモンティ・ホール問題と異なり、出題者も電子がどの小空間で見つかるかを知りません。実際に観察しないと知りえないことだからです。

ここで、挑戦者が小空間Aを選んだとしましょう。電子の位置を調べる観察によって生じる3種類の可能性を(ABC)、(ABC)、(ABC)と表します。(ABC)は、挑戦者はAを選んだが、観察したら電子はCで見つかるということを意味します。挑戦者は小空間を選んだだけであり、まだ観察は行われていません。3種類はそれぞれ1/3の確率で起こります。

マクロにおけるモンティ・ホール問題と同じような状況を作るために、たとえば挑戦者が小空間Aを選んでいる(ABC)の場合、出題者はCかBの小空間には電子が存在しないことを示して、挑戦者が選択できる小空間を2つ(AとB、またはAとC)に減らさなければなりません。

そこで出題者は、電子を追い払うため、(ABC)に別のマイナス電荷を近づけながら小空間CまたはBの内部を見せ、そこには電子が無いことを示すことにします。出題者は、最後の観察によって電子がどの小空間で見つかるかを事前に知っているわけではありませんが、やらなければならないことは単純です。挑戦者が最初に選ばなかった2つの小空間のどちらか(CかB)を、それぞれ同じ確率で選び、マイナス電荷を近づけて電子を排除した状態を見せるだけのことです。

挑戦者が小空間Aを選び続けて電子の位置を当てるパターンは、(ABC) → (AB 空) → (AB 空) または (ABC) → (A 空 C) → (A 空 C) の2通りです。挑戦者が小空間Aを選び続けて電子の位置を外すパターンは、(ABC) → (AB 空) → (AB 空) または (ABC) → (A 空 C) → (A 空 C) の2通りです。電子の分布する小空間の数は3→2→1と減ります。

マクロの時と同じように、最終的結果の確率が (AB 空) : 1/6、(A 空 C) : 1/6、(AB 空) : 1/3、(A 空 C) : 1/3 となるのであれば、挑戦者は選択した小空間を変えるべきでしょう。

しかしミクロの場合、出題者も電子の位置がどこに定まるかを知らないなので、出題者が選ばなかった2つの部屋(そのうちの1つは挑戦者が選んでいる)に電子が位置する確率は、どちらも1/2で等しいということになります。小空間の数が3→2→1と減るとき、電子の見つかる確率は1/3→1/2→1/1と変化するのです。

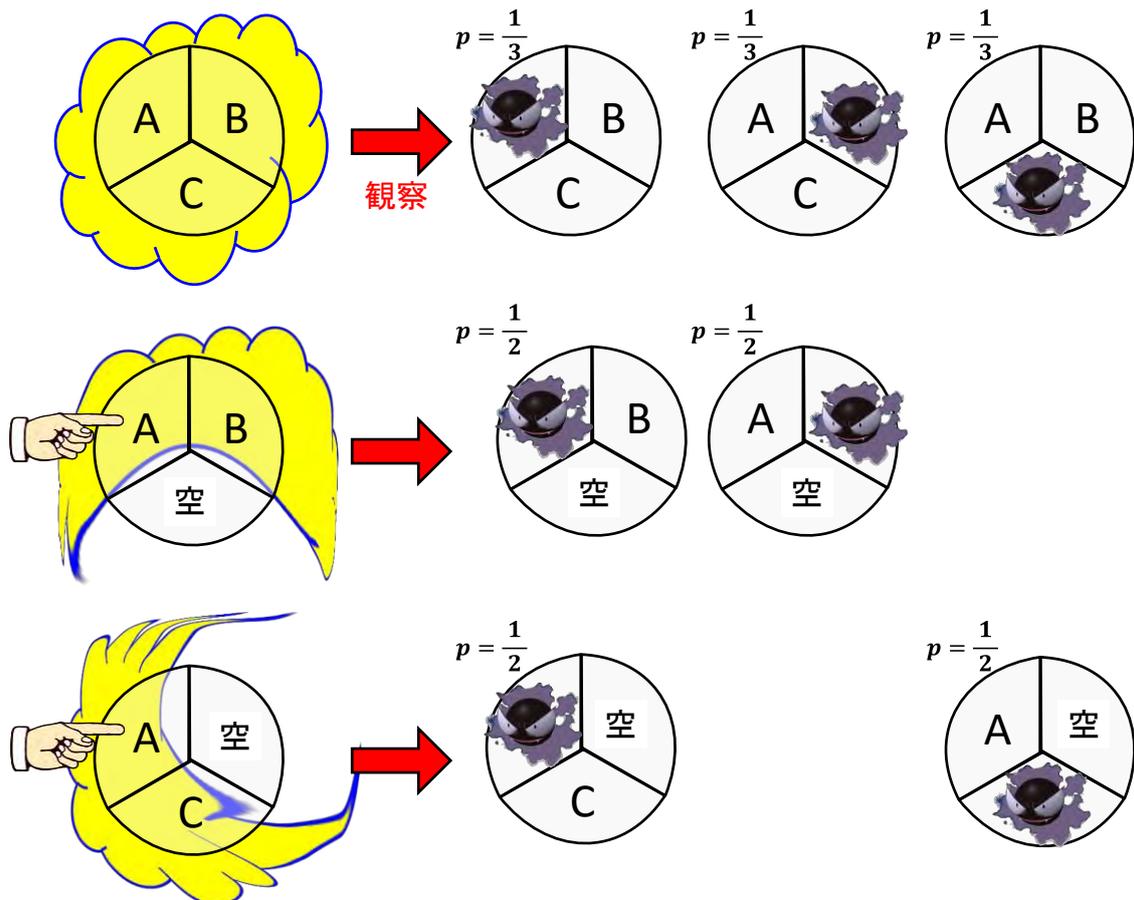


Fig.2 モンティ・ホール問題の正解 (マイクロレベル)

遠くから見る限り、出題者の表情から正解を知っているか否かを判断したり、出題者がマイナスの電荷を隠し持っていることなどを見つけたりすることはできませんから、マクロのモンティ・ホール問題を行っている現場とマイクロのモンティ・ホール問題を行っている現場とを外観で区別することはできません。挑戦者の動きも、出題者の行動も同じように見えます。

マイクロにおけるモンティ・ホール問題の思考実験が、以上のような理解で本当に良いのか、もう少しよく考えてみないといけませんが、マクロにおける問題で人間が行う直観的で非論理的な判断の物質的根拠につながっているかもしれないと期待できます。人間の直観は意外と量子論的であると言えるかもしれません。

つまり、「波であり且つ粒子である」、「位置を定めると運動量がわからない、運動量を定めると位置が不明」などのような量子的な性質が、人間の思考（特に無意識下での情報処理）にも影響しているのではないかという推測です。

この推測に基づくと、量子論的な性質を持ちベイズの定理などが成立しない確率と、数学的・論理的でベイズの定理が成立する確率とを区別して考える必要が生じます。

ここでは、今後の説明の便宜のために、前者を「ボア確率」、後者を「ラプラス確率」と呼んで区別することにします (Table.1)。

Table.1 2種類の確率

ボーア確率	ラプラス確率
モンティ・ホール問題では、人間の直観的判断と一致する答えを導き出す。現代の数学・論理学では間違っただけの答えとして扱われる。	モンティ・ホール問題では、数学的・論理的に正しい答えを導き出す。
印象：物質的、量子的、本能的、無意識的、情熱的 ベイズの定理は成立しない	印象：仮想的、理想的、抽象的、論理的、前頭葉的、意識的、冷静 ベイズの定理が成立する
物質のエントロピーを決める	物質のエントロピーとは無関係

数学で「統計的確率（実験的確率）」、「数学的確率（先験的確率、理論的確率）」と呼ばれているものは、確率概念としてはすべてラプラス確率です。

なおここでは、ラプラス確率が、モンティ・ホール問題において数学的・論理的に正しい答えを導き出すと説明していますが、数学は非常に柔軟な学問ですから、やがてボーア確率を適切に取り込んで、このような表現を不適切なものにするかもしれません。

## 2. 物質のエントロピーを決めるのはボーア確率である

さて、胡散臭い確率論に続くのは山勘のエントロピー論です。ここでは、物質のエントロピーを決めているのはボーア確率であって、ラプラス確率ではない、と山勘で決めて検討してみようと思います。

その理由は、ラプラス確率というのは幾らでも作り出せる（幾らでも仮想的に設定できる）確率なので、それが物質のエントロピーを決めるとすると、際限がなくなるからです。

そうすると、例えばシャノンの情報エントロピー  $-\sum p \log p$  は物質のエントロピーと関係ないのかという疑問が生じます。詳細は後で説明しますが、情報エントロピーが物質のエントロピーである場合もあれば、そうでない場合もあるというのが答えです。どんな数式を用いるかは便宜上の問題に過ぎません。要は、エントロピー計算にボーア確率を用いれば物質のエントロピーになるのであり、ラプラス確率がボーア確率と一致するような状況においては、ラプラス確率を用いた情報エントロピーが物質のエントロピーと偶然一致することになります。

物質のエントロピーと情報エントロピーを結びつけたのは数学的形式でした。順を追って簡単に見ていきましょう。

物質のエントロピーを発見したのは熱力学者のクラウジウスです。系のエントロピー変化量は、一定の温度における熱量の変化量で表されました  $\Delta S = \Delta Q/T$

ボルツマンやギブズは、気体分子運動論（統計力学）の立場からエントロピーの確率論的解釈を行いました。気体分子がとりうる運動状態の場合の数を  $W$  とすると  $S = k_B \log W$  この式は、

等重率（等確率）の原理を仮定すると  $S = k_B \sum p_i \log(1/p_i) = k_B \log(1/p)$  となります。

この半世紀ほど後、シャノンは情報理論を作り、情報エントロピー  $S = \sum p_i \log(1/p_i)$  を考案しました。この数式を選んだのは計算の便宜的理由であることをシャノンや解説者のウィーバーは明記しています<sup>2</sup>。その数学的形式は、統計力学のエントロピーの式と同じでした。

すぐに、両者を統一的に解釈する試みが始まりました。しかし物理学者や数学者の反応は、両者は別のものであると考えたり、あるいは本質的に同じものであると考えたり、まちまちでした。いろいろな立場があることは、エントロピーの概念的基盤が軟弱であり、私のような素人の絡む余地があることを意味しています。

その後、情報理論では、Renyi や Tsallis などいろいろなエントロピーの計算式が提案され研究されていますが、基本的にはすべて  $\sum p \log(1/p)$  の数学的形式を保っているようです<sup>#3</sup>。

そういう歴史的経緯があるため、エントロピーとは何かという本質的な理解をしないまま、 $\sum p \log(1/p)$  の数学的形式で規定可能なものがエントロピーであると勘違いする人も出てくる恐れがあります。

実際、私も、この数学的形式に、エントロピーとしての本質的意味があるのだろうか、いろいろと調べましたが、計算の便宜上の意味しか見いだせませんでした。

そこで数式から離れて、確率とは何かという面からエントロピーの本質に迫ろうと試みることにした次第です。

今回の試みでは、現実の物質にとっての確率は、数学にとっての論理的な確率とは異なるのではないかと考えています。量子的な性質を持つ前者をボア確率と名付けました。

素人の山勘にすぎませんが、物質のエントロピーとは、物質のボア確率をもつ自由度の大きさのことであると思えます。その大きさの計算式や物理単位は、確率構造の違いを考慮しながら、エネルギーの変化量とエントロピーの変化量が相関するように便宜的に決めればよいと考えられます。

クラウジウスの熱力学エントロピーは種々雑多なエントロピーの混合であり、物質の様々な種類の量子的状態に関するボア確率の自由度に基づいていると考えられますが、次に紹介するトポロジカル・インデックスは、その中のひとつであり、かなり純粋な単一種類のエントロピーとして扱えるものであると考えられます。

### 3. トポロジカル・インデックスは物質のエントロピーである

統計力学では  $S = k_B \log W$  の  $W$  として、物質系の平衡状態において出現し得る状態の種類の数を考えます。それらの状態がすべて等確率  $p$  で出現すると仮定できるとき、 $p = 1/W$  とします。

---

<sup>#3</sup> 私は数学者でも物理学者でもなく、詳しいことはわかりませんが、こうした難しい情報エントロピーの研究者によると、エントロピーと呼ばれているものは一定の数学的形式に従っているとのこと。

しかし数年前に私は、出現し得る場合の数（静的な数）よりも変化の経路の数（動的な数）を重視し、非平衡状態における瞬間的な条件付確率が物質のエントロピーを決める確率  $p$  であると考えました。そして 0100010… という 1 次元情報系について、要素数を 1 つずつ増やしながらか最大エントロピー時の変化経路数を計算し「 $W = 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ 」という数列を得ました。

インターネットで検索したところ、この数列はフィボナッチ数列と呼ばれており、自然界に多く出現するが、その理由は謎であることを知りました。そこで私はフィボナッチ数の本<sup>3</sup>を探し、そこに紹介されていた日本フィボナッチ協会／研究集会（2012年の第10回）に参加し、「フィボナッチ数列とエントロピー」という演題で、「フィボナッチ数列・黄金比 最大エントロピー仮説」を発表しました。

その内容は以下の通りです：「散逸構造<sup>#4</sup>が成長し、増殖するときによく見られるフィボナッチ数列の出現は、何らかの1次元情報処理系がそのエントロピーを最大に保ちながら増大していく機序の存在を示している。フィボナッチ数列に限らず、自然界において何らかの数列が多く出現するときには熱力学的理由があると考えられる。」

つまり、自然界にフィボナッチ数列や黄金比が多く出現するのは、神秘ではなく、当たり前のことであるという内容の発表を行いました。

後日、私の発表を聞いていた化学者の細矢治夫が、私のエントロピーの計算方法（後述）は、細矢が1971年に発表した Topological Index (Hosoya Index と呼ばれている) と本質的に同じ方法であることに気づきました<sup>4, 5, 6</sup>。トポロジカル・インデックスの持つ本質的な意味は、ずっと謎であったけれども、もしかするとエントロピーそのものかも知れないと<sup>#5</sup>。

その後、黄金比が最大エントロピーを意味することは、情報理論の立場から堀部安一が1982年に発表していたことが明らかとなりました<sup>7, 8, 9, 10, 11</sup>。しかし発表当時は、物質のエントロピーと情報エントロピーは別物であるとする立場が優勢であり、堀部の研究は、あくまで情報エントロピーの話であると理解され、自然界のフィボナッチ数には結びつかなかったようです。

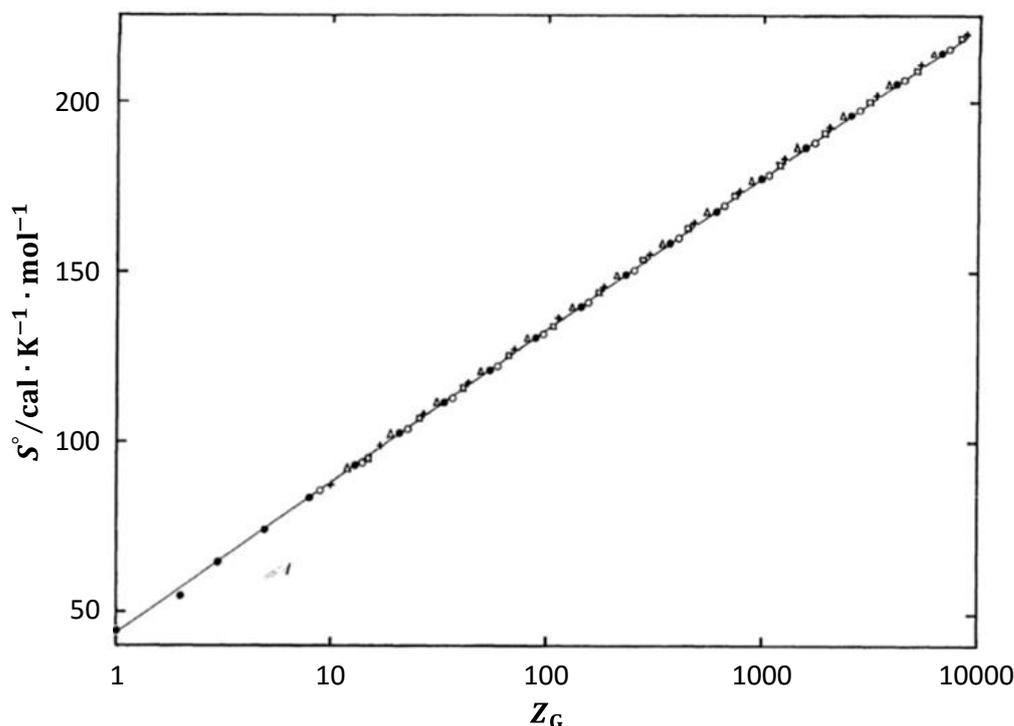
まったく交流のない異分野での研究結果の偶然の一致のようにも見えるこうした知見を総合すると、トポロジカル・インデックスが物質のエントロピーそのものであることは明らかでしたが、そのような解釈を拒んでいたのが  $-\sum p \log p$ （等確率のときは  $-\log p$ ）というエントロピーの形式による心理的な束縛でした。

トポロジカル・インデックスと物質の化学熱力学的特性との基本的関係は、細矢によって研究されており、沸点や化学熱力学的エントロピーとの関係が明らかにされていきました<sup>12, 13</sup>。

---

<sup>#4</sup> 散逸構造（さんいつこうぞう）とは、川の流れに生じる渦巻きのように、摩擦（物質から物質へのエネルギー移動）によって生じる構造のことです。エネルギー移動が途絶えると消滅します。生き物のように寿命のあるものはすべて散逸構造です。仏教の無常観は散逸構造の儚い運命（さだめ）をとらえた世界観です。

<sup>#5</sup> 私の計算方法（後で紹介）はトポロジカル・インデックスにエントロピーという解釈を与えるものであり、また、そのためだけに用いる必要があります。実際のエントロピーとしては細矢の方法でトポロジカル・インデックスをきちんと計算するのが適正です。例えば、単純な環状構造のトポロジカル・インデックスはルカ数列を生み出しますが、私の計算方法では元の数が奇数の時にルカ数列から少しズレるため補正が必要になります。



**Fig. 5.**  $\log Z_G - S^\circ$  plot for larger members ( $n \leq 20$ ) of several series of alkanes.  
 ●: Normal, △: 3-methyl, ○: 2,2-dimethyl, +: 2,3-dimethyl, □: 2,4-dimethyl.

