

# 日本フィボナッチ協会 第**15**回研究集会報告書

2017年8月

日本フィボナッチ協会

# 日本フィボナッチ協会／第15回研究集会案内

日 時 2017年8月25日（金曜日） 10時30分～17時30分  
場 所 東京理科大学（神楽坂キャンパス）2号館4階の241・242教室  
アクセス 飯田橋駅（JR総武線、東京メトロ東西線、有楽町線、南北線、都営大江戸線）徒歩5分  
参加費 1000円（小学生・中学生・高校生・高専生は無料）

主催：日本フィボナッチ協会

協賛：東京理科大学理数教育研究センター

## プログラム

講演（241教室）

司会 大関清太

- 10：30～10：35 開会の辞（大関清太）  
10：35～10：50 岩淵勇樹（（株）カヤック）フィボナッチ列  
10：50～11：05 河野真 とある恒等式と応用  
11：05～11：25 池田悠輝（早稲田基幹理工 学）  
パスカルの三角形の縦列とその漸化式  
11：25～11：45 中村滋（元東京海洋大）  
フィボナッチ数の生成関数を整数にする有理数  
11：45～12：05 城野真民（和歌山大学 院）フィボナッチ数の関係式  
12：05～13：30 昼食、数学体験館・近代科学資料館見学，242教室展示

司会 中村 滋

- 13：30～13：50 渋川元樹（大阪大学情報）有理数体上の2階のabenacci数  
13：50～14：10 小松尚夫（武漢大学）  
Convolution identities for tribonacci numbers  
14：10～14：30 塩見大輔（山形大）  
有限体上既約なフィボナッチ多項式について  
14：30～14：50 飯高 茂（元学習院大学）超完全数の世界  
14：50～15：10 平井皓陽・山崎雅貴（飯山高等学校）  
オイラー余関数の評価式について  
15：10～15：30 片山真一（徳島大）  
取れる石の数に制限を付けた Wythoffの石取りゲーム

15 : 30 ~ 16 : 00 休憩

司会 飯高 茂

16 : 00 ~ 16 : 10 萩原幸男 ((公財) 地震予知総合研究振興会)  
ツァリスの $q$ -指数関数の遷移過程  
( $q$ -フィボナッチ数へのアプローチ)

16 : 10 ~ 16 : 30 細矢治夫 (元お茶の水女子大)  
isospectral graph についての新発見

16 : 30 ~ 16 : 45 中川義章・尾立貴志  
原子核物理とフィボナッチ

16 : 45 ~ 17 : 05 前山和喜 (関西大学 院)・落合竜也 (工学院大学 院)  
一般化されたフィボナッチ計算盤について

17 : 05 ~ 17 : 20 中川幸一 (埼玉大 院)  
Derivative of generating function of the general  
 $m$ -th order linear recurrence sequence 3

17 : 20 ~ 17 : 35 大関清太 (元宇都宮大学) 冪和に関するある等式

17 : 35 事務連絡 大関清太

17 : 40 閉会の辞

18 : 00 ~ 20 : 00 懇親会

会場の近くPORTA (約2時間) 会費4000円 (学生・院生は半額)

日本フィボナッチ協会代表 大関清太

投稿 浜田忠久 (東京大学 院) フィボナッチ数の素因数色彩

# フィボナッチ列とそれを応用した黄金比の近似

岩淵 勇樹

2017-08-25

## Abstract

本稿では、フィボナッチ数と関わりの深い数列「フィボナッチ列」を紹介し、またそれを応用して黄金比の近似値の算出を行う。

## 1 フィボナッチ列

### 1.1 定義

以下の  $S_n$  をフィボナッチ文字列 (Fibonacci word) と定義する<sup>1</sup>。

$$S_0 = 0 \tag{1}$$

$$S_1 = 01 \tag{2}$$

$$S_n = S_{n-1}S_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{3}$$

$S_a S_b$  を  $S_a$  と  $S_b$  の文字列連結とする。

$S_n$  の最初の 5 項は以下のように表される。

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = 01$$

$$S_2 = 010$$

$$S_3 = 01001$$

$$S_4 = 01001010$$

$$S_5 = 0100101001001$$

$S_n$  の極限となる無限文字列は  $S_\infty$  と書き、無限フィボナッチ文字列と呼ぶ。

また、以下の数列を定義する。

---

<sup>1</sup>Fibonacci word には“フィボナッチ列”と“フィボナッチ文字列”という 2 通りの日本語名称があるが、本稿では文字列として定義されるものをフィボナッチ文字列 (Fibonacci word)、数式として定義されるものをフィボナッチ列 (Fibonacci word sequence) と呼び分けることにする。

$$s_n = S_\infty(n) \quad (4)$$

$$\tilde{s}_n = 1 - S_\infty(n) \quad (5)$$

このとき、 $s_n$  をフィボナッチ列 (Fibonacci word sequence) と呼ぶ。ただし、 $S_n(x)$  を  $S_n$  の  $x+1$  文字目を取り出す操作とする。

$$s_n = 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$$

$$\tilde{s}_n = 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

## 1.2 一般項

第  $n$  番目の項は次の閉じた式 (Closed-form expression) によって表される [1]。

$$2 + \lfloor (n+1)\varphi \rfloor - \lfloor (n+2)\varphi \rfloor \quad (6)$$

ただし  $\varphi$  は黄金比  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  であり、 $\lfloor x \rfloor$  は床関数である。