上図は、1980年の参考文献の Fig.5 です (文字等を見やすく変更)。Topological Index を  $Z_G$  とすると、この図 (横軸は対数軸) は  $\log Z_G$  とエントロピーとの強い相関関係を示しています。

図を見ると、 $Z_G$  の全範囲で、驚くほど直線的な比例関係を示しており、実験的誤差のない不自然さから、相関関係というよりは、むしろエントロピーそのものではないかと疑われます。

おそらく、この発表の時点で細矢が  $\log Z_G$  の形式で、これをエントロピーであると発表していれば、数学的形式に拘っていた人々もそのまま受け容れたと考えられます。しかし、整数で扱えるトポロジカル・インデックスをわざわざ対数化して扱うメリットを見出せなかった細矢は、あえてそのようなことをしなかつただけでしょう。

その後、トポロジカル・インデックスは、エントロピーとしての扱いを受けないまま半世紀が経過することになります。化学分野での発表であったため、物理学者から取り上げられることも無かったようです。

トポロジカル・インデックスは有機分子表面の電子の、まさに量子的な状態 (ボア確率) を反映した純度の高いエントロピーであると考えられるので、物質のエントロピー研究の対象とされなかった惜しむべき半世紀間であったと考えられます。

#### 4. 素数分布とエントロピー

トポロジカル・インデックスは maximum entropy (最大エントロピー、極大エントロピー)

です。グラフ理論による汎用的で量子論との相性も優れている数え方は細矢の説明を参照していただくとし、ここでは私が用いた簡単な数え方（応用には不適）を紹介しておきます。<sup>14</sup>

世の中で一番シンプルな一次元情報系についてエントロピー  $F$  を計算してみます。世の中で一番簡単なデータ列というのは、例えば 00101111011... のような 0 と 1 を要素(元)とする一次元配列です。変化の瞬間ごと(この瞬間を  $\Delta t$  とします <sup>15</sup>)に、各要素はすぐ隣の要素と位置を換えることができます。ここではすべての交換は対称的で等確率であると考えます。

ただし、 $0 \leftrightarrow 0$ 、 $1 \leftrightarrow 1$  のように、同じ数値同士が位置を交換しても状態としては区別できない(つまり異なる状態として数えない)と考えます。ボア確率ですから量子論のように数えます。

また、100 が 001 に変わるように、二回続けての変化(この場合  $2\Delta t$  を要する)は認めません。一度に変化できるのは 0 と 1 とが隣同士のワン・ペアのみであり、101 が 010 になるような重複変化は認めません。二つ以上の 01(または 10)のペアとペアが互いに干渉し合わない限り、何ペアでも同時に変化、つまりそれぞれのペアの中で 0 と 1 が位置を交換できると考えます。

01010011 から任意の数のペアを、例えば 01010011 の下線部分のように2組選び、 $\Delta t$  後には 01100101 と変化することができると考えます。そして  $\Delta t$  後に取り得るすべての場合の数を  $F$  として計算します。

000111 は 000111 または 001011 と変化できますから  $F(000111) = 2$  と計算します。

011101 は 011101、101101、011011、011110、101011、101110 のいずれかへ変化できますから  $F(011101) = 6$  と計算します。前方の 01 と後方の 101 の変化は独立している(つまり、互いに干渉し合わない)ことに着目すれば、 $F(011101) = F(01) \times F(101) = 2 \times 3 = 6$  と計算できます。

この条件下では、同じ長さの配列では 010101 または 101010 と、両者は本質的に同じことですが、0 と 1 が交互に並んだタイプの  $F$  が最大となることは簡単に理解できます。

そこで今度は、元の個数を  $n$  とし、 $n = 0$  の状態から 1 個ずつ元を増やしながらか最大の  $F$  を計算します。結果を表に示します。

**Table.2** 一次元情報系の最大エントロピー

元の数	対称性	$F(0101\dots)$
0	0	$F() = 1$ と決める
1	0	$F(0) = 1$
2	1	$F(01) = 2$
3	2	$F(010) = 3$
4	3	$F(0101) = 5$
5	4	$F(01010) = 8$
6	5	$F(010101) = 13$
7	6	$F(0101010) = 21$

フィボナッチ数列が出てきました。世の中で一番シンプルな一次元情報系は、そのエントロピー $F$ が最大の状態を保って成長する(増殖する、要素数を増やす)とき、フィボナッチ数列を生み出すのです。

ところで、この研究の先には何があるのでしょうか。素数の分布には確率的性質のあることが知られていますが、「確率と言えばエントロピー」、人間の脳における数概念の発生にもエントロピーが関係している可能性があります。実際、トポロジカル・インデックスというエントロピーはフィボナッチ数、ルカ数、ペル数などを生み出します。

今後、物質のエントロピーについては次のように扱うのが良いのではないかと(素人なので遠慮もなく)提案させていただきます：確率的状態にある物質系について、どのようなものであれ確率的自由度の大きさをエントロピーの候補と考えてよい。確率構造の違い等によって種々のエントロピー計算式を提案してよい。物理的、化学的実験等でエネルギー移動との関係性が証明されることにより、その実在が確認され、物理的単位が与えられたものを正式の物質エントロピーとして認める。

クラウジウスのエントロピーや細矢のトポロジカル・インデックスは、これらの条件をクリアした物質のエントロピーです。

<sup>1</sup> モンティ・ホール問題を2回続けて繰り返す場合の回答パターンの例。1回目は確率を意識させないように質問し、直観的な判断を導くようにする。2回目は確率を確認しながら数学的・論理的に正しい判断を導くようにする。

出題者	ここに3つの袋があります。その中の1つに宝が入っています。他の袋は空(カラ)です。では、あなた(挑戦者)は、宝の入っていると思われる袋を1つ選んでください。		
挑戦者	(適当に袋を1つ選ぶ)		
出題者	今選んだ袋に宝のある確率は幾らですか?		
挑戦者	1/3です。		
出題者	正解です。 今選んだ袋をAとします。他の2つの袋をB、Cとしましょう。 さてB、Cのうち、宝の入っていない袋を私(出題者)が選び、その中をお見せします。これをCとしましょう。 (袋Cを開けて中身が空であることを挑戦者に見せる)		
挑戦者	(袋Cの中身が空であることを確認する)		
出題者	さあ、袋が2つ残りました。AとBです。 あなたは先ほどAを選んだわけですが、ここで選択をBに変えても良いですよ。 いかがされますか?		
挑戦者	Aのままで良いです。	挑戦者	Bに変えます。
出題者	その理由を教えてください。	出題者	その理由を教えてください。
挑戦者	AもBも同じ確率だからです。	挑戦者	AもBも同じ確率だからです。 (AよりBの確率が大きいからです、と答える挑戦者はモンティ・ホール問題を知っている)
出題者	正解です。(この段階で論理的間違いを指摘しない) では、もう一度繰り返します。 ここに3つの袋があり、その中の1つに宝が入っています。宝の入っていると思われる袋を1つ選んでください。		
挑戦者	(適当に袋を1つ選ぶ)		
出題者	今選んだ袋に宝のある確率は幾らですか?		
挑戦者	1/3です。		
出題者	正解です。 今選んだ袋をAとします。他の2つの袋をB、Cとしましょう。 袋Bに宝がある確率は幾らですか?		
挑戦者	1/3です。		

出題者	袋 C に宝がある確率は幾らですか？
挑戦者	1/3 です。
出題者	どの袋も宝のある確率は 1/3 ですね。(2 回目は確率を意識させながら質問を進める) では、袋 B と C を組み合わせます。袋 (B+C) の中に宝のある確率は幾らですか？
挑戦者	2/3 です。1/3+1/3=2/3 です。
出題者	そうですね。 袋 A に宝のある確率は 1/3、袋 (B+C) の中に宝のある確率は 2/3 です。 もしここで、袋 A か、袋 (B+C) のどちらを選んでもよいと言われたならば、誰でも当然、確率の大きい袋 (B+C) を選びますよね。よろしいですか？
挑戦者	もちろんです。
出題者	ではここで、先ほどと同じように私が、袋 B か C のうち宝の入っていない方を開けます。 (袋 C を開けて中身が空であることを挑戦者に見せる) さて、袋 (B+C) の中に宝のある確率は 2/3 でした。私が袋 C を開けましたが、袋 (B+C) の中に宝のある確率は変わらないですね。袋 (B+C) の中に宝のある確率は今も 2/3 です。 さあ、袋が 2 つ残りました。A と B です。 あなたは先ほど A を選んだわけですが、ここで選択を B に変えても良いですよ。 いかがされますか？
挑戦者	・・・・・・(悩みながら) 選択を A から B に変えます。(この段階でも選択を変えない人がいます)
出題者	袋 A を選び続けた場合に宝が当たる確率は 1/3、袋 B に選び変えた場合の確率は 2/3 です。 袋 B を選ぶことは袋 (B+C) を選ぶことなのです。納得いただけただけでしょうか？
挑戦者	・・・・・・(納得するも腑に落ちない、あるいは納得できない)

<sup>2</sup> Claude E. Shannon, Warren Weaver “*The Mathematical Theory of Communication*” (1949) 14, 49-50

<sup>3</sup> 中村滋「フィボナッチ数の小宇宙 (改訂版)」日本評論社, 2008 年第 2 版

<sup>4</sup> H Hosoya “*Topological Index. A Newly Proposed Quantity Characterizing the Topological Nature of Structural Isomers of Saturated Hydrocarbons*” Bulletin of the Chemical Society of Japan, 44 (1971) 2332-2339 [Link](#) ウェブリンクはすべて 2016.09.23 現在のものです

<sup>5</sup> H Hosoya “*Topological Index and Fibonacci Numbers with Relation to Chemistry*” The Fibonacci Quarterly 11 (1973) 255-266 [Link](#)

<sup>6</sup> 細矢治夫「トポロジカル・インデックス. フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学」日本評論社, 2012 年

<sup>7</sup> Y Horibe “*An Entropy View of Fibonacci Trees*” The Fibonacci Quarterly 20 (1982) 168-178 [Link](#)

<sup>8</sup> Y Horibe “*Notes on Fibonacci Trees and Their Optimality*” The Fibonacci Quarterly 21 (1983) 118-128 [Link](#)

<sup>9</sup> Y Horibe “*Entropy of Terminal Distributions and the Fibonacci Trees*” The Fibonacci Quarterly 26 (1988) 135-140 [Link](#)

<sup>10</sup> 堀部安一「黄金比とエントロピー」数理科学 No.294, サイエンス社, 1987 年

<sup>11</sup> 堀部安一「情報エントロピー論 (第 2 版)」森北出版, 1997 年第 2 版, 「付録: 黄金比とエントロピー」

<sup>12</sup> H Hosoya, K Kawasaki, K Mizutani “*Topological index and thermodynamic properties. I. Empirical rules on the boiling point of saturated hydrocarbons*” Bulletin of the Chemical Society of Japan, 45(1972) 3415-3421 [Link](#)

<sup>13</sup> H Narumi, H Hosoya “*Topological index and thermodynamic properties. II. Analysis of the topological factors on the absolute entropy of acyclic saturated hydrocarbons*” Bulletin of the Chemical Society of Japan, 53(1980) 1228-1237 [Link](#)

<sup>14</sup> Takashi Aarues “*The Fibonacci sequence in nature implies thermodynamic maximum entropy*” 数理解析研究所講義録 第 1852 巻 2013 年 165-176 [Link1](#) [Link2](#)

<sup>15</sup> この  $\Delta t$  は無限小の時間という意味ではありません。系が量子的に異なる別の状態に変化するのに要する最少時間以内の時間という意味です。いったいどんな時間なのかはよくわかりません。物質のエントロピーは時間やエネルギー、摩擦といった現象とも深い関係を持っています。なお、無限小の時間という概念はゼノンの背理法によって否定されます → 尾立貴志「アキレスと亀とコントロール」日本フィボナッチ協会第 13 回研究集会報告書 2016 [Link1](#) [Link2](#)

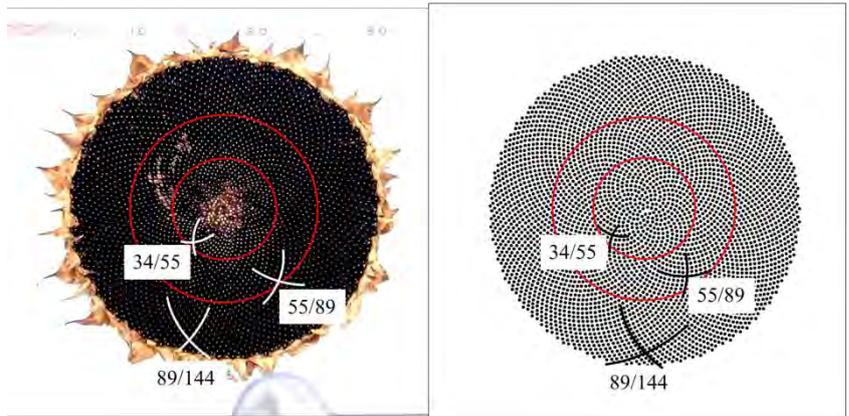
# フーリエ変換で得られる連なりらせん数

根岸利一郎 (埼玉工大)

## はじめに

よく知られているようにヒマワリの種は表面をらせん状に連なり、その連なり数(Parastichies)は図 1a の例に示すように径によって異なるが一周中で 34,55,89,144 とフィボナッチ数列に並ぶ場合が多い。この並びを真似た 2000 点のシミュレーションによる連なりらせん数もまた図 1b のように同じ数列が並ぶ。

この図に示したフィボナッチ数列となるらせん数は図からその並びをなぞって数えたものである。このなぞりは煩雑であり、開度の僅かな変化による微妙な連なり数の増減や点数が多くなった場合の計数には向かない。そこでヒマワリの種の並びを真似たシミュレーション (以後 S 配置) において確実に計数する方法が必要になる。



a) 実在のヒマワリ      b) シミュレーション

図 1. ヒマワリの種の連なりらせん

## 計数の方法

方法はシミュレーションで得られた各点間の距離を以下のように離散フーリエ変換して求める。S 配置における種の位置は円座標の  $(r_0 + r, \theta) = (r_0 + n^p, n\phi)$  として個数  $n$  と開度  $\phi$  で決まるようにとる。 $n=1000$  の場合、 $r_0$  を無視して表計算ソフトを利用して x-y 座標に変換して位置を求める。距離のフーリエ係数を求めたいので FFT を想定して個数を 2 のべき乗にとる。 $p=0.5, n=1000$  の場合は外周部 256 点を選ぶ (図 2)。各点を角度  $\theta$  について、 $2\pi$  以下の余りを求めた  $\text{MOD}(\theta, 2\pi)$  の角度順に並べる。点間の变化傾向を捉えるために各点について前後 4 点までの距離を測る。距離計算した 8 数列について

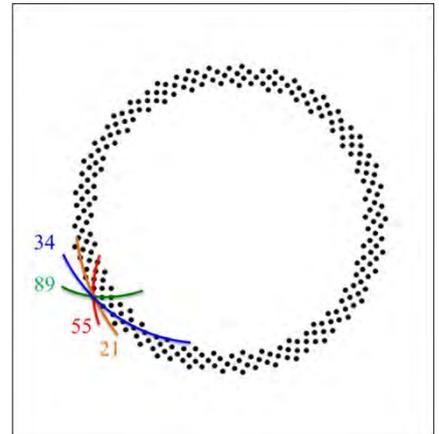
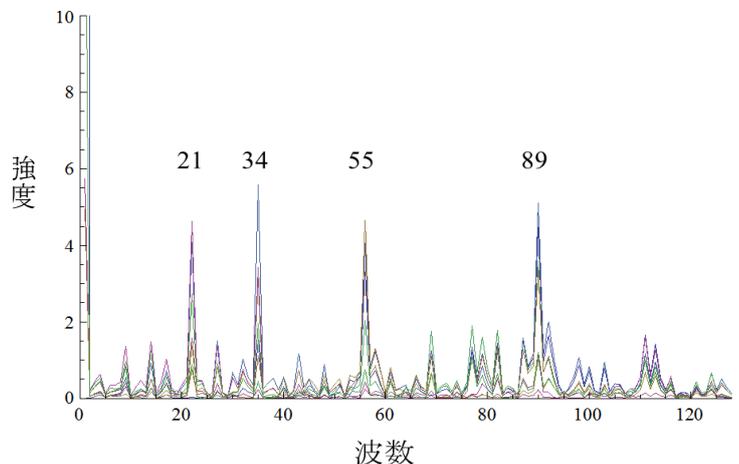


図 2. 選ばれた外周部と連なりらせん

Mathematica を利用して一次元離散フーリエ変換を行う。求めた 8 列の結果それぞれの絶対値を求め (図 3)、列を足し合わせる。Mathematica のフーリエ変換は次式に示される。注意点は一般のフーリエ係数が 0 からの総和に対して 1 からなので図のように波数を調整する。

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n \hat{a}_r e^{2\pi i(r-1)s(1)/n} \quad (s=1, 2, n)$$



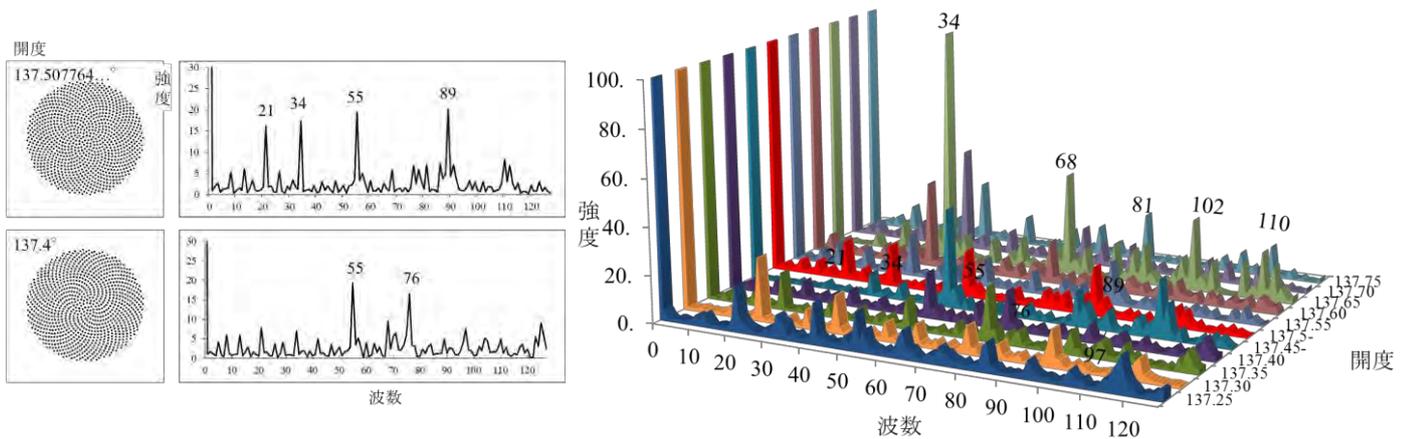
1 図 3. 8 数列それぞれのフーリエ変換結果

パイナッブル鱗片を真似た場合(以後 P 配置)の表示位置は高さ方向を  $l$  として  $(l, q) = (n^p, n^f)$  とし、個数  $n$  に併せて一定個数を対象に選び、S 配置同様な扱いで変換する。

## 結果

### 1) S 配置 1 ( $n=1000, p=0.5, 256$ 点)

黄金比を  $\tau$  としたときの開度を  $\phi_\tau = 2\pi(1-1/\tau)$  とし、その開度付近での連なり数を調べた結果の例が図 4a になる。開度が  $\phi_\tau$  の場合の連なり数は図 2 に示した連なり数と同じくフィボナッチ数列の 21, 34, 55, 89 が顕著に見える。開度がそれよりも  $0.1^\circ$  だけ小さい  $147.4^\circ$  になるとルカ数列の 76 が混じる。開度が  $137.25^\circ$  から  $137.75^\circ$  までの結果をまとめたのが図 4b であり、各種のフィボナッチ数が現れる。これらの連なり数は表 1 に示す一般フィボナッチ数列のどれかに相当する。



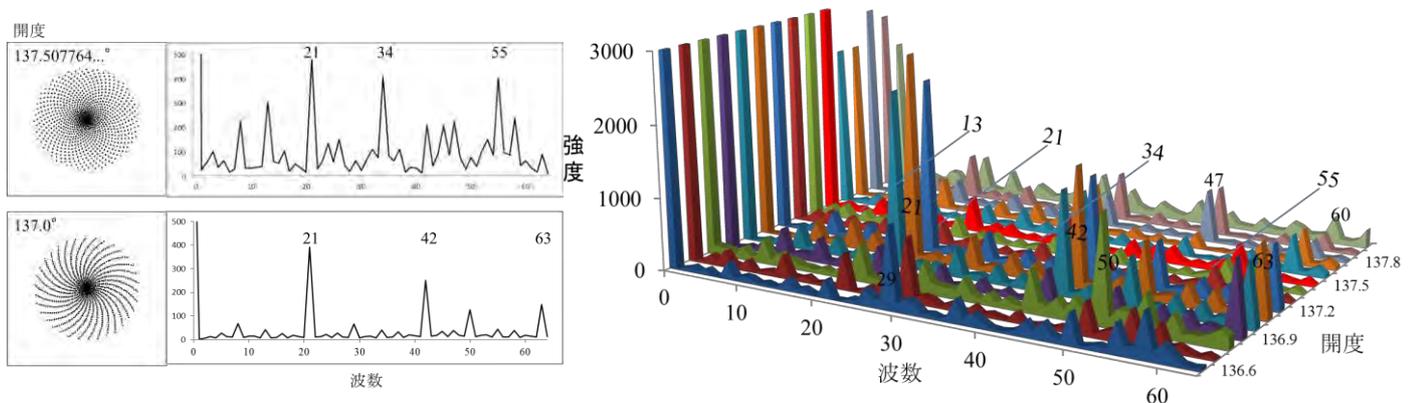
a)  $\phi_\tau$  と  $137.4^\circ$  での変換結果

b)  $\phi_\tau$  付近の開度に伴う連なり数

図 4. S 配置 1 の開度に伴う連なり数の変化

### 2) S 配置 2 ( $n=1000, p=1, 128$ 点)

開度  $\phi$  が  $\phi_\tau$  付近での連なり数を調べた結果 (5a) では、開度が  $\phi_\tau$  の場合の連なり数はフィボナッチ数列の 13, 21, 34, 55 が顕著に見える。開度がそれよりも  $0.5^\circ$  小さい  $137.0^\circ$  になると点分布の一様性がなくなり、高調波の 42 や 63 が混じる。  $136.6^\circ$  から  $138.0^\circ$  までの結果をまとめたのが図 5b であり、各種のフィボナッチ数列が現れる。



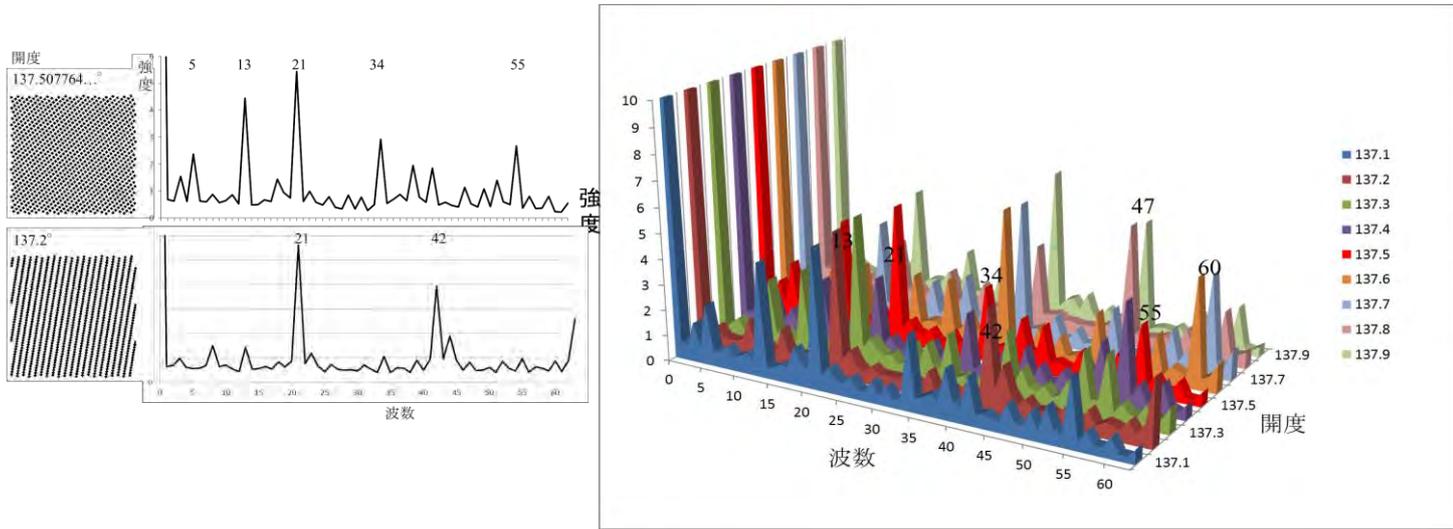
a)  $\phi_\tau$  と  $137.0^\circ$  での変換結果

b)  $\phi_\tau$  付近の開度に伴う連なり数

図 5. S 配置 2 の開度に伴う連なり数の変化

3) P 配置 ( $n=1000, p=1, 128$  点)

S 配置の場合と同様に開度が  $\phi_r$  となる場合にはフィボナッチ数列の連なり数になるが、開度が少しでも変わると連なり数も他の一般フィボナッチ数列や高調波が見える場合もある。



a)  $\phi_r$  と  $137.2^\circ$  での変換結果

b)  $\phi_r$  付近の開度に伴う連なり数

図 6. P 配置での開度に伴う連なり数の変化

表 1. 連なり数として現れたフィボナッチ数列 (赤字がフーリエ変換で顕著な連なり数)

F:	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...
L:	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...
G:	1	4	5	9	14	23	37	60	97	157	254	...
	:2	5	7	12	19	31	50	81	131	212	343	...

42=21×2, 68=34×2, 102=34×3, 110=55×2

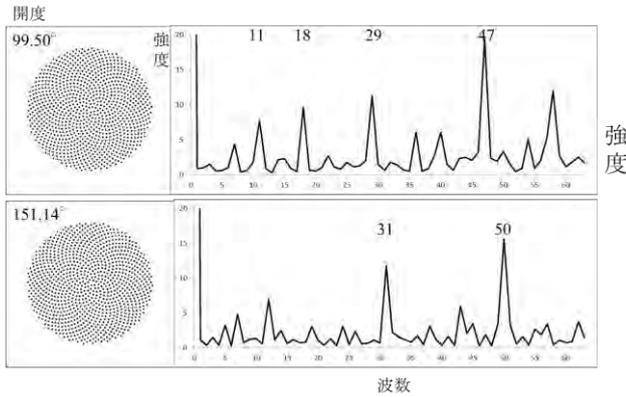
検討

S 配置および P 配置におけるシミュレーションから各点間距離をフーリエ変換した結果による連なりらせん数は、開度が  $\phi_r$  の場合にフィボナッチ数列になることが観測できる。しかし、開度が  $0.1^\circ$  でも変化すると他の一般フィボナッチ数列の数値が混在する。他方、図 5a の  $137.0^\circ$  や図 6a の  $137.2^\circ$  では高調波の  $42=2 \times 21$ 、 $63=3 \times 21$  が見える。これは図からわかるように点分布の一様性が崩れ、基本波である 21 が強いためにフーリエ変換によって基本波の整数倍の高調波が見えるためであり、実在の連なり数ではない。

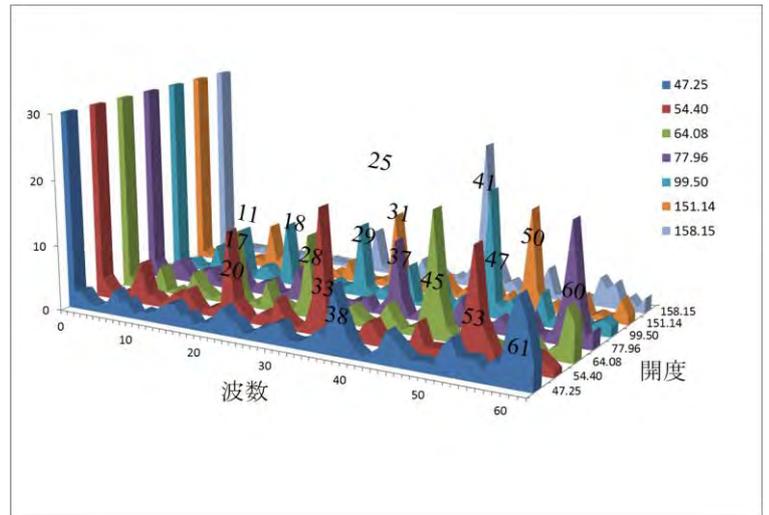
Jean(2009)は S 位置において一様に近い点分布の連なり数について開度との関係を定式化し、下に示す結果を得ている。このような点分布の連なり数についてここで検討したフーリエ変換の方法で計数してみる。各開度についての開度が  $99.50^\circ$  と  $151.14^\circ$  の場合が図 7a でありその他の開度をまとめたのが b である。それぞれの開度における連なり数 (赤字) が再現される。

表 2. 連なり数として現れたフィボナッチ数列 (赤字がフーリエ変換で顕著な連なり数)

											開度	
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...	$137.51^\circ$
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...	$99.50^\circ$
1	4	5	9	14	23	37	60	97	157	254	...	$77.96^\circ$
1	5	6	11	17	28	45	73	118	191	309	...	$64.08^\circ$
1	6	7	13	20	33	53	86	139	225	364	...	$54.40^\circ$
1	7	8	15	23	38	61	99	160	259	419	...	$47.25^\circ$
2	5	7	12	19	31	50	81	131	212	343	...	$151.14^\circ$
2	7	9	16	25	41	66	107	173	280	453	...	$158.15^\circ$



a) 99.50° と 151.14° での変換結果



b) 表 2 の開度での変換結果をまとめた

図 7. S 配置での開度に伴う一般フィボナッチ数列としての連なり数

他方, S 配置において開度が僅かに変化したときや点数が 100000 点にもなると手作業で連なり数を確認することは誤りが混入しやすく詳細な検討には適さない。開度が  $\phi_r$  の場合の周辺部 4096 点を対象にフーリエ変換した結果が図 8 である。フィボナッチ数列 (赤) だけでなくルカ数列 (緑) やその他の数列 (青) も確認することができる。

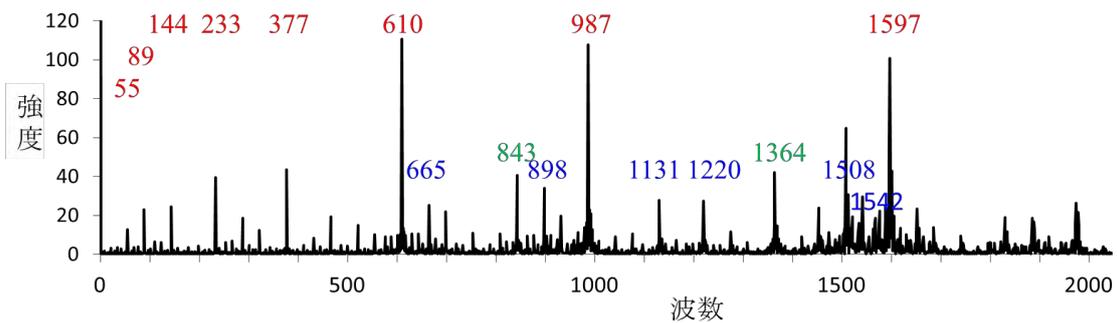


図 8. S 配置における開度  $\phi_r$  で点数 100000 点での連なり数

## まとめ

ヒマワリの種やパイナップルの鱗片を点で真似たシミュレーションにおいて、点間距離のフーリエ変換を利用して連なり数を計数した。その結果、開度との関連において連なり数としてのフィボナッチ数列やルカ数列その他の一般フィボナッチ数列を確認することができた。その連なり数は開度の僅かな違いでもフィボナッチ数やルカ数が混在した。また、100000 点にもなる点分布でも連なり数を直接確認することができた。このような多点の場合には連なり数として一般フィボナッチ数が内蔵されていることが確認できる。空間における点分布の連なりを検討する場合にはここで紹介したフーリエ変換の方法が有効と考えられる。

Jean, Roger V.: *Phyllotaxis*, Cambridge University Press(2009)

# フィボナッチ数を含むある級数

一松 信\*

フィボナッチ数列  $f_n$  を以下のように定義する

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, (n \geq 1). (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 34, \dots)$$

$\arctan$  を正の実数に対して  $0$  と  $\frac{\pi}{2}$  の間の値をとる主値とする. このとき次の関係式が成立する.(周知の事実と思うが, 面白いと思ったので紹介したい)

$$\arctan \frac{1}{f_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{f_{2n+2}} = \arctan \frac{1}{f_{2n}} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n+1}} = \arctan \frac{1}{f_2} = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

**実例 1**  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ .

$$\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan \frac{1}{3}.$$

**実例 2**  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{13} + \arctan \frac{1}{34} + \dots = \frac{\pi}{4}$ .

**補助定理 1**

$$f_k f_{k+3} - f_{k+1} f_{k+2} = (-1)^{k-1}. \quad (3)$$

証明

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n - (-\tau^{-1})^n)$ ,  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $-\tau^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  によって計算してもよい, しかし次のように漸化式で容易に計算できる.

$$\text{左辺} = d_k = \begin{vmatrix} f_k & f_{k+1} \\ f_{k+2} & f_{k+3} \end{vmatrix} \text{ である. 第2列} - \text{第1列を作ると漸化式により}$$

---

\*一松信先生が欠席のため中村滋先生が報告

$d_k = \begin{vmatrix} f_k & f_{k+1} - f_k \\ f_{k+2} & f_{k+3} - f_{k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_k & f_{k-1} \\ f_{k+2} & f_{k+1} \end{vmatrix} = -d_{k-1}$  である. これを反復すれば

$$d_k = (-1)^{k-1} d_1 = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \text{ である. } \square$$

(1) の証明

左辺を  $\arctan \theta$  とまとめると, 正接の加法定理により

$$\theta = \frac{\frac{1}{f_{2n+1}} + \frac{1}{f_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{f_{2n+1}f_{2n+2}}} = \frac{f_{2n+1} + f_{2n+2}}{f_{2n+1} \cdot f_{2n+2} - 1}$$

である. この分子は  $f_{2n+3}$  に等しい. また分母は補助定理により ( $k = 2n$  として)  $f_{2n} \cdot f_{2n+3}$  に等しく,  $\theta = \frac{1}{f_{2n}}$  である.  $\square$

(2) の証明

(1) から

$$\arctan \frac{1}{f_{2n+1}} = \arctan \frac{1}{f_{2n}} - \arctan \frac{1}{f_{2n+2}}$$

である. これを順次加えれば中間項は消えて

$$\sum_{n=1}^N \arctan \frac{1}{f_{2n+1}} = \arctan \frac{1}{f_2} - \arctan \frac{1}{f_{2N+2}}$$

となる.  $N \rightarrow \infty$  のとき  $f_{2N+2} \rightarrow \infty$ ,  $\arctan \frac{1}{f_{2N+2}} \rightarrow 0$  となり, この和は  $\arctan \frac{1}{f_2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$  に等しい.  $\square$

(出典) *Amer. Math. Monthly* の *Monthly Problem*, 2016 年 5 月号, #11910 : 次の級数の和を求めよ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \arctan \frac{1}{f_{4n+1}} + \arctan \frac{1}{f_{4n+2}} + \arctan \frac{1}{f_{4n+3}} - \arctan \frac{1}{f_{4n+4}} \right)$$

# “新しい” フィボナッチ数・リュカ数の公式について

東京海洋大学名誉教授 中村 滋

はじめに

最近, Fibonacci Quarterly (以下 FQ) 以外の雑誌に Fibonacci 数関連の論文が載るようになりました. 様々な雑誌に散らばっていた論文を一つにまとめようという目的で創刊された雑誌なので, 50年前の状況に戻りつつあるのはとても残念なことです.

それはともかくとして, American Mathematical Monthly (以下 AMM) に載った3つの小さな論文について簡単に報告します.

## Sury の定理

B.Sury [8] は次の定理を証明しました :

$$\text{定理 S} \quad \sum_{k=0}^n 2^k L_k = 2^{n+1} F_{n+1}. \quad \dots\dots (1)$$

Sury による定理 S の証明は初等的で面白いので紹介しましょう.

(証明) 使うのは等比級数の和の公式です :

$$\sum_{k=0}^n \{(2u)^k (u+v)^{n-k}\} = \{(2u)^{n+1} - (u+v)^{n+1}\} / (u-v),$$

$$\sum_{k=0}^n \{(2v)^k (u+v)^{n-k}\} = \{(u+v)^{n+1} - (2v)^{n+1}\} / (u-v).$$

この2式を加えると,

$$\sum_{k=0}^n [\{(2u)^k + (2v)^k\} (u+v)^{n-k}] = \{(2u)^{n+1} - (2v)^{n+1}\} / (u-v).$$

$t^2 - t - 1 = 0$  の根を  $\alpha, \beta$  とし,  $u = \alpha, v = \beta$  とおけば,  $\alpha + \beta = 1$  なので,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) / (\alpha - \beta) = \sum_{k=0}^n \{2^k (\alpha^k + \beta^k) (\alpha + \beta)^{n-k}\} / 2^{n+1} \\ &= (\sum_{k=0}^n 2^k L_k) / 2^{n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

(注) この2式の差を取ると, 同様にして,

$$2^{n+1} L_{n+1} = 5 (\sum_{k=0}^n 2^k F_k) + 2 \quad \dots\dots (2)$$

が得られます.

H.Kwong [2] はすかさず別証を工夫しました. ここで使うのは生成関数です.

$$\text{(証明)} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n x^n) = x / (1 - x - x^2),$$

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (L_n x^n) = (2 - x) / (1 - x - x^2).$$

$$\therefore L(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n L_n x^n = (2 - 2x) / (1 - 2x - 4x^2)$$

$$= 2x / (1 - 2x - 4x^2) \times (1 - x) / x = (1 - x) F(2x) / x.$$

合成積 (convolution) によって,

$$L(2x) / (1 - x) = \{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^k L_k x^k \} \{ \sum_{m=0}^{\infty} x^m \}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2^k L_k x^{k+m}). \quad \text{ここで } k+m=n \text{ とおいてまとめ直すと,} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \sum_{k=0}^n 2^k L_k \right) x^n \right\} = F(2x) / x = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n F_n x^{n-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} F_{n+1} x^n).
\end{aligned}$$

$x^n$  の係数を比較して定理を得る. □

### Marques の定理

続いて D.Marques [3] は次の定理を証明しました :

$$\text{定理M} \quad \sum_{k=0}^m 3^k L_k + \sum_{k=0}^m 3^{k-1} F_k = 3^{m+1} F_{m+1}. \quad \dots\dots (3)$$

これらは Thomas Koshy [1] には載っていないので, (1) (2) も含めて「新しい公式」  
 と思ったのは仕方ありませんが, じつはかなり前に, より一般的な形で知られていた定理で  
 す. 私は 20 年ほど前に, チェビシエフ多項式を使って次の定理を証明しました ([5]  
 Theorem 3; インターネット上で読めます. なお, [4] の Theorem 4 は (1) (2) と同じ,  
 Theorem 7 は下記 Theorem N と同じです).

### 定理N

$$(a) \quad \sum_{k=0}^n p^k F_k = \{p^{n+1} (F_{n+1} + p F_n) - p\} / (p^2 + p - 1). \quad \dots\dots (4)$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n p^k L_k = \{p^{n+1} (L_{n+1} + p L_n) + p - 2\} / (p^2 + p - 1). \quad \dots (5)$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^n p^k F_{2k} = \{p^{n+1} ((p-2) F_{2n} - F_{2n-1}) - p\} / (p^2 - 3p + 1)$$

$$(d) \quad \sum_{k=0}^n p^k L_{2k} = \{p^{n+1} ((p-2) L_{2n} - L_{2n-1}) - 3p + 2\} / (p^2 - 3p + 1)$$

(注) (a) (b) で  $p=2$  とおけば,  $\sum_{k=0}^n 2^k F_k = \{2^{n+1} (F_{n+1} + 2 F_n) - 2\} / 5$   
 および  $\sum_{k=0}^n 2^k L_k = 2^{n+1} (L_{n+1} + 2 L_n) / 5$  となるが,  $F_{n+1} + 2 F_n = F_{n+2} + F_n = L_{n+1}$ ,  
 $L_{n+1} + 2 L_n = L_{n+2} + L_n = 5 F_{n+1}$  であることから, (1) (2) は明らかである.  
 (3) の証明は後述する. 定理N の証明には チェビシエフ多項式を使うので,  
 定義から述べる.

**定義** 第1種と第2種の変形チェビシエフ多項式 (modified Chebyshev Polynomials of the 1st & 2nd kinds) は, 自然数  $n$  と  $x = 2 \cos \theta$  に対して,  $t_n(x) = 2 \cos n \theta$ , および

$u_n(x) = \sin\{(n+1)\theta\} / \sin \theta$  と定義され, 再帰的な次の式を満たします :

$$t_{n+2}(x) = x t_{n+1}(x) - t_n(x); \quad t_0(x) = 2, \quad t_1(x) = x.$$

$$u_{n+2}(x) = x u_{n+1}(x) - u_n(x); \quad u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = x.$$

$x$  の式で explicit に書くと,

$$t_n(x) = \left\{ \left( x + \sqrt{x^2 - 4} \right) / 2 \right\}^n + \left\{ \left( x - \sqrt{x^2 - 4} \right) / 2 \right\}^n,$$

$$u_n(x) = \left[ \left\{ \left( x + \sqrt{x^2 - 4} \right) / 2 \right\}^{n+1} + \left\{ \left( x - \sqrt{x^2 - 4} \right) / 2 \right\}^{n+1} \right] / \sqrt{x^2 - 4}$$

となります.

チェビシェフ多項式についての包括的な著書 [6] において, Rivlin は,  $F_n$  と  $L_n$  を  $t_n(i) = i^n L_n$ ,  $u_{n-1}(i) = i^{n-1} F_n$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) によって定義しました.

その他の式も含めて, 次の定理が成り立ちます(中村 [5], 定理 A 1).

### 定理 C

- (1)  $t_{2n-1}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = \sqrt{5} F_{(2n-1)(2m-1)}$ ,
- (2)  $t_{2n}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = L_{2n(2m-1)}$ ,
- (3)  $t_n(i L_{2m-1}) = i^n L_{n(2m-1)}$ ,
- (4)  $u_{2n-1}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = \sqrt{5} F_{2n(2m-1)} / L_{2m-1}$ ,
- (5)  $u_{2n}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = L_{(2n+1)(2m-1)} / L_{2m-1}$ ,
- (6)  $u_{n-1}(i L_{2m-1}) = i^{n-1} F_{n(2m-1)} / F_{2m-1}$ .
- (7)  $t_{2n-1}(i \sqrt{5} F_{2m}) = i \sqrt{5} (-1)^{n-1} F_{(2n-1)2m}$ ,  $t_{2n}(i \sqrt{5} F_{2m}) = (-1)^n L_{4nm}$ ,
- (8)  $t_n(L_{2m}) = L_{2nm}$ ,
- (9)  $u_{2n-1}(i \sqrt{5} F_{2m}) = i \sqrt{5} (-1)^{n-1} F_{4nm} / L_{2m}$ ,
- (10)  $u_{2n}(i \sqrt{5} F_{2m}) = (-1)^n L_{2m(2n+1)} / L_{2m}$ ,  $u_{n-1}(L_{2m}) = F_{2mn} / F_{2m}$ .

(定理 N の証明) オイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  と等比級数の和の公式より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (p e^{i\theta})^k &= \sum_{k=0}^n (p^k \cos k\theta) + i \sum_{k=0}^n (p^k \sin k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n p^k t_k(x) + \sqrt{x^2 - 4} \sum_{k=0}^n p^k u_{k-1}(x) \\ &= [p^{n+1} \{\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta\} - 1] / \{p(\cos \theta + i \sin \theta) - 1\} \\ &= [p^{n+1} \{t_{n+1}(x) + \sqrt{x^2 - 4} u_n(x) - 4\}] / \{p x - 2 + p \sqrt{x^2 - 4}\} \end{aligned}$$

となる ( $p$  は任意の実数). ここで  $x = i$  ( $= i L_1$ ) と  $3$  ( $= L_2$ ) を代入して定理を得る.  $\square$

### (定理 M の証明)

定理 N (a) (b) で  $p = 3$  とおいて,  $F_n + L_n = 2 F_{n+1}$  と  $L_{n-1} + 3 L_n = 2 L_n + L_{n+1} = L_n + L_{n+2} = 5 F_{n+1}$ , を用いると,

$$\begin{aligned} &11 \{ \sum_{k=0}^m 3^k L_k + (\sum_{k=0}^{m+1} 3^k F_k) / 3 \} \\ &= \{ 3^{m+1} (L_{m+1} + 3 L_m) + 1 \} + \{ 3^{m+1} (F_{m+2} + 3 F_{m+1}) - 1 \} \\ &= \{ 3^{m+1} (L_m + \underline{L_{m-1}} + 3 \underline{L_m}) \} + \{ 3^{m+1} (\underline{F_{m+1}} + \underline{F_m} + 3 F_{m+1}) \} \\ &= 3^{m+1} \{ (L_m + \underline{5 F_{m+1}}) + (4 F_{m+1} + F_m) \} \\ &= 3^{m+1} \{ (\underline{L_m} + \underline{F_m}) + 9 F_{m+1} \} = 11 \cdot 3^{m+1} F_{m+1}. \end{aligned}$$

よって,  $\sum_{k=0}^m 3^k L_k + (\sum_{k=0}^{m+1} 3^k F_k) / 3 = 3^{m+1} F_{m+1}$ .

となって (3) になる. Marques 自身はこの定理を数学的帰納法で証明した.  $\square$

なお C. Padilla [7] は, FQ の問題 B98 の解答で次のフィボナッチ数の有限生成関数を得ましたが, これは 定理 N (a) と同等です.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n F_k x^k = \{x^{n+1}(F_n x + F_{n+1}) - x\} / (x^2 + x - 1).$$

Padilla の証明は わずか 3 行, とてもシンプルです :

(Proof) One easily sees that

$$(x^2 + x - 1) S_n(x) = -x + (F_{n-1} + F_n) x^{n+1} + F_n x^{n+2}.$$

$$\text{Hence } S_n(x) = (-x + F_{n+1} x^{n+1} + F_n x^{n+2}) / (x^2 + x - 1). \quad \square$$

さらに Zeitlin は Padilla の解に対して, 彼ら以前に より一般的な式を得ていたことを注意して, priority を主張しました [9] :

**定理 Z** 線形再帰関係  $U_{n+2} = q U_{n+1} - p U_n$  と初期値  $U_0, U_1$  で決まる数列に対して,  $x^2 - q x + p = 0$  の根を  $r_1, r_2$  ( $r_1 \neq r_2$ ) とし,  $S_b = r_1^b + r_2^b$  とおくと 次式が成り立つ :

$$(1 - S_b x + p^b x^2) \sum_{k=0}^n U_{b k + d} x^k = p^b x^{n+2} U_{b n + d} - x^{n+1} U_{b n + b + d} + x U_{b + d} + (1 - x S_b) U_d.$$

$p = -1, q = 1, U_0 = 0, U_1 = 1$  に対して,  $U_n = F_n$  であり,  $S_b = L_b$  となるから,

$$(1 - L_b x + (-1)^b x^2) \sum_{k=0}^n F_{b k + d} x^k = (-1)^b x^{n+2} F_{b n + d} - x^{n+1} F_{b n + b + d} + x F_{b + d} + (1 - x L_b) F_d. \quad \dots\dots (6)$$

特に,  $b = 1, d = 0$  とすると,

$$(1 - x - x^2) \sum_{k=0}^n F_k x^k = -x^{n+2} F_n - x^{n+1} F_{n+1} + x.$$

となって, Padilla の式になります. 余りにも一般的すぎて, 気付かなかった感じです.

Fibonacci Quarterly の創刊直後には, 意欲的な論文や問題がたくさん寄せられたのです.

**謝辞** 昨年につき, 大関さんと今回欠席の秋山仁さんのお骨折りによって東京理科大学でこの研究集会が開かれることになりました. 有難うございました.

## REFERENCES

- [ 1 ] T.Koshy; "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications"; John Wiley & sons (2001)
- [ 2 ] H.Kwong ; An Alternate Proof of Sury's Fibonacci-Lucas Relation ; AMM 121-6, p.514 ; 2014
- [ 3 ] D.Marques ; A New Fibonacci-Lucas relation ; AMM122-7, p.683 ; 2015
- [ 4 ] 中村滋 ; Some new Fibonacci and Lucas identities ; J. of the Tokyo University of Mercantile Marine (Natural Sciences) ; No.45.pp.81-93 ; 1995
- [ 5 ] 中村滋 ; Some Fibonacci & Lucas identities via the Chebyshev Polynomials ; J. of the Tokyo University of Mercantile Marine (Natural Sciences) ; No.47.pp.53-61 ; 1997
- [ 6 ] T. J. Rivlin; "Chebyshev Polynomials: From Application Theory to Algebra and Number

Theory” 2<sup>nd</sup> Edition ; John Wiley & sons (1990)

[ 7 ] C. Padilla ; Solution to the problem B98 (proposed by Lind, FQ 4(3) ; 1966) ;  
FQ 5(2),1967

[ 8 ] B.Sury ; A Polynomial Parent to a Fibonacci-Lucas relation ; AMM 121-3, p.236 ;  
2014

[ 9 ] D.Zeitlin, On summation formulas for Fibonacci and Lucas Numbers ; FQ 2(2),  
pp.105–107 ; 1964

# 格子の対角線の長さの Euler関数による表現

海城中学校2年

山田 宗太郎

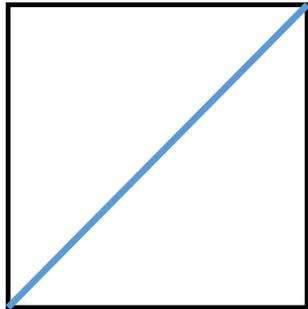
# Contents

- 1、 目的
- 2、 方法
- 3、 結果
- 4、 考察
- 5、 証明

# 目的

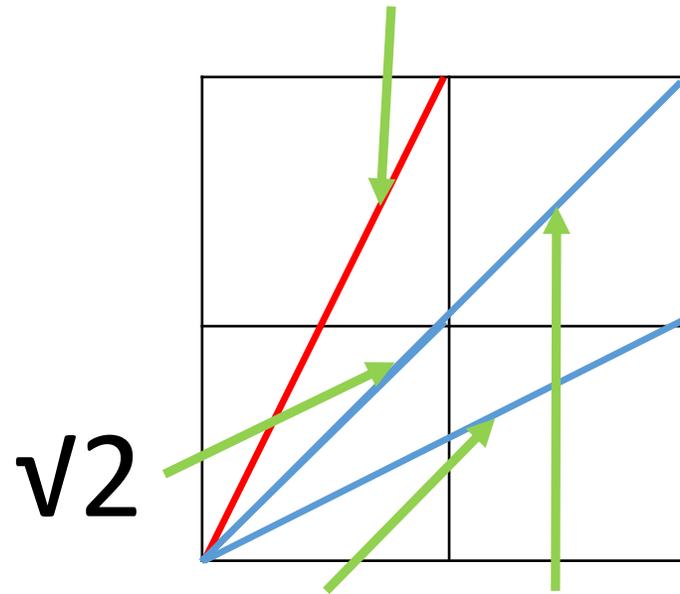
格子の対角線の長さに関する規則をEuler関数を使って表す。

# 方法



$\sqrt{2}$

$\sqrt{5}$ と同じ

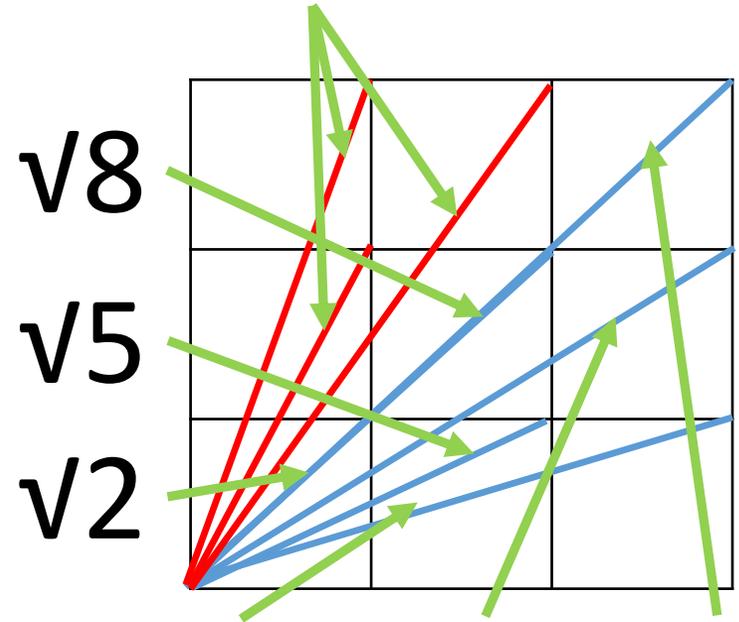


$\sqrt{2}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{8}$

数えない



$\sqrt{8}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{2}$

$\sqrt{10}$

$\sqrt{13}$

$\sqrt{18}$

# 結 果



格子の面積

1×1	$\sqrt{2}$																	
2×2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$															
3×3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$												
4×4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$	$\sqrt{20(2\sqrt{5})}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{32(4\sqrt{2})}$								
5×5	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$	$\sqrt{20(2\sqrt{5})}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32(4\sqrt{2})}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{50(5\sqrt{2})}$			
6×6	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$	$\sqrt{20(2\sqrt{5})}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32(4\sqrt{2})}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40(2\sqrt{10})}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{45(3\sqrt{5})}$	$\sqrt{50(5\sqrt{2})}$
7×7	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$	$\sqrt{20(2\sqrt{5})}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32(4\sqrt{2})}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40(2\sqrt{10})}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{45(3\sqrt{5})}$	$\sqrt{50(5\sqrt{2})}$
8×8	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$	$\sqrt{20(2\sqrt{5})}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32(4\sqrt{2})}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40(2\sqrt{10})}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{45(3\sqrt{5})}$	$\sqrt{50(5\sqrt{2})}$
9×9	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$	$\sqrt{20(2\sqrt{5})}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32(4\sqrt{2})}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40(2\sqrt{10})}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{45(3\sqrt{5})}$	$\sqrt{50(5\sqrt{2})}$
10×10	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8(2\sqrt{2})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18(3\sqrt{2})}$	$\sqrt{20(2\sqrt{5})}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32(4\sqrt{2})}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40(2\sqrt{10})}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{45(3\sqrt{5})}$	$\sqrt{50(5\sqrt{2})}$

格子の面積

6×6	$\sqrt{52(2\sqrt{13})}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{72(6\sqrt{2})}$															
7×7	$\sqrt{50}$	$\sqrt{52(2\sqrt{13})}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{72(6\sqrt{2})}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{98(7\sqrt{2})}$								
8×8	$\sqrt{50}$	$\sqrt{52(2\sqrt{13})}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{68(2\sqrt{17})}$	$\sqrt{72(6\sqrt{2})}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{80(4\sqrt{5})}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{89}$	$\sqrt{98(7\sqrt{2})}$			
9×9	$\sqrt{50}$	$\sqrt{52(2\sqrt{13})}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{68(2\sqrt{17})}$	$\sqrt{72(6\sqrt{2})}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{80(4\sqrt{5})}$	$\sqrt{82}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{85}$			
10×10	$\sqrt{50}$	$\sqrt{52(2\sqrt{13})}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{68(2\sqrt{17})}$	$\sqrt{72(6\sqrt{2})}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{80(4\sqrt{5})}$	$\sqrt{82}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{85}$			

格子の面積

8×8	$\sqrt{100(2\sqrt{25})}$	$\sqrt{113}$	$\sqrt{128(8\sqrt{2})}$															
9×9	$\sqrt{89}$	$\sqrt{90(3\sqrt{10})}$	$\sqrt{97}$	$\sqrt{98(7\sqrt{2})}$	$\sqrt{100(2\sqrt{25})}$	$\sqrt{106}$	$\sqrt{113}$	$\sqrt{117(3\sqrt{13})}$	$\sqrt{128(8\sqrt{2})}$	$\sqrt{130}$	$\sqrt{145}$							
10×10	$\sqrt{89}$	$\sqrt{90(3\sqrt{10})}$	$\sqrt{97}$	$\sqrt{98(7\sqrt{2})}$	$\sqrt{100(2\sqrt{25})}$	$\sqrt{101}$	$\sqrt{104(2\sqrt{26})}$	$\sqrt{106}$	$\sqrt{109}$	$\sqrt{113}$	$\sqrt{116(2\sqrt{29})}$							

格子の面積

9×9	$\sqrt{162(9\sqrt{2})}$																	
10×10	$\sqrt{117(3\sqrt{13})}$	$\sqrt{125(5\sqrt{5})}$	$\sqrt{128(8\sqrt{2})}$	$\sqrt{130}$	$\sqrt{136(2\sqrt{34})}$	$\sqrt{145}$	$\sqrt{149}$	$\sqrt{162(9\sqrt{2})}$	$\sqrt{164(2\sqrt{41})}$	$\sqrt{181}$	$\sqrt{200(10\sqrt{2})}$							

- 青色の文字の数は、ルート内の数字が素数のものを表しています。
- 背景が水色の数は、ルート内の数が分解できるものを表しています。

# 考察

格子の一边の数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
対角線の長さのルートの中の数分解出来るものの数	0	1	2	4	5	9	10	14	17	23

1

分解・・・ $\sqrt{a^2k} \Rightarrow a\sqrt{k}$   
 $(a, k \in \mathbb{N}, k > 1)$

3 × 3     $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}(2\sqrt{2}), \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{18}(3\sqrt{2})$

格子の一边の数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
対角線の長さのルートの中の数が分解出来るものの数	0	1	2	4	5	9	10	14	17	23

1 1 2 1 4 1 4 3 6

$6 - \phi(6)$

この階差は、

大きいほうの格子の一边の数から大きいほうの格子の一边の数のEuler関数を引いた数

Euler関数 ( $\phi(n)$ ) は、 $n (\in \mathbb{N})$  と互いに素な自然数 (但し、1 から  $n$  まで) の数を表す。

$$\text{(例)} \quad \phi(6) = 2$$

一般に  $n = 2^p \times 3^q \times 5^r \times 7^s \dots$  ( $n$  の素因数分解) に対し、

$$\phi_{(n)} = n \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{7}\right) \times \dots$$

となり、

$$\begin{aligned} \text{(例)} \quad n &= 30 \\ &= 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \\ \phi_{(30)} &= 30 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 30 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \\ &= 8 \end{aligned}$$

格子の数の中で対角線の長さのルートの中の数が分解できるものの個数を  $D_{(1)}$ 、 $D_{(2)}$ 、 $D_{(3)}$ 、 $\dots$ 、 $D_{(n)}$  と表すことにします。

( ) 内の数字は、格子の一辺の数です。

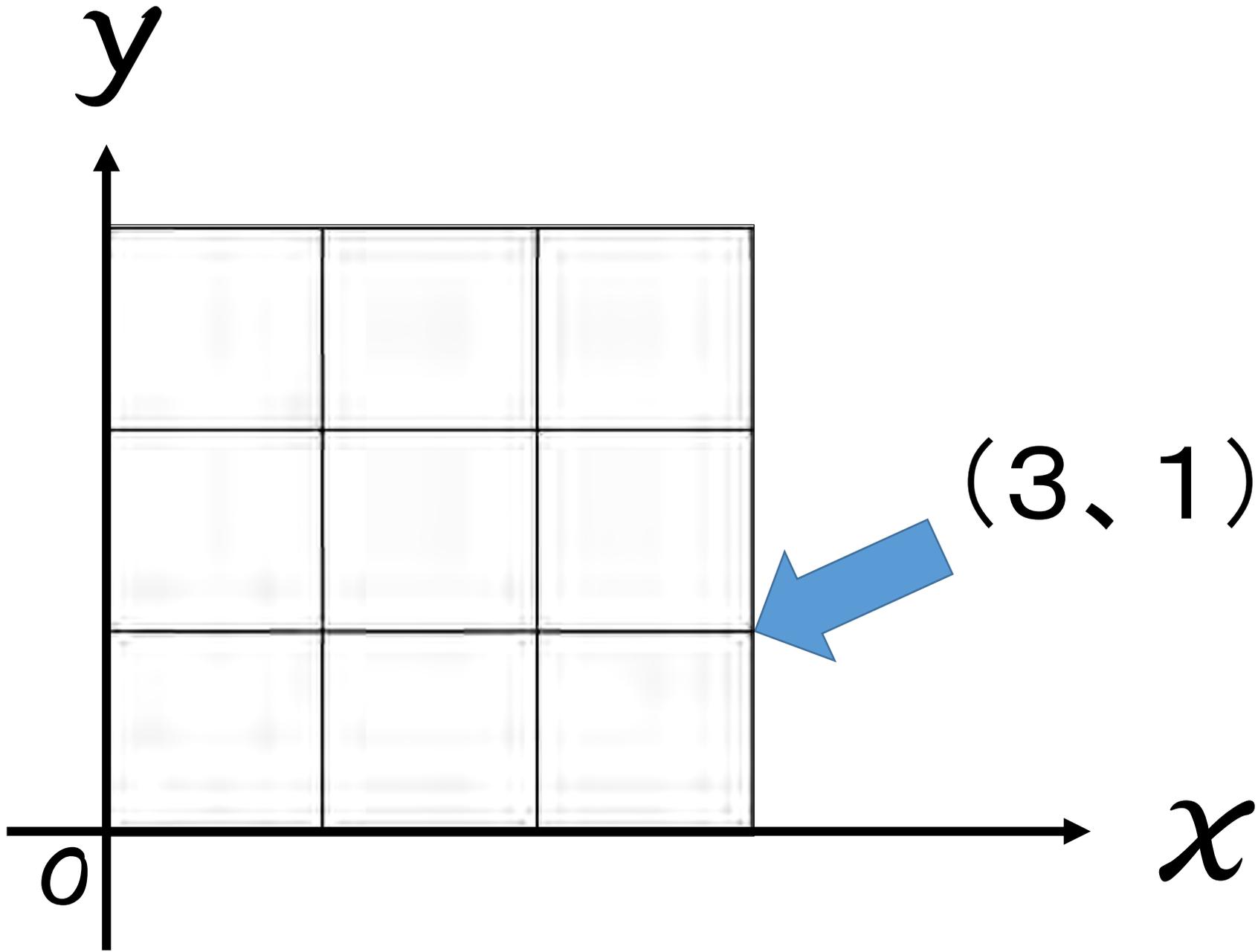
このとき、予想

$$D_{(n)} - D_{(n-1)} = n - \phi_{(n)} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

を得ました。

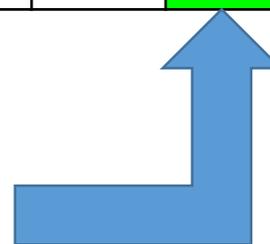
$n$  が 6 のとき、 $D(6) - D(5)$  は  $6 - \phi(6) = 4$

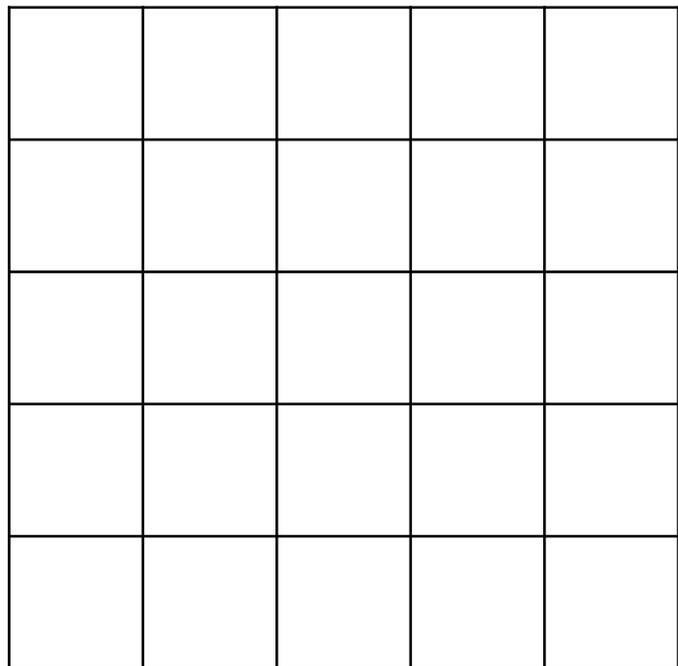
# 証 明



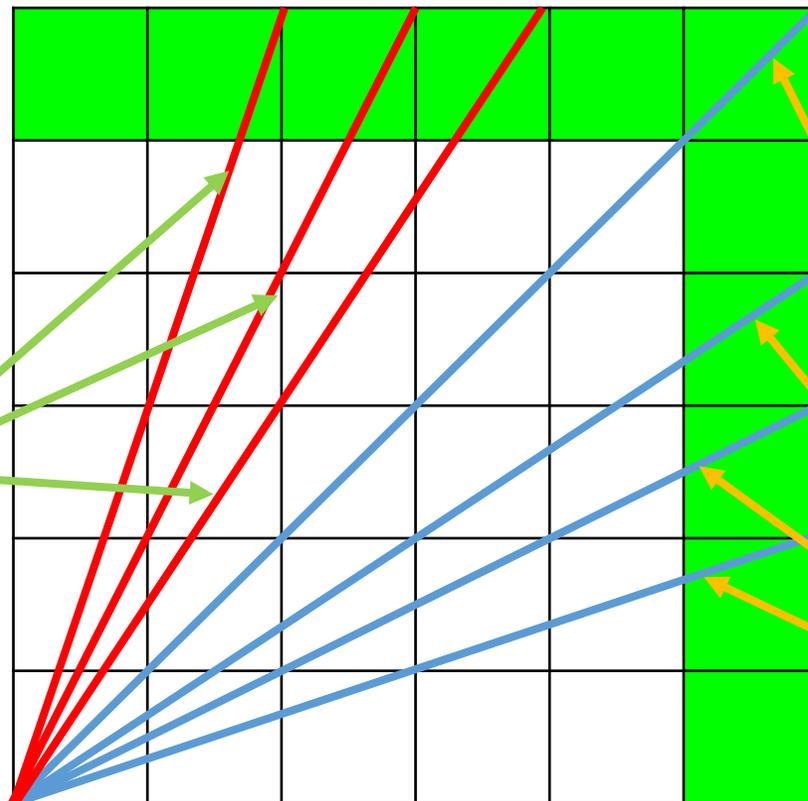


増やす

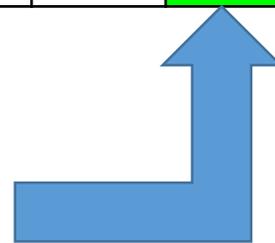




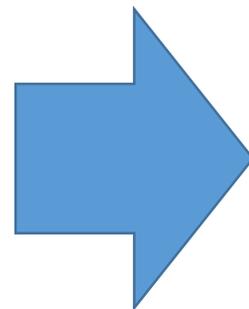
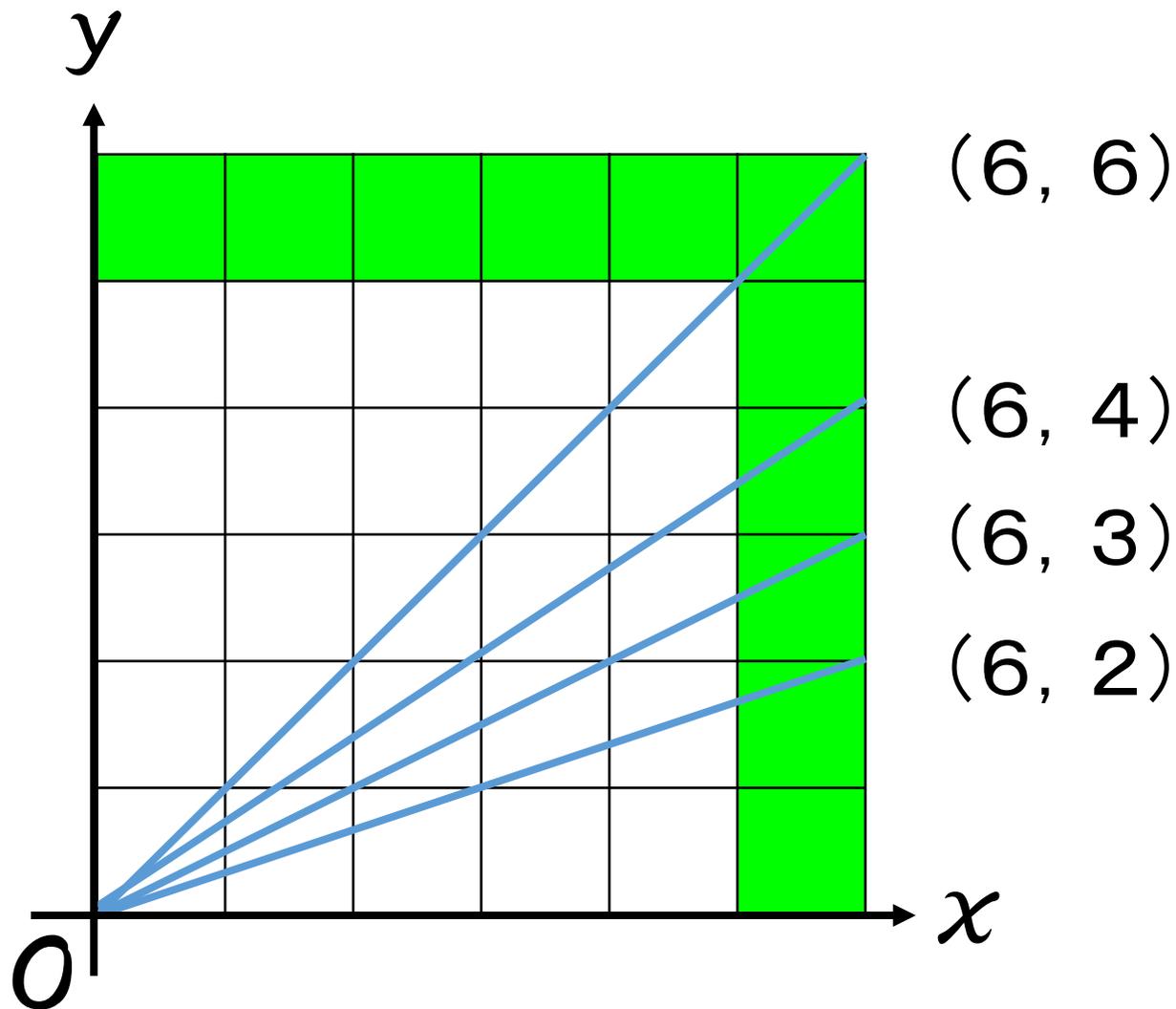
数えない



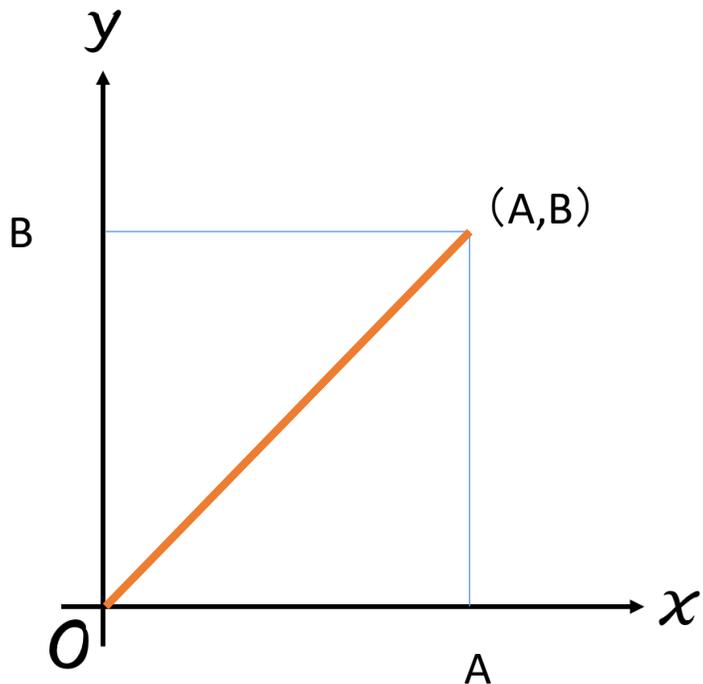
増やす



4つ



Y座標の数がX座標  
6との2以上の公約  
数を持つとき分解出  
来る！



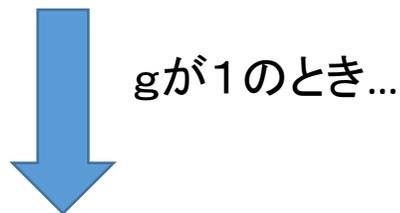
$$\begin{aligned} \text{対角線の長さは} \sqrt{A^2 + B^2} &= \sqrt{g^2 k^2 + g^2 \ell^2} \\ &= \sqrt{g^2 (k^2 + \ell^2)} \\ &= g\sqrt{k^2 + \ell^2} \end{aligned}$$

とでき、よって  $g$  は 2 以上である  
 $g$  が 1 のときは先ほどの意味での分解出来ない

O から (A, B) の長さは分解できる

$$A = gk \quad (g = \text{最大公約数})$$

$$B = g\ell \quad (k, \ell \in \mathbb{N})$$

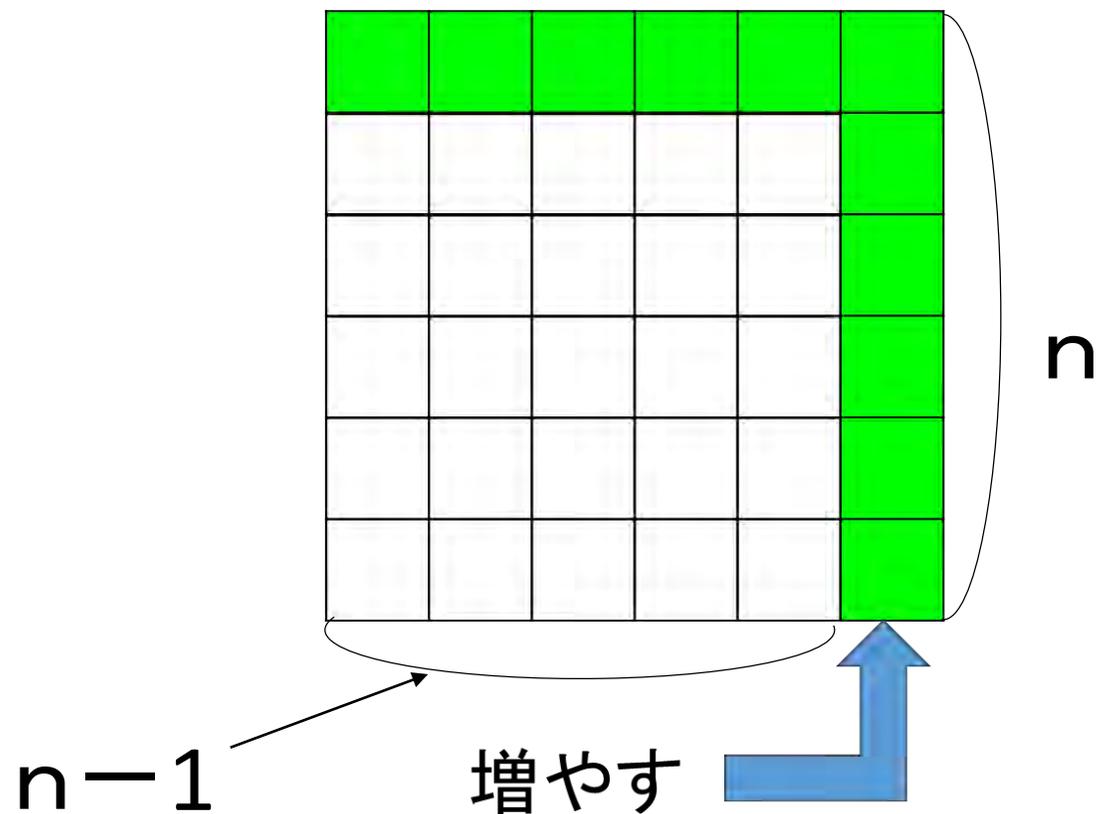


A、B は互いに素



Euler関数は除く

よって  $D_{(n)} - D_{(n-1)}$  は



$n$ と2以上の公約数がある個数



$$n - \phi(n)$$

図9

よって

$$D_{(n)} - D_{(n-1)} = n - \phi_{(n)} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

は正しい

# フィボナッチ協会第 14 回研究集会 点群のコンピューター指向表現—GAP での取り扱いを目差して

藤田眞作

2016/08/26

湘南情報数理化学研究所

Shonan Institute of Chemoinformatics and Mathematical Chemistry,

URL: <http://xymtex.com>

## 1 はじめに

化学における組合せ論的数え上げでは、与えられた骨格の置換位置にリガンドを置換させて、生じた構造の個数を求めることが課題である。このための方法として、USCI 法 [1]、曼荼羅法 [2]、プロリガンド法 [3]、およびステレオイソグラム法 [4] を開発して、モノグラフとして公刊してきた。とくにプロリガンド法は、巡回のスフェリシティ (sphericities of cycles) を提案して、立体異性体の数え上げを可能にしたものである。これは、グラフの数え上げに使われるポリアの方法 [5, 6] を拡張したものに当たる。

群論利用の立場からみると、プロリガンド法は点群に基づき、ポリアの方法は置換群に基づくという違いがある。さらには、同じ「点群」といっても、プロリガンド法で使う点群と、通常の量子化学で使われている点群とは、鏡映操作の取扱いで異なった方法をとる。数学や量子化学の取扱いでは (置換群・点群にかかわらず)、置換基 (リガンド) を質点として取り扱うのが普通であり、鏡映操作でも、リガンド自体は変化しないとみなす ( $A \xrightarrow{\text{鏡映}} A$ )。一方、プロリガンド法では、プロリガンドをいう概念を提案して、抽象的にキラリティーをもつとして取り扱う。すなわち鏡映操作で、キラリティー値が入れ替わるとみなす ( $p \xrightarrow{\text{鏡映}} \bar{p}$  および  $\bar{p} \xrightarrow{\text{鏡映}} p$ )。このため、点群の取扱いでは、四面体分子 CABXY (A, B, X, Y はアキラルなプロリガンド) がエナンチオマー対をなす ( $C_1$  点群) のに対して、四面体分子 CABpp (A, B はアキラル, p/ $\bar{p}$  は分離した状態でエナンチオマー対) ではアキラルな分子 2 個 ( $C_2$  点群) としなければならない。両者は置換群としては、同一の群に属す。

GAP システムは、コンピューターで群論を取り扱うためにいろいろなコマンドを用意しているが、組合せ論の立場からみると、主として置換群を重視している。このため、上記のような点群に基づく組合せ論を取り扱うには、一工夫必要である。今回の発表は、この「一工夫」について説明する [7]。

## 2 プロリガンド-プロ分子模型における骨格

プロリガンド-プロ分子模型における骨格とは、 $n$  個の置換位置をもつ 3 次元 (3D) 物体である:

$$X = \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad (1)$$

骨格が点群  $G$  に属するとすると、 $G$  は、位置集合  $X$  に働き、置換表現をあたえる。たとえば、図 1 に示したオキシラン骨格 1 は、4 個の置換位置  $\{1, 2, 3, 4\}$  をもち、点群  $C_{2v}$  に属する。

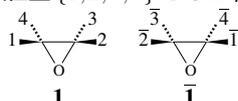


図 1: Numbered and mirror-numbered skeletons for oxirane derivatives [7].

プロリガンドは鏡映操作でキラリティー値が入れ替わるので、これを取り扱うため、鏡映操作が位置集合  $X$  に働いたときに、番号付き骨格 (Eq. 1) が、鏡映番号付き骨格に変わるとみなす:

$$\bar{X} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n}\}. \quad (2)$$

上線は、骨格自体が鏡像に移行した際に、各置換位置のプロリガンドも鏡像に同時に移行することを示すために用いている。たとえば、オキシラン骨格 1 の鏡映面として、オキシラン環を直角に切断する面をとると、鏡映操作  $\sigma_v(1) \sim (1\bar{2})(3\bar{4})$  が生ずる。この鏡映操作によって、番号付き骨格 1 は鏡像番号付き骨格  $\bar{1}$  に変わる。

## 3 鏡像置換表現

位置集合  $X$  (Eq. 1) と鏡像位置集合  $\bar{X}$  (Eq. 2) とに群  $G$  が働いたときの置換表現を、記号  $P_G^{(X\bar{X})}$  であらわす。GAP では、このような場合の取扱いがそのままではできない。そこで、次のような二次的な集合を考える。

$$\chi = \{X, \bar{X}\} = \{n+1, n+2\} \quad (3)$$

ここで、番号  $n+1$  and  $n+2$  は、位置集合  $X$  (Eq. 1) の  $n$  の続き番号である。集合  $\chi$  に群  $G$  を作用させると、次のような置換が生じる:

$$P_G^{(X)} = \begin{pmatrix} X & \bar{X} \\ X & \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix} \\ = (n+1)(n+2) \text{ for } G: \text{rotations} \quad (4)$$

$$P_G^{(X\bar{X})} = \begin{pmatrix} X & \bar{X} \\ \bar{X} & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 \\ n+2 & n+1 \end{pmatrix} \\ = (n+1 \ n+2) \text{ for } G: \text{(roto)reflections} \quad (5)$$

式 4 および式 5 において、 $G (\in G)$  を動かすと、次の鏡像置換表現がえられる。

$$P_G^{(X)} = \{P_G^{(X)} \mid \forall G \in G\} \quad (6)$$

## 4 点群のコンピューター指向表現 (統合置換表現)

$X$  (式 1) に対する  $G$  の置換表現を、記号  $P_G^{(X)}$  であらわす (上線付き表現  $P_G^{(X\bar{X})}$  から、鏡映操作について上線を取り除く)。これと式 6 の鏡像置換表現を組み合わせると、次のような置換表現を定義する:

$$P_G^{(X\bar{X})} = P_G^{(X)} \oplus P_G^{(X\bar{X})} = \{P_G^{(X)} \oplus P_G^{(X\bar{X})} \mid \forall G \in G\}, \quad (7)$$

これを、統合置換表現 *a combined-permutation representation* と称する。記号  $\oplus$  は、たとえば、 $(1\bar{3})(2\bar{4}) \oplus (5\bar{6}) = (1\bar{3})(2\bar{4})(5\bar{6})$  などの意味で用いる。統合置換表現は、点群のコンピューター指向表現であり、これまで用いてきた上線付き表現  $P_G^{(X\bar{X})}$  のかわりに用いることができる。

図 2 は、オキシラン 1 (または  $\bar{1}$ ) に、回転  $C_2 (\in C_{2v})$  を施したもので、 $P_{C_{2v}}^{(X\bar{X})}$  と  $P_{C_{2v}}^{(X)}$  ( $G = C_{2v}$ ) を比較している。

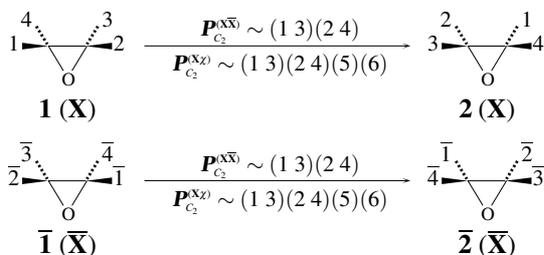


図 2: Rotations for an Oxirane Skeleton [7].

矢印の上下に示したように、違いは (5)(6) のあるなしで、両者は操作上は同じ置換である。一方、図 3 は、オキシラン 1 (または 1-bar) に、鏡映  $\sigma_{v(1)} (\in C_{2v})$  を施したものである。

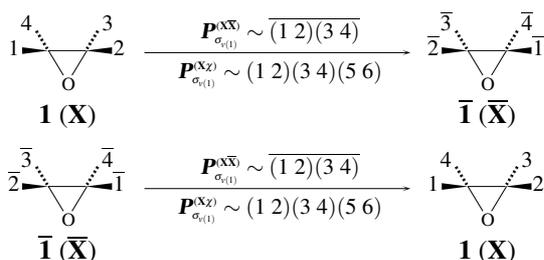


図 3: Reflections for an Oxirane Skeleton [7].

鏡映操作を示す矢印上の上線の効果が、矢印下の (5 6) に置き換えられている。

図 2 および図 3 の操作を、 $C_{2v}$  のすべての元に施すと、表 1 の結果がえられる。

表 1: Symmetry Operations for an Oxirane Skeleton and Products of Sphericity Indices [7]

$C_{2v}$ symmetry operation	$P_{C_2}^{(XX)}$ permutation representation	$P_{\sigma_v}^{(X)}$ mirror-permutation representation	$P_{C_2}^{(XX)}$ combined-permutation representation	PSI (product of sphericity index)
$I$	(1)(2)(3)(4)	(5)(6)	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	$b_1^4$
$C_2$	(1 3)(2 4)	(5)(6)	(1 3)(2 4)(5)(6)	$b_2^2$
$\sigma_{v(1)}$	(1 2)(3 4)	(5 6)	(1 2)(3 4)(5 6)	$c_2^2$
$\sigma_{v(2)}$	(1 4)(2 3)	(5 6)	(1 4)(2 3)(5 6)	$c_2^2$

表 1 の  $P_{C_{2v}}^{(XX)}$  欄に示した上線付きの表現は、 $P_{C_{2v}}^{(XX)}$  欄に示した統合置換表現に置き換えることができる。

## 5 GAP による統合置換表現の生成

上のように定義した統合置換表現 (式 7) を、GAP の generator 機能 (Group 命令) を用いて、置換群として生成する。たとえば、GAP の入力画面で次のように入力する。

```
gap> C2v := Group( (1, 3) (2, 4), (1, 2) (3, 4) (5, 6) ); ;
gap> element_C2v := Elements(C2v); ;
gap> Display(element_C2v);
```

このコードにより、次の出力がえられる。

```
[ (), (1, 2) (3, 4) (5, 6), (1, 3) (2, 4), (1, 4) (2, 3) (5, 6) ]
```

この出力は、 $P_{C_{2v}}^{(XX)}$  欄に示した統合置換表現に一致する。ただし、1-巡回は、GAP の記法では数学分野の慣行に従って省略されている。

同様の手順を図 4 に示した骨格に適用する。ただし、各群の位数は Size 命令、各要素は、Elements 命令を用いて計算する。得られた統合置換表現を表 2 に示す。

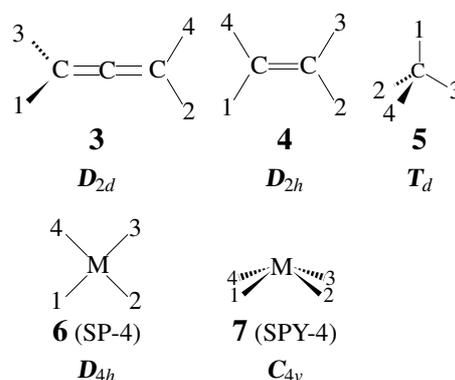


図 4: Stereoskeletons of ligancy 4. The point-group symmetry of each stereoskeleton is shown by using the Schönflies notation. The symbol M represents a central metal [7].

表 2: Combined-Permutation Representations of Point Groups for Characterizing the Skeletons of Ligancy 4 [7]

point group	a list of generators, order, a list of elements
$C_{2v}$	C2v := Group( [ (1, 3) (2, 4), (1, 2) (3, 4) (5, 6) ] ) Order = 4 [ (), (1, 2) (3, 4) (5, 6), (1, 3) (2, 4), (1, 4) (2, 3) (5, 6) ]
$D_{2d}$	D2d := Group( [ (1, 3) (2, 4), (1, 2) (3, 4), (2, 4) (5, 6) ] ) Order = 8 [ (), (2, 4) (5, 6), (1, 2) (3, 4), (1, 2, 3, 4) (5, 6), (1, 3) (5, 6), (1, 3) (2, 4), (1, 4, 3, 2) (5, 6), (1, 4) (2, 3) ]
$D_{2h}$	D2h := Group( [ (1, 3) (2, 4), (1, 2) (3, 4), (5, 6) ] ) Order = 8 [ (), (5, 6), (1, 2) (3, 4), (1, 2) (3, 4) (5, 6), (1, 3) (2, 4), (1, 3) (2, 4) (5, 6), (1, 4) (2, 3), (1, 4) (2, 3) (5, 6) ]
$T_d$	Td := Group( [ (1, 2) (3, 4), (2, 3, 4), (3, 4) (5, 6) ] ) Order = 24 [ (), (3, 4) (5, 6), (2, 3) (5, 6), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (2, 4) (5, 6), (1, 2) (5, 6), (1, 2) (3, 4), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4) (5, 6), (1, 2, 4, 3) (5, 6), (1, 2, 4), (1, 3, 2), (1, 3, 4, 2) (5, 6), (1, 3) (5, 6), (1, 3, 4), (1, 3) (2, 4), (1, 3, 2, 4) (5, 6), (1, 4, 3, 2) (5, 6), (1, 4, 2), (1, 4, 3), (1, 4) (5, 6), (1, 4, 2, 3) (5, 6), (1, 4) (2, 3) ]
$D_{4h}$	D4h := Group( [ (1, 3) (2, 4), (1, 2) (3, 4), (1, 2, 3, 4), (5, 6) ] ) Order = 16 [ (), (5, 6), (2, 4), (2, 4) (5, 6), (1, 2) (3, 4), (1, 2) (3, 4) (5, 6), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4) (5, 6), (1, 3), (1, 3) (5, 6), (1, 3) (2, 4), (1, 3) (2, 4) (5, 6), (1, 4, 3, 2), (1, 4, 3, 2) (5, 6), (1, 4) (2, 3), (1, 4) (2, 3) (5, 6) ]
$C_{4v}$	C4v := Group( [ (1, 3) (2, 4), (1, 2, 3, 4), (1, 2) (3, 4) (5, 6) ] ) Order = 8 [ (), (2, 4) (5, 6), (1, 2) (3, 4) (5, 6), (1, 2, 3, 4), (1, 3) (5, 6), (1, 3) (2, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 4) (2, 3) (5, 6) ]

## 6 キラリティー適合性巡回指標 (CI-CF) の定義

プロリガンド法 [8, 9, 10, 3] では、巡回のスフェリシティ (sphericities of cycles) という概念を採用している。回転操作 ( $P_G^{(X)} = (n+1)(n+2)$ ) に含まれる  $k$ -巡回をヘミスフェリック巡回 (hemispheric cycle) といい、スフェリシティ指標  $b_k$  を割り当てる。鏡映操作 ( $P_G^{(X)} = (n+1)(n+2)$ ) に含まれる奇数の  $k$ -巡回をホミスフェリック巡回 (homospheric cycle) といい、スフェリシティ指標  $a_k$  を割り当て、偶数の  $k$ -巡回をエナンチオスフェリック巡回 (enantiospheric cycle) といい、スフェリシティ指標  $c_k$  を割り当てる。

置換  $P_G^{(X)}$  (cf. Eq. 7) の巡回構造が、 $v_k(P_G^{(X)})$  個の  $k$ -巡回 ( $\sum_{k=1}^n kv_k(P_G^{(X)})$ ) を含むとする。  $P_G^{(X)}$  (式 7 参照) に対応する置換  $P_G^{(XX)}$  は、次に示すスフェリシティ指標積 (a product of sphericity indices, PSI) であらわされる。

$$\text{PSI}_{P_G^{(XX)}} = \$1^{v_1(P_G^{(X)})} \$2^{v_2(P_G^{(X)})} \dots \$n^{v_n(P_G^{(X)})}. \quad (8)$$

ただし、 $\$k$  は、場合に応じて、 $a_k$ ,  $b_k$ , または  $c_k$  を示す。式 8 の PSI に基づいて、文献 [3] の Def. 7.20 を適用すると、 $P_G^{(XX)}$  に対するキラリティー適合性巡回指標 (CI-CF) は、次の式であらわされる [7]。

$$\text{CI-CF}(P_G^{(XX)}; \$k) = \frac{1}{|G|} \sum_{G \in G} \$1^{v_1(P_G^{(X)})} \$2^{v_2(P_G^{(X)})} \dots \$n^{v_n(P_G^{(X)})}. \quad (9)$$

たとえば、表 1 の the  $P_{2v}^{(X)}$ -欄のデータから得られる PCI (表 1 の PCI-欄に表示) を用いて、式 9 に従って総和を求め、 $C_{2v}$  の位数 ( $|C_{2v}| = 4$ ) で割ると、次に示す CI-CF が得られる。

$$CI-CF(P_{2v}^{(X)}; \mathbb{S}_k) = \frac{1}{4} \{b_1^4 + b_2^2 + 2c_2^2\}. \quad (10)$$

## 7 CI-CF を計算するための GAP 関数

式 9 に従って、CI-CF を計算するための GAP 関数として、CalcCICF を開発した。また、アキラルな 3D 構造を数え上げるための関数として、CalcCICF\_A を、エナンチオマー対を数え上げるための関数として、CalcCICF\_E を開発した。原著論文には、これらの関数のソースリストが付録として掲載されている [7]。

```
CalcCICF(group, degree, degreefull)
CalcCICF_A(group, degree, degreefull)
CalcCICF_E(group, degree, degreefull)
```

ただし、group は Group 関数で生成した群 ( $P_G^{(X)}$ ) をあらわし、degree は  $P_G^{(X)}$  の次数を、degreefull は、 $P_G^{(X)}$  の次数を、それぞれあらわす。

たとえば、オキシラン骨格 ( $C_{2v}$ ) に基づく数え上げに関する CI-CF を計算するには、次のように入力する [7]。

```
#Read("c:/fujita0/calccicf/C2v-CICF.gap");
#Input this line to the gap> prompt
LogTo("c:/fujita0/calccicf/C2v-CICFlog.txt");

Read("c:/fujita0/calccicf/CICFgen.gapfunc");
#Loading of CICFgen.gapfunc
C2v := Group((1,3)(2,4), (1,2)(3,4)(5,6)); #C2v
Print("C2v := ", C2v, "\n");
Print("Order = ", Size(C2v), "\n", "Elements(C2v), "\n");
Print("CICF_C2v := ", CalcCICF(C2v, 4, 6), "\n");
Print("CICF_C2v_A := ", CalcCICF_A(C2v, 4, 6), "\n");
Print("CICF_C2v_E := ", CalcCICF_E(C2v, 4, 6), "\n");
```

```
LogTo();
```

この計算結果は、C2v-CICFlog.txt と名づけた log ファイルに次のよう出力される。

```
C2v :=Group( [ (1,3)(2,4), (1,2)(3,4)(5,6) ] )
Order =4
[ (), (1,2)(3,4)(5,6), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)(5,6) ]
CICF_C2v := 1/4*b_1^4+1/2*c_2^2+1/4*b_2^2
CICF_C2v_A := c_2^2
CICF_C2v_E := 1/4*b_1^4-1/2*c_2^2+1/4*b_2^2
```

同様の操作を図 4 に適用すると、表 3 に示す CI-CF が得られる。

表 3: CI-CFs of Point Groups for Characterizing the Skeletons of Ligancy 4 [7]

point group	CICFs for total as well as for achiral (A) and chiral (.C) parts
$C_{2v}$	CICF_C2v := 1/4*b_1^4+1/2*c_2^2+1/4*b_2^2 CICF_C2v_A := c_2^2 CICF_C2v_E := 1/4*b_1^4-1/2*c_2^2+1/4*b_2^2
$D_{2d}$	CICF_D2d := 1/8*b_1^4+1/4*c_2*a_1^2+3/8*b_2^2+1/4*c_4 CICF_D2d_A := 1/2*c_2*a_1^2+1/2*c_4 CICF_D2d_E := 1/8*b_1^4-1/4*c_2*a_1^2+3/8*b_2^2-1/4*c_4
$D_{2h}$	CICF_D2h := 1/8*b_1^4+1/8*a_1^4+3/8*c_2^2+3/8*b_2^2 CICF_D2h_A := 1/4*a_1^4+3/4*c_2^2 CICF_D2h_E := 1/8*b_1^4-1/8*a_1^4-3/8*c_2^2+3/8*b_2^2
$T_d$	CICF_Td := 1/24*b_1^4+1/4*c_2*a_1^2+1/3*b_1*b_3+1/8*b_2^2+1/4*c_4 CICF_Td_A := 1/2*c_2*a_1^2+1/2*c_4 CICF_Td_E := 1/24*b_1^4-1/4*c_2*a_1^2+1/3*b_1*b_3+1/8*b_2^2-1/4*c_4
$D_{4h}$	CICF_D4h := 1/16*b_1^4+1/16*a_1^4+1/8*b_1^2*b_2+1/8*c_2*a_1^2+3/16*c_2^2+3/16*b_2^2+1/8*c_4+1/8*b_4 CICF_D4h_A := 1/8*a_1^4+1/4*c_2*a_1^2+3/8*c_2^2+1/4*c_4 CICF_D4h_E := 1/16*b_1^4-1/16*a_1^4+1/8*b_1^2*b_2-1/8*c_2*a_1^2-3/16*c_2^2+3/16*b_2^2-1/8*c_4+1/8*b_4
$C_{4v}$	CICF_C4v := 1/8*b_1^4+1/4*c_2*a_1^2+1/4*c_2^2+1/8*b_2^2+1/4*b_4 CICF_C4v_A := 1/2*c_2*a_1^2+1/2*c_2^2 CICF_C4v_E := 1/8*b_1^4-1/4*c_2*a_1^2-1/4*c_2^2+1/8*b_2^2+1/4*b_4

## 8 リガンド在庫式の CI-CF への代入による数え上げ

オキシラン 3D 構造の数え上げを例にとると、次のようなリガンド倉庫を考える。

$$L = \{A, B, C, D; p, q, r, s; \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}\}. \quad (11)$$

ここに、大文字 A, B, C, D はアキラルなプロリガンドをあらわし、 $p, \bar{p}$  のような小文字の対はエナンチオメリックなプロリガンド対をあらわす。これにより、リガンド在庫式は次のように計算される。

$$a_k = A^k + B^k + C^k + D^k \quad (12)$$

$$c_k = A^k + B^k + C^k + D^k + 2p^{k/2}\bar{p}^{k/2} + 2q^{k/2}\bar{q}^{k/2} + 2r^{k/2}\bar{r}^{k/2} + 2s^{k/2}\bar{s}^{k/2} \quad (13)$$

$$b_k = A^k + B^k + C^k + D^k + p^k + q^k + r^k + s^k + \bar{p}^k + \bar{q}^k + \bar{r}^k + \bar{s}^k \quad (14)$$

これらのリガンド在庫式を、表 3 に示した CI-CF に代入する。得られた式を展開すると、母関数がえられる。この母関数の各項の係数が対応する 3D 構造の個数をあたえる。

例として、オキシランの数え上げの GAP コードを示す。ただし、 $\bar{p}$  などは大文字の P などにおきかえている。

```
#Read("c:/fujita0/calccicf/C2v-Enum.gap");
LogTo("c:/fujita0/calccicf/C2v-Enumlog.txt");
Read("c:/fujita0/calccicf/CICFgen.gapfunc");

A := Indeterminate(Rationals, "A");
B := Indeterminate(Rationals, "B");
(omitted)
S := Indeterminate(Rationals, "S");

a_1 := Indeterminate(Rationals, "a_1");
a_2 := Indeterminate(Rationals, "a_2");
(omitted)
b_4 := Indeterminate(Rationals, "b_4");

C2v := Group((1,3)(2,4), (1,2)(3,4)(5,6)); #C2v
CICF_C2v := CalcCICF(C2v, 4, 6);
Print("CICF_C2v := ", CICF_C2v, "\n");

aa_1 := A + B + C + D;
aa_2 := A^2 + B^2 + C^2 + D^2;
(omitted)
bb_4 := A^4 + B^4 + C^4 + D^4 + p^4+q^4+r^4+s^4 + P^4+Q^4+R^4+S^4;

f_C2v := Value(CICF_C2v,
[aa_1, aa_2, aa_3, aa_4, bb_1, bb_2, bb_3, bb_4, cc_2, cc_4]);
Print("f_C2v := ", f_C2v, "\n");

LogTo();

この GAP コードを C2v-Enum.gap なるファイルに書き込み、c:/fujita0/calccicf なるフォルダーに格納する。計算に必要な CalcCICF 関数などは、CICFgen.gapfunc なるファイルに書き込んであるので、あらかじめ Read 命令で読み込む。計算結果は、LogTo 命令により log ファイル C2v-Enumlog.txt に書き出す。

この GAP コードを実行するには、#のついたコメント行の Read 命令を gap> のプロンプトのうしろにコピーする。得られた結果を次に示す。ただし、母関数 f_C2v の項は代表的なものを残し、他の項は省略した。

CICF_C2v := 1/4*b_1^4+1/2*c_2^2+1/4*b_2^2
f_C2v := A^4 + ... + A^3*B + A^3*C + A^3*D + ...
3*A^2*B^2 + ... + 3*A^2*B*C + 3*A^2*B*D + ... +
6*A*B*C*D +
A^3*p + A^3*p + A^3*q + A^3*Q + ...
3*A^2*B*p + 3*A^2*B*P + 3*A^2*B*q + 3*A^2*B*Q + ...
6*A*B*C*p + 6*A*B*C*P + 6*A*B*C*q + 6*A*B*C*Q + ...
2*A^2*p^2 + 2*A^2*P^2 + 2*A^2*q^2 + 2*A^2*Q^2 + ...
5*A^2*p*p + 5*A^2*q*Q + 5*A^2*r*R + ...
3*A^2*p*q + 3*A^2*p*Q + 3*A^2*p*r + 3*A^2*p*R + ...
3*A*B*p^2 + ... + 6*A*B*p*p + ...
6*A*B*p*q + 6*A*B*p*Q + 6*A*B*p*r + 6*A*B*p*R + ...
1/2*p^4 + ... + p^3*P + p*P^3 + ...
p^3*q + p^3*Q + p^3*r + p^3*R + p^3*s + p^3*S + ...
4*p^2*p^2 + ... + 3*p^2*p*q + 3*p^2*p*Q + ...
2*p^2*q^2 + 2*p^2*s^2 + ...
3*p^2*q*Q + 3*p^2*s*S + ...
3*p^2*q*r + 3*p^2*q*R + ...
10*p*p*q*Q + ... + 6*p*p*q*r + 6*p*p*q*R + ...
```

## 9 数え上げの結果の検証

この数え上げでは、エナンチオマー対を1個と勘定している。アキラルな構造は、自己エナンチオマー対と勘定して1個と勘定する。たとえば、母関数  $f_{C2v}$  の項のうち、 $3 \cdot A^2 \cdot B^2$  の係数3の内容は、図5に示すように、一対のエナンチオマー(8/8)と、アキラルな構造2個(9および10)となる。

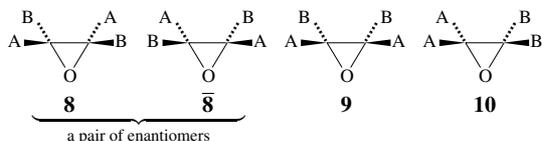


図5: One pair of enantiomers and two achiral structures for oxirane derivatives with the composition  $A^2B^2$ .

母関数  $f_{C2v}$  の項のうち、 $6 \cdot A \cdot B \cdot C \cdot D$  は、プロリガンド ABCD が置換したオキシラン誘導体(エナンチオマー対)は、6個あることを示している。実際にこれらを描くと、図6のようになる。この結果は、RS-立体異性体としての数え上げでもとめた結果、すなわちI型が6個(それぞれエナンチオマー1個に相当)が存在することと矛盾しない[11]。

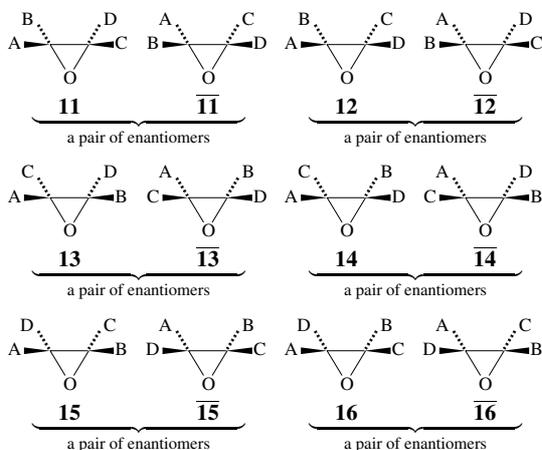


図6: Six pairs of enantiomeric oxirane derivatives with the composition ABCD.

母関数  $f_{C2v}$  の項のうち、 $10 \cdot p \cdot P \cdot q \cdot Q$  は、プロリガンド  $p\bar{p}q\bar{q}$  が置換したオキシラン誘導体(自己エナンチオマー対)が10個あることを示している。実際にこれらを描くと、図7のようになる。内訳は、アキラルな誘導体(自己エナンチオマー対)が8個、エナンチオマー対が2個となる。この結果は、RS-立体異性体としての数え上げでもとめた結果、すなわちV型が4個(それぞれアキラルな誘導体2個に相当)とI型が2個(それぞれエナンチオマー1個に相当)が存在することと矛盾しない[11]。

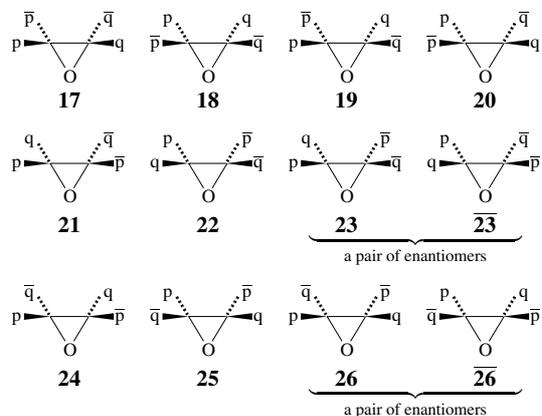


図7: Six pairs of enantiomeric oxirane derivatives with the composition  $p\bar{p}q\bar{q}$ .

図6と図7は、プロリガンドを、 $A \leftrightarrow p, B \leftrightarrow \bar{p}, C \leftrightarrow q, D \leftrightarrow \bar{q}$  のように対応させて描いている。両者を比較すると、キラルなプロリガンドを導入して、キラリティー適合性を考慮した効果が了解できる。たとえば、図6に示したエナンチオマー対  $11/\bar{11}$  に対応するのは、図7に示した17および18(いずれもアキラル)である。

図6と図7の関係は、RS-立体異性体としての数え上げによって、さらに深いレベルで了解できる[11]。すなわち、図6は、6個のステレオイソグラムであらわされるRS-立体異性体四隅子(いずれもI型)に対応しており、各エナンチオマー対がそれぞれに属している。この様子は、 $(11/\bar{11})_I, (12/\bar{12})_I, \dots, (16/\bar{16})_I$  と模式的にあらわされる。ただし、角括弧はエナンチオマー対、丸括弧はRS-立体異性体四隅子をあらわす。

一方、図7も、同じく6個のステレオイソグラムであらわされるRS-立体異性体四隅子(I型2個とV型4個)に対応している。この様子は、 $(17/\bar{17})_V, (19/\bar{19})_V, (21/\bar{21})_V, (23/\bar{23})_I, (24/\bar{24})_I, (25/\bar{25})_V, (26/\bar{26})_I$  と模式的にあらわされる。ただし、単一のプロ分子を含む各括弧は、アキラルプロ分子(自己エナンチオマー対)をあらわす。この場合のステレオイソグラム(V型)は、いわゆる擬不斉(pseudoasymmetry)に相当する。

数学や量子化学に群論を適用する際には、リガンドを質点と考えても十分な結果がえられるが、3次元構造を数え上げる際にはキラルなプロリガンドを考慮しなければならないことが明白になった。

## 10 おわりに

点群のコンピューター指向表現として、統合置換表現(combined-permutation representations)を提案した。このことにより、GAPシステムなどの群論支援コンピューターシステムで、化合物を3次元構造として数え上げることが容易にできるようになった。オキシラン誘導体の数え上げにプロリガンド法を適用することにより、プロリガンド法で採用した巡回のスフェリシティ(sphericity of cycles)の有用性が例証できた。

## 参考文献

- [1] S. Fujita, "Symmetry and Combinatorial Enumeration in Chemistry," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1991). x + 368pp.
- [2] S. Fujita, "Diagrammatic Approach to Molecular Symmetry and Enumeration of Stereoisomers," University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac (2007). x + 206pp.
- [3] S. Fujita, "Combinatorial Enumeration of Graphs, Three-Dimensional Structures, and Chemical Compounds," University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac (2013). xiv + 576pp.
- [4] S. Fujita, "Mathematical Stereochemistry," De Gruyter, Berlin (2015). xviii + 437pp.
- [5] G. Pólya, *Acta Math.*, **68**, 145–254 (1937).
- [6] G. Pólya and R. C. Read, "Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds," Springer-Verlag, New York (1987).
- [7] S. Fujita, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **76**, 379–400 (2016).
- [8] S. Fujita, *Theor. Chem. Acc.*, **113**, 73–79 (2005).
- [9] S. Fujita, *Theor. Chem. Acc.*, **113**, 80–86 (2005).
- [10] S. Fujita, *Theor. Chem. Acc.*, **115**, 37–53 (2006).
- [11] S. Fujita, *J. Math. Chem.*, **53**, 260–304 (2015).

# ワイソフ配列について

岩淵 勇樹

2016-08-26

## Abstract

本稿では、インタースパージョンの例として最も簡単な物智の倍音配列と、そのフィボナッチ版ともいえるワイソフ配列を紹介し、それを応用して黄金比の近似値の算出を行う。

## 1 インタースパージョン

### 1.1 定義

文献 [1] において、インタースパージョン (Interspersion) は以下のように定義されている。以下の正の整数による配列  $A = a_{i,j}, i \geq 0, j \geq 0$  のことを **インタースパージョン** と呼ぶ。

1.  $A$  の行は正の整数から成る
2.  $A$  の任意の行は単調増加列である
3.  $A$  の任意の列は単調増加列である (有限長の場合もある)
4.  $A$  における 2 つの異なる行  $u_j, v_j$  について、  
 $u_p < v_q < u_{p+1}$  のとき  $u_{p+1} < v_{q+1} < u_{p+2}$  が成立する

## 2 物智の倍音配列

### 2.1 定義

最も簡単なインタースパージョンの例を挙げる。列が 1 から始まる奇数列となっており、行は右に行くに連れて 2 倍ずつされる。

ただし、実際は行列ともに無限に続くが、表示は 8 行 8 列に限っている。

1	2	4	8	16	32	64	128
3	6	12	24	48	96	192	384
5	10	20	40	80	160	320	640
7	14	28	56	112	224	448	896
9	18	36	72	144	288	576	1152
11	22	44	88	176	352	704	1408
13	26	52	104	208	416	832	1664
15	30	60	120	240	480	960	1920

このような配列を物智の倍音配列と呼ぶ<sup>1</sup>。

## 2.2 特徴

物智の倍音配列には以下のような特徴がある。

- 自然数と1対1対応
- 1行目は2のべき乗
- 1列目は奇数の列
- 縦は等差数列（線形的）
- 横は公比2の等比数列（指数関数的）

これらのことは物智の倍音配列を2進表記するとより直感的に理解できると思われる。

1	10	100	1000	10000
11	110	1100	11000	110000
111	1110	11100	111000	1110000
1111	11110	111100	1111000	11110000

1列目は最下位ビットが1で、桁数が増加しているため、小さい順の奇数となっていることがよくわかる。

横は左の要素の左ビットシフトとなっており、末尾の0の個数から列数を判別することができる。

## 3 ワイツフ配列

### 3.1 フィボナッチ記数法

桁の重みがフィボナッチ数  $F(n)$  となるような記数法をフィボナッチ記数法と呼ぶ。ゼッケンドルフ表現と呼ばれる、1が連続しないというルールに則ると、任意の自然数を一意に表現できる。

以下にフィボナッチ記数法の例を示す。

<sup>1</sup>発表では物智配列と呼んでいましたが、名称を変更しました。

8	5	3	2	1	
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	2
0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	4
0	1	0	0	0	5
0	1	0	0	1	6
0	1	0	1	0	7
1	0	0	0	0	8
1	0	0	0	1	9
1	0	0	1	0	10
1	0	1	0	0	11
1	0	1	0	1	12

### 3.2 フィボナッチ列

$S_{(a,b),0}$  を  $a$ 、 $S_{(a,b),1}$  を  $a, b$  と定める。そして  $S_{(a,b),n} = S_{(a,b),n-1}S_{(a,b),n-2}$  (1つ前の文字列と2つ前の文字列の文字列連結) とする。これの極限  $S_{(a,b),\infty}$  を  $S_{(a,b)}$  と定める。

以下に  $S_{a,b,n}$  の例を挙げる。

$$\begin{aligned}
S_{(a,b),0} &= a \\
S_{(a,b),1} &= a, b \\
S_{(a,b),2} &= a, b, a \\
S_{(a,b),3} &= a, b, a, a, b \\
S_{(a,b),4} &= a, b, a, a, b, a, b, a \\
S_{(a,b),5} &= a, b, a, a, b, a, b, a, a, b, a, a, b
\end{aligned}$$

### 3.3 ワイツフ配列の定義

ワイツフ配列  $W_{m,n}$  は以下のように定義される [4]。

$$W_{m,1} = \llbracket [m\varphi]\varphi \rrbracket \quad (1)$$

$$W_{m,2} = \llbracket [m\varphi]\varphi^2 \rrbracket \quad (2)$$

$$W_{m,n} = W_{m,n-2} + W_{m,n-1} (n > 2) \quad (3)$$

ワイツフ配列は以下のようにしても求められる [5]。

1 列目の 2 つ左の列 (-1 列目) は非負整数の列となる。

$$W_{-1,n} = n \quad (4)$$

1 列目の 1 列左の列 (0 列目) は次のようにする:

1.  $n$  行目の  $-1$  列目の値を今まで求められたワイソフ配列の中から探す
2. その数の  $1$  列右の数に  $1$  を足す
3. その数を  $n$  行  $0$  列目の値とする

例えば、 $W_{6,0}$  を求めるには、 $W_{6,-1} = 5$  であるので、 $5$  が現れるワイソフ配列の  $1$  つ右の値  $8$  に  $1$  を足して  $9$  となるので、 $W_{6,0} = 9$  となる。

あとは、式 (3) に倣って隣り合う  $2$  項を足していけばワイソフ配列を計算することができる。以下に、 $-1$  列目、 $0$  列目を含むワイソフ配列の一部を示す。

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178
3	6	9	15	24	39	63	102	165	267
4	8	12	20	32	52	84	136	220	356
5	9	14	23	37	60	97	157	254	411
6	11	17	28	45	73	118	191	309	500
7	12	19	31	50	81	131	212	343	555

### 3.4 ワイソフ配列の性質

- 自然数と  $1$  対  $1$  対応
- $1$  行目はフィボナッチ数
- $2$  行目はリュカ数
- 横に隣り合う数比は黄金比  $\phi$  に漸近 (指数関数的)
- 縦の差の値はフィボナッチ列 (線形的)

ワイソフ配列のもうひとつの特徴は、物智の倍音配列と同様、右の要素が左の要素のビットシフトとなっている点である。ただし、 $2$  進数ではなくフィボナッチ記数法におけるビットシフトである。また、 $1$  列目は最下位ビットが  $1$  であるようなゼッケンドルフ表現を小さい順に並べた列となる。

1	10	100	1000	10000
101	1010	10100	101000	1010000
1001	10010	100100	1001000	10010000
10001	100010	1000100	10001000	100010000
10101	101010	1010100	10101000	101010000

なお、類似の配列としてストラスキー配列 (Stolarsky Array) が挙げられる [1]。

## 4 応用

隣り合う数比  $\frac{W_{m,n}}{W_{m+1,n}}$  が  $\phi$  に漸近することから、隣接  $2$  数の比から  $\phi$  の近似値を算出可能であることが考えられる。 $W_{m,n}$  が  $2$  のべき乗なら、 $W_{m+1,n}$  のビットシフトが近似値となる。

## 4.1 結果

ワイソフ配列から2のべき乗数を探索し、その右の列の値を求めた。以下はその最初の10要素における2のべき乗の出現位置と、その1つ右の列の値、そして算出した黄金比の近似値である。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(m, n)$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(1, 5)	(3, 3)	(5, 3)	(25, 1)	(12, 4)	(61, 2)	(196, 1)
探索値	2	3	7	13	26	52	104	207	414	829
既約分数	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{207}{128}$	$\frac{207}{128}$	$\frac{829}{512}$
近似値	2	1.5	1.75	1.625	1.625	1.625	1.625	1.61719	1.61719	1.61914

列  $m$ 、行  $n$  の遷移を図1、図2に示す。

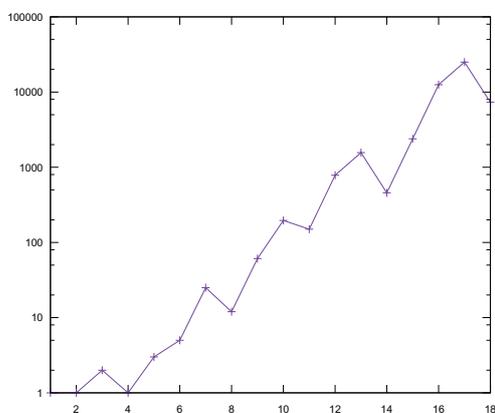


図 1: 2 のべき乗が現れる列の遷移

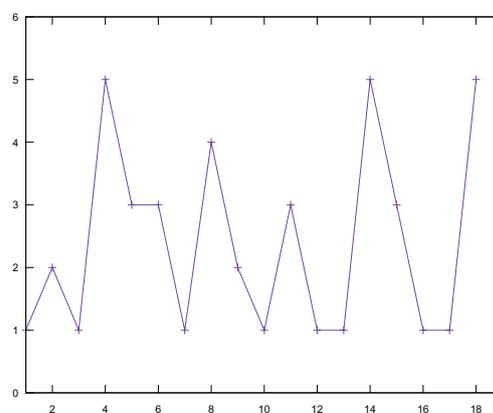


図 2: 2 のべき乗が現れる行の遷移

近似自体は成功したが、未評価ではあるが、収束がかなり悪そうである上、未実証ではあるが、規則性もないものと思われる。

## 5 まとめ

インタースパージョンの例である物智の倍音配列とワイソフ配列を紹介した。黄金比の近似についてはワイソフ配列を用いた他の方法も検討する予定である。

## 参考文献

- [1] KIMBERLING, Clark. Interspersion and dispersion. Proceedings of the American Mathematical Society, 1993, 117.2: 313-321.
- [2] KASUKA Yoshiharu. 2006年9月19日 - ジュエリーアイズ on the Web, <http://www.jewelryeyes.net/log.cgi?dat=69j>.

- [3] KIMBERLING, Clark. The Zeckendorf array equals the Wythoff array. *Fib. Quart.*, 1995, 33: 3-8.
- [4] Weisstein, Eric W. Wythoff Array. MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/WythoffArray.html>
- [5] Tatiana Shubin, David F. Hayes, Gerald Alexanderson. Expeditions in Mathematics. Mathematical Association of America, 2011, 75-76.

# フィボナッチ 計算盤について

工学院大学 情報学部  
コンピュータ科学科 前山和喜

## 1. ネイピアの計算盤

							7	7
							7	6
						7	6	5
				7	6	5	4	4
			7	6	5	4	3	3
		7	6	5	4	3	2	2
	7	6	5	4	3	2	1	1
7	6	5	4	3	2	1	0	0
7	6	5	4	3	2	1	0	

位取り記数法の  
特性をうまく利用  
した計算盤

内部には2進法の  
指数部の数値が  
書いてある

\*詳しくは  
前山 高木  
ネイピアの計算盤とその活用・展開  
早稲田大学数学教育学会誌 第32巻 第1号

## 1. ネイピアの計算盤

							7	7
							7	6
							7	5
						7	6	4
			7	●	●	4	●	●
		7	6	5	4	3	2	●
	7	6	5	●	●	2	●	●
7	6	5	4	3	2	1	0	●
7	6	5	4	●	●	1	●	●

コマが有るマスが2進数の1  
無いマスが0にあたる

例)  
 $1010 \times 1101$   
 $= 10000010$   
 $(1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)$   
 $\times$   
 $(1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)$   
と考え、分配法則で  
計算してると考えると  
わかりやすい

## 1. ネイピアの計算盤

							7	7
							7	6
							7	5
						7	6	4
						7	●	●
			7	●	●	4	●	●
		7	6	5	4	3	2	●
	7	6	5	●	●	2	●	●
7	6	5	4	3	2	1	0	●
7	6	5	4	●	●	1	●	●

例)  
 $1010 \times 1101$   
 $= 10000010$   
コマの足しあわせ  
・斜めのマスは  
指数部が変わら  
ないので下ろせる  
・筆算における  
縦への足し合わせ



## 2. フィボナッチの2進法

9

### ★フィボナッチ2進法の特徴

34	21	13	8	5	3	2	1
1	0	1	0	0	0	1	0

$$49 = 34 + 13 + 2$$

- ・隣り合うビットが1にならない  
→もし隣り合うなら, その隣のビットが1であることと等しい
- ・全ての自然数を一意的に表すことができる  
→ゼッケンドルフの定理

## 2. フィボナッチの2進法

10

### ★フィボナッチ2進法の足し算

		89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
50 =				1	0	1	0	0	1	0	0
33 =	+			0	1	0	1	0	1	0	1
83 =				1	1	1	1	0	2	0	1
				1	1	1	1	1	0	0	2
				1	1	1	1	1	0	1	0
		1	0	0	1	1	1	0	1	0	
		1	0	1	0	0	1	0	1	0	

桁  
上  
が  
り

## 2. フィボナッチの2進法

11

### ★フィボナッチ2進法の繰上げ

普通の2進法

0	0	2
0	1	0

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a$$

フィボナッチ  
の2進法

0	1	1
1	0	0

$$F_{a+1} = F_a + F_{a-1}$$

## 3. フィボナッチ計算盤

12

							34	34
							42	21
							39	26
							40	24
							40	25
							39	24
							42	26
							34	21
							34	21

ネイピアの計算盤  
における2進数の  
代わりに

フィボナッチ数列  
を使って行と列を  
取った計算盤

内部には 行と列の  
フィボナッチ数の  
積が書いてある

### 3. フィボナッチ計算盤

13

							34	34							
							42	21	21						
							39	26	13	13					
							40	24	16	8	8				
							40	25	15	10	5	5			
							39	24	15	9	6	3	3		
							42	26	16	10	6	4	2	2	
							34	21	13	8	5	3	2	1	1
							34	21	13	8	5	3	2	1	

ネイピアの計算盤  
における2進数の  
代わりに  
フィボナッチ数列  
を使って行と列を  
取った計算盤  
  
内部には 行と列の  
フィボナッチ数の  
積が書いてある

### 4. フィボナッチ2進法の乗算

14

							34	34							
							42	21	21						
							39	26	13	13					
							40	24	16	8	8				
							40	25	15	10	5	5			
							39	24	15	9	6	3	3		
							42	26	16	10	6	4	2	2	
							34	21	13	8	5	3	2	1	1
							34	21	13	8	5	3	2	1	

1010 × 1001  
10進数：7×6  
  
この2進数を  
(青列) × (黄行)  
に対応させる(赤星)  
  
●を斜めに足しこむ

### 4. フィボナッチ2進法の乗算

15

							34	34							
							42	21	21						
							39	26	13	13					
							40	24	16	8	8				
							40	25	15	10	5	5			
							39	24	15	9	6	3	3		
							42	26	16	10	6	4	2	2	
							34	21	13	8	5	3	2	1	1
							34	21	13	8	5	3	2	1	

1010 × 1001  
10進数：7×6  
  
この2進数を  
(青列) × (黄行)  
に対応させる(赤星)  
  
●を斜めに足しこむ  
  
成立しない

### 4. フィボナッチ2進法の乗算

16

#### ★フィボナッチ2進法の筆算

普通の2進法

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 1001 \\ \hline 1010 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1010 \\ \hline 1011010 \end{array}$$

フィボナッチ  
の2進法

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 1001 \\ \hline 1010 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1010 \\ \hline 1011010 \end{array}$$

## 4. フィボナッチ 2 進法の乗算

17

### ★フィボナッチ 2 進法の筆算

普通の 2 進法

```

1 0 1 0
× 1 0 0 1
-----
1 0 1 0
0 0 0 0
-----
1 0 1 1 0 1 0
    
```

位取りが揃っていないので降ろすことができない

フィボナッチの 2 進法

```

1 0 1 0
× 1 0 0 1
-----
1 0 1 0
0 0 0 0
-----
1 0 1 1 0 1 0
    
```

## 4. フィボナッチ 2 進法の乗算

18

							34	34							
							42	21	21						
							39	26	13	13					
							4	16	8	8					
							40	25	15	10	5	5			
							39	24	15	9	6	3	3		
							42	25	16	10	6	4	2	2	
							34	21	13	8	5	3	2	1	1
							34	21	13	8	5	3	2	1	

正しく降ろすため  
差分を考える

ここの差分を考える

## 4. フィボナッチ 2 進法の乗算

19

							34	34							
							42	21	21						
							39	26	13	13					
							4	16	8	8					
							40	25	15	10	5	5			
							39	24	15	9	6	3	3		
							42	25	16	10	6	4	2	2	
							34	21	13	8	5	3	2	1	1
							34	21	13	8	5	3	2	1	

正しく降ろすため  
差分を考える

ここの差分を考える

$$25 - 21 = 4$$

実は差分は常に  
行、列ともに  
2マス右下の値に  
なるので、その分  
プラスをする

## 4. フィボナッチ 2 進法の乗算

20

							34	34							
							42	21	21						
							39	26	13	13					
							40	24	16	8	8				
							40	25	15	10	5	5			
							39	24	15	9	6	3	3		
							42	26	16	10	6	4	2	2	
							34	21	13	8	5	3	2	1	1
							34	21	13	8	5	3	2	1	

● = 0

● = 0

## 4. フィボナッチ 2 進法の乗算

21

							34	34
							42	21
							39	26
							40	24
							40	25
							39	24
							42	26
							34	21
							34	21
							13	8
							8	5
							5	3
							3	2
							2	1
							1	

足し込みが  
できたら  
繰り上げをする

## 4. フィボナッチ 2 進法の乗算

22

							34	34
							42	21
							39	26
							40	24
							40	25
							39	24
							42	26
							34	21
							34	21
							13	8
							8	5
							5	3
							3	2
							2	1
							1	

積を求めることが  
できた

## 5. 証明

23

							34	34
							42	21
							39	26
							40	24
							40	25
							39	24
							42	26
							34	21
							34	21
							13	8
							8	5
							5	3
							3	2
							2	1
							1	

なぜ

このように  
動かすと

うまくいくのか？

## 5. 証明

24

### ★証明に使う式

$$F_{m+n} = F_n \times F_{m+1} + F_{n-1} \times F_m \dots \textcircled{1}$$

$$F_{m+n-2} = \underline{F_n \times F_m} - \underline{F_{n-2} \times F_{m-2}} \dots \textcircled{2}$$

↑  
左下におろしたコマ  
動かしたいコマ  
↑  
2マス内側のコマ

① : Donald Ervin Knuth, (1966), The Art of Computer Programming Volume1, p.80 に載っている

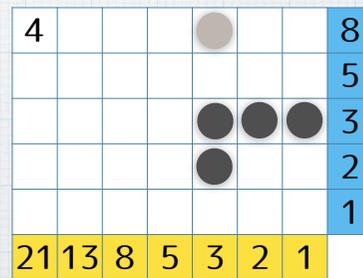
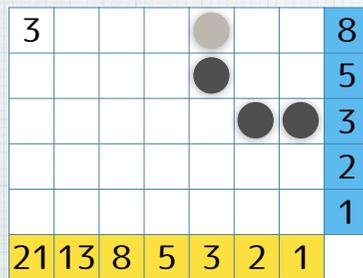
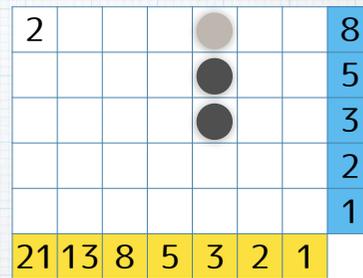
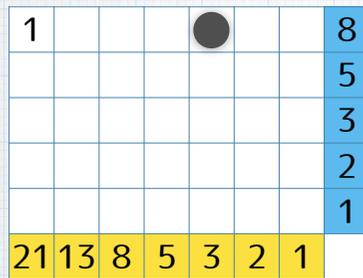
② : 今回の計算盤で使いたい式

\*この2式を使って、帰納法で示すことができる。

今回は、フィボナッチ計算盤を使って示す。

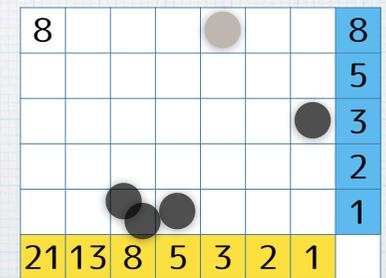
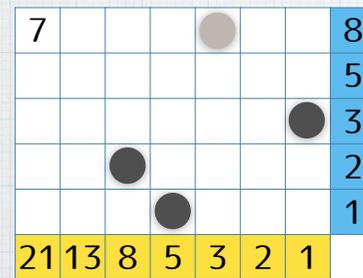
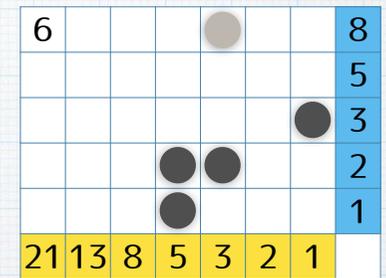
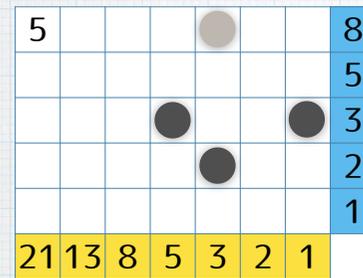
## 5. 証明

25



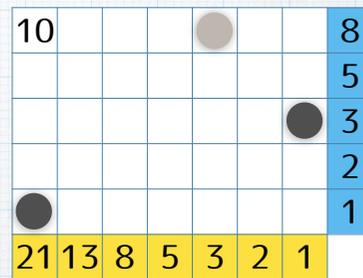
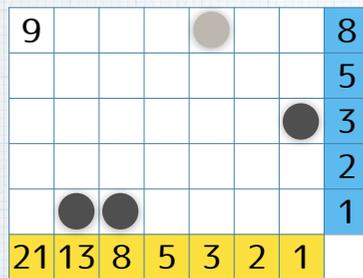
## 5. 証明

26



## 5. 証明

27



\* このようなコマの動きを数式にして  
数学的帰納法で示すことができる

\* 割り算は、マイナスのコマを使うことで  
行うことができる

## 6. 最後に

28

- ・ 本発表では、ネイピアの計算盤を発展させて  
フィボナッチ計算盤について考察を行った
- ・ 本発表では扱っていないが、任意の斜め方向への  
コマの動かし方や、トリボナッチ数列や  
4項のフィボナッチ数列、・・・とさらに  
拡張した計算盤も同様に定義し、四則演算を  
行うことができることも分かっている

# Derivative of generating function of the general m-th order linear recurrence sequence 2

中川 幸一 \*

## 概要

以前から紹介している "The general m-th order linear recurrence sequence" に対して、この多項式の微分がどのようにになっているかを紹介する。前回は  $U_n$  型 (Fibonacci 型) の紹介をしたが、今回はその続きで、 $V_n$  型 (Lucas 型) である。

## 1 Lucas sequence の $m$ 階線形回帰数列と生成関数の復習

$$x_{n+m} = \sum_{i=1}^m a_{m-i} x_{n+m-i}$$

という漸化式を考える。この特性方程式は、

$$x^m = \sum_{i=1}^m a_{m-i} x^{m-i}$$

で表され、 $m$  個の解を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  とする。(ただし、重根は含まない。)

また、初期条件が  $x_0 = 0, x_1 = 0, \dots, x_{m-2} = 0, x_{m-1} = 1$  という数列と、 $x_i = \sigma_i$  という数列を考える。

ただし、 $\sigma$  は、対称式  $\sigma_k = \sum_{i=1}^m x_i^k$  を基本対称式  $s_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  で表したもの。

ここで前半の数列を  $U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$ 、後半の数列を  $V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  とする。

このとき、

$$U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^n}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}$$

$$V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^n$$

が成り立つ。

\* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

# Derivative of generating function of the general m-th order linear recurrence sequence 2

中川 幸一 \*

## 概要

以前から紹介している "The general m-th order linear recurrence sequence" に対して, この多項式の微分がどのようにになっているかを紹介する. 前回は  $U_n$  型 (Fibonacci 型) の紹介をしたが, 今回はその続きで,  $V_n$  型 (Lucas 型) である.

## 1 Lucas sequence の $m$ 階線形回帰数列と生成関数の復習

$$x_{n+m} = \sum_{i=1}^m a_{m-i} x_{n+m-i}$$

という漸化式を考える. この特性方程式は,

$$x^m = \sum_{i=1}^m a_{m-i} x^{m-i}$$

で表され,  $m$  個の解を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  とする. (ただし, 重根は含まない.)

また, 初期条件が,  $x_0 = 0, x_1 = 0, \dots, x_{m-2} = 0, x_{m-1} = 1$  という数列と,  $x_i = \sigma_i$  という数列を考える.

ただし,  $\sigma$  は, 対称式  $\sigma_k = \sum_{i=1}^m x_i^k$  を基本対称式  $s_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  で表したものの,

ここで前半の数列を  $U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$ , 後半の数列を  $V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  とする.

このとき,

$$U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^n}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}$$

$$V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^n$$

が成り立つ.

---

\* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

初期条件をはずした数列を  $G_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  とし, この生成関数を

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n = G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \dots$$

とすると,

$$G(x) = \frac{G_0 + \sum_{l=1}^{m-1} \left( G_l - \sum_{k=1}^l a_{m-k} G_{l-k} \right) x^l}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^j} \quad \left( \text{ただし, 収束半径は } |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{G_{n+1}} \right)$$

となることより,

$U_n$  型の生成関数は,

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n \\ &= U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + U_3 x^3 + \dots \\ &= \frac{x^{m-1}}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^j} \end{aligned}$$

$V_n$  型の生成関数は,

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n \\ &= V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + V_3 x^3 + \dots \\ &= \frac{m - \sum_{l=1}^{m-1} (m-l) a_{m-l} x^l}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^j} \end{aligned}$$

となる.

$$u_n^i(x) = \sum_{j=1}^{m-1} j a_j x^{j-1} \sum_{i=m-1}^{(n+j-1)-(m-1)} u_i(x) u_{(n+j-1)-i}(x) \quad (m \geq 2)$$

ただし,  $(n+j-1)-(m-1) < m-1$  のときは和は 0 とする.

## 2 Lucas polynomial sequence の $m$ 階線形回帰数列の多項式の微分

以前,  $U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  型,  $V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  型の二変数の多項式を以下のように拡張することを提唱した.

$$U_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2} y^m, \dots, a_0 y^{m(m-1)}), \quad V_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2} y^m, \dots, a_0 y^{m(m-1)})$$

ここでは  $y = 1$  とした今まで通りの一変数の多項式を扱う. また便宜上,

$$u_n(x) = U_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2}, \dots, a_0), \quad v_n(x) = V_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2}, \dots, a_0)$$

とする. このとき前章で述べた生成関数より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) y^n = \frac{y^{m-1}}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^{m-j} y^j}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)y^n = \frac{m - \sum_{l=1}^{m-1} (m-l)a_{m-l}x^{m-l}y^l}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j}x^{m-j}y^j}$$

を得る.

$m=2$  について考察する. このとき生成関数は,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)y^n = \frac{y}{1 - xy - y^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)y^n = \frac{2 - a_1xy}{1 - a_1xy - a_2y^2}$$

となる.

両辺を  $x$  で微分することにより

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v'_n(x)y^n &= \frac{a_1y(1 + a_2y^2)}{(1 - a_1xy - a_2y^2)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [na_1u_n(x)]y^n \end{aligned}$$

を得る.

よって,  $m=2$  のときは,

$$v'_n(x) = na_1u_n(x)$$

という結果を得ることが出来た.

ここで, 前回の結果の  $m=2$  と比較すると

$$u'_n(x) = a_1 \sum_{i=1}^{n-1} u_i(x)u_{n-i}(x)$$

に対して,  $a_1 = a_2 = 1$  と置いた結果として

$$v'_n(x) = \begin{cases} \{\sum_{i=1}^{n-1} v_i(x)v_{n-i}(x)\} - 2v_{n-1}(x) - (n-3)(v_{n-3}(x) - v_{n-5}(x) + \dots \pm v_0(x) \mp 1) & (n : \text{odd}) \\ \{\sum_{i=1}^{n-1} v_i(x)v_{n-i}(x)\} - 2v_{n-1}(x) - (n-3)(v_{n-3}(x) - v_{n-5}(x) + \dots \pm v_1(x)) & (n : \text{even}) \end{cases}$$

という結果が実験的に得られたが, まだ証明には至っていない.

(次回の研究集会では上記の関係式の証明及び  $v_n$  型の  $m$  次の微分が発表できれば良いと考えています.)

In[1]= V = Expand/@CoefficientList[Series[ $\frac{2-xy}{1-xy-y^2}$ , {y, 0, 10}], y];

V // TableForm

D[V[[2]], x] -

Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[2-i]], {i, 1, 1}] - 2 V[[1]] + V[[1]] - 1]

D[V[[3]], x] - Expand[

Total@Table[Expand[V[[i]] V[[3-i]], {i, 1, 2}] - 2 V[[2]] - 0]

D[V[[4]], x] - Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[4-i]], {i, 1, 3}] - 2 V[[3]] - 1 (V[[1]] - 1)]

D[V[[5]], x] - Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[5-i]], {i, 1, 4}] - 2 V[[4]] - 2 (V[[2]])]

D[V[[6]], x] - Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[6-i]], {i, 1, 5}] - 2 V[[5]] - 3 (V[[3]] - V[[1]] + 1)]

D[V[[7]], x] - Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[7-i]], {i, 1, 6}] - 2 V[[6]] - 4 (V[[4]] - V[[2])]

D[V[[8]], x] - Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[8-i]], {i, 1, 7}] - 2 V[[7]] - 5 (V[[5]] - V[[3]] + V[[1]] - 1)]

D[V[[9]], x] - Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[9-i]], {i, 1, 8}] - 2 V[[8]] - 6 (V[[6]] - V[[4]] + V[[2])]

D[V[[10]], x] - Expand[Total@Table[Expand[V[[i]] V[[10-i]], {i, 1, 9}] - 2 V[[9]] - 7 (V[[7]] - V[[5]] + V[[3]] - V[[1]] + 1)]

Out[2]/TableForm=

2  
x  
2 + x<sup>2</sup>  
3 x + x<sup>3</sup>  
2 + 4 x<sup>2</sup> + x<sup>4</sup>  
5 x + 5 x<sup>3</sup> + x<sup>5</sup>  
2 + 9 x<sup>2</sup> + 6 x<sup>4</sup> + x<sup>6</sup>  
7 x + 14 x<sup>3</sup> + 7 x<sup>5</sup> + x<sup>7</sup>  
2 + 16 x<sup>2</sup> + 20 x<sup>4</sup> + 8 x<sup>6</sup> + x<sup>8</sup>  
9 x + 30 x<sup>3</sup> + 27 x<sup>5</sup> + 9 x<sup>7</sup> + x<sup>9</sup>  
2 + 25 x<sup>2</sup> + 50 x<sup>4</sup> + 35 x<sup>6</sup> + 10 x<sup>8</sup> + x<sup>10</sup>

Out[3]= 0

Out[4]= 0

Out[5]= 0

Out[6]= 0

Out[7]= 0

Out[8]= 0

Out[9]= 0

Out[10]= 0

Out[11]= 0

# On the sum of cubes of the Catalan triangle numbers

大塚秀幸

今回は, *Catalan triangle* についての新しい結果を紹介する.  
 これは, *P.J.Miana, N.Romero* と私の共同の仕事である.

## §1. Catalan triangle

*Catalan triangle*  $(B_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  は, 以下のように定義される.

$$B_{n,k} := \frac{k}{n} \binom{2n}{n-k}.$$

( Shapiro は, ある条件を満たす経路の総数を  $B_{n,k}$  で表し, それが上記のように  
 かけることを示した ([1]を参照). 現在では上記の式により定義することが多い. )

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	...
1	1						
2	2	1					
3	5	4	1				
4	14	14	6	1			
5	42	48	27	8	1		
6	132	165	110	44	10	1	
...	...	...	...	...	...	...	...

Shapiro は  $B_{n,k}$  と *Catalan number*  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  の間の興味深い関係を示している.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \sum_{k=1}^n B_{n,k} = \frac{n+1}{2} C_n; \\ \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\min(n,m)} B_{n,k} B_{m,k} = C_{n+m-1} \quad \text{とくに} \quad \sum_{k=1}^n B_{n,k}^2 = C_{2n-1}; \\ \text{(iii)} \quad B_{n,k} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_k}. \end{array} \right.$$

$\sum_{k=1}^n B_{n,k}^3$  についてはどのようなことが分かるだろうか.

## §2. 2項係数の立方を含む和

ここでは、2項係数の立方を含む和について知られていることや、新しくわかったことについて述べる。

$f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^3$  を *Franel Number* といい、閉じた式で表現することができないが、

*Franel* は以下の漸化式を得ている。

$$(n+1)^2 f_{n+1} = (7n^2 + 7n + 2)f_n + 8n^2 f_{n-1}.$$

また、*V. Strehl* による次の関係式は非常に興味深い ([2],[3]参照)。

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n}.$$

これに影響を受け、私は次の関係式を見つけた。

$$\sum_{k=0}^n (n-k) \binom{2n}{k}^3 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \binom{j}{n} \binom{j}{n-1}. \quad (1)$$

さらに、これを *R. Tauraso* が以下のように拡張し証明を与えた。それは *Amer. Math. Monthly* に共著問題として掲載されている。

**Problem11844** (*Ohtsuka and Tauraso* [4]).  $m > n \geq 0$  に対して、

$$\sum_{k=0}^n (m-2k) \binom{m}{k}^3 = (m-n) \binom{m}{n} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j}{n} \binom{j}{m-n-1}.$$

我々は帰納法による解答を用意している ([5]参照)。

次に、Problem11844 に関連する予想を書いておく。

**予想 1** .  $m > n \geq 0$  と  $r \geq 1$  に対して、

$$(m-n) \binom{m}{n} \left| \sum_{k=0}^n (m-2k) \binom{m}{k}^r \right|.$$

### §3. On the sum of cubes of the Catalan triangle numbers

$\sum_{k=1}^n B_{n,k}$  や  $\sum_{k=1}^n B_{n,k}^2$  については閉じた式で表現できる. これまでに,  $\sum_{k=1}^n B_{n,k}^3$  を閉じた式で表現できた結果は知られていない (おそらくないと思う).

しかし,  $\sum_{k=1}^n B_{n,k}^3$  を “Strehl の公式” のように 別の形の和で表現ができる.

§ 2 の(1)を利用して以下の関係式を導くことができる (後の付録を参照).

**定理 1** (Ohtsuka, Miana, Romero [6]).

$$\sum_{k=1}^n B_{n,k}^3 = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}^3 - \frac{3}{2} \binom{2n}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \binom{j}{n} \binom{j}{n-1}.$$

ただちに, 以下の系を得る.

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n} \Big| \sum_{k=1}^n B_{n,k}^3.$$

さらに, 次のように書きかえることができる.

**定理 2** (Ohtsuka, Miana, Romero [6]).

$$\sum_{k=1}^n B_{n,k}^3 = \frac{1}{2n} \binom{2n}{n} \sum_{k=1}^n k \binom{2n-k-1}{n-1}^2.$$

ここで, 関連する予想を書いておく.

**予想 2** (Ohtsuka, Miana, Romero [6]). 奇数  $p \geq 1$  に対して

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n} \Big| \sum_{k=1}^n B_{n,k}^p.$$

(付録) 定理 1 の証明

*Proof.* By the identity (1), we have

$$\sum_{k=0}^n k \binom{2n}{n-k}^3 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \binom{j}{n} \binom{j}{n-1}. \quad (\text{A})$$

We use the identities

$$(i) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{and} \quad (ii) r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}.$$

We have

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (6n^2k + 2k^3) \binom{2n}{n-k}^3 = \sum_{k=0}^n ((n+k)^3 - (n-k)^3) \binom{2n}{n-k}^3 \\ &= \sum_{k=0}^n \left[ (n+k)^3 \binom{2n}{n+k}^3 - (n-k)^3 \binom{2n}{n-k}^3 \right] \quad (\text{by (i)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[ (2n)^3 \binom{2n-1}{n+k-1}^3 - (2n)^3 \binom{2n-1}{n-k-1}^3 \right] \quad (\text{by (ii)}) \\ &= (2n)^3 \sum_{k=0}^n \left[ \binom{2n-1}{n+k-1}^3 - \binom{2n-1}{n+k}^3 \right] \quad (\text{by (i)}) \\ &= (2n)^3 \binom{2n-1}{n-1}^3 = n^3 \binom{2n}{n}^3 \quad (\text{by (ii)}). \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^3} \binom{2n}{n-k}^3 = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}^3 - \frac{3}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{n-k}^3. \quad (\text{B})$$

Since (A) and (B), we obtain the identity

$$\sum_{k=1}^n B_{n,k}^3 = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}^3 - \frac{3}{2} \binom{2n}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \binom{j}{n} \binom{j}{n-1}. \quad \square$$

参考文献

- [1] L. W. Shapiro, *A Catalan triangle*, Discrete Math. 14.1 (1976).
- [2] V. Strehl, *Binomial Sums and Identities*, Maple Technical Newsletter 10(1993).
- [3] V. Strehl, *Binomial Identities--Combinatorial and Algorithmic Aspects*, Discrete Math. 136(1994).
- [4] H. Ohtsuka and R. Tauraso, *Problem 11844*, Amer. Math. Monthly 122.5(2015).
- [5] H. Ohtsuka and R. Tauraso, *a solution of "Problem 11844"*, at  
<http://www.mat.uniroma2.it/~tauraso/AMM/AMM11844.pdf>
- [6] P. J. Miana, H. Ohtsuka, N. Romero, *Sums of powers of Catalan triangle numbers* (preprint), at  
<http://arxiv.org/pdf/1602.04347v1.pdf>