## 1.3 切断列

黄金比の逆数  $\frac{1}{\varphi}$  の傾きをもつ直線が格子と交わった点として、垂直の交わりを 0、水平の交わりを 1 としたとき、切り出された列はフィボナッチ列になっている。

このように直線が格子を切断することによって求められる列を切断列 (Cutting sequence) と呼ぶ。

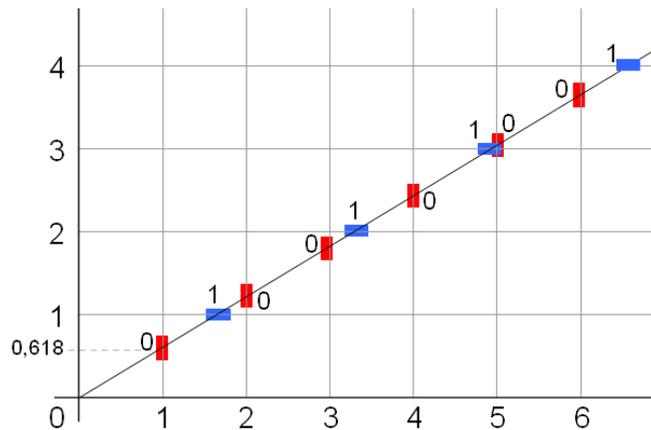


図 1: フィボナッチ列の切断列 (Wikipedia より [1])

## 2 フィボナッチ列生成アルゴリズム

以下に、フィボナッチ列（フィボナッチ文字列を含む）を算出するプログラムの例を示す<sup>2</sup>。

プログラムはECMAScript 2015 (ECMA-262 6th Edition, ES6) 準拠の JavaScript を用いて実装した。

### 2.1 定義を利用した計算

```
1 const s = [];  
2 s[0] = '0';  
3 s[1] = '01';  
4  
5 function fibonacci_word(n) {  
6   let ret;  
7  
8   if (n < 2) {  
9     ret = s[n];  
10  
11    return ret;  
12  }  
13  
14  ret = fibonacci_word(n - 1) + fibonacci_word(n - 2);  
15  
16  s[n] = ret;  
17  
18  return ret;  
19 }  
20  
21 let num;  
22  
23 num = fibonacci_word(5);  
24  
25 console.log(num); // => 0100101001001
```

ソースコード 1: 定義を利用した計算

### 2.2 一般項を利用した計算

```
1 function fibonacci_word_sequence(n) {  
2   const { sqrt, floor } = Math;  
3   const  $\phi$  = (1 + sqrt(5)) / 2;  
4  
5   let ret;  
6  
7   ret = 2 + floor((n + 1) *  $\phi$ ) - floor((n + 2) *  $\phi$ );  
8  
9   return ret;  
10 }  
11  
12 const zeros = (n) => new Array(n).fill(0);  
13  
14 const arr = zeros(13).map( (_num, i) => fibonacci_word_sequence(i) );  
15  
16 console.log(arr); // => [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]
```

ソースコード 2: 一般項を利用した計算

### 2.3 切断列を利用した計算

---

<sup>2</sup>ソースは次の URL から参照可: <https://gist.github.com/butchi/991bff7a1068c93d7a00eea1e92289e5>

```

1  const { sqrt, floor } = Math;
2  const φ = (1 + sqrt(5)) / 2;
3
4  const zeros = (n) => new Array(n).fill(0);
5
6  function fibonacci_word_sequence_array_with_length(n) {
7    const gArr = zeros(floor((n + 1) / φ)).map( (_num, i) => (i + 1) / φ );
8
9    const iArr = zeros(floor((n + 1) / φ / φ)).map( (_num, i) => i + 1 );
10
11   const cuttingArr = gArr.concat(iArr);
12
13   cuttingArr.sort( (a, b) => a - b );
14
15   let ret;
16
17   ret = cuttingArr.map( (num) => Number.isInteger(num) ? 1 : 0 );
18
19   return ret;
20 }
21
22 let arr;
23
24 arr = fibonacci_word_sequence_array_with_length(13);
25
26 console.log(arr); // => [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]

```

ソースコード 3: 切断列を利用した計算

### 3 黄金比の近似への応用

黄金比を含む無理数の計算には、一般的にはニュートン法などの近似で求められるが、黄金比と関わりの深いフィボナッチ数やフィボナッチ列を用いることによって効率的に計算ができるのではないかと考え、近似方法を検討し、その一手法を提案する。

#### 3.1 フィボナッチ列の積算

以下のようにフィボナッチ列の積算  $a_n$  を定義する。

$$a_0 = 1 \tag{7}$$

$$a_n = \sum_{m=0}^n \tilde{s}_m + a_0 \quad (n \geq 1) \tag{8}$$

初項は以下である。

$$a_n = 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 13, \dots \tag{9}$$

#### 3.2 ワイツフ配列

ワイツフ配列 (Wythoff array、ワイトホッフ配列とも)  $W_{m,n}$  は以下のように定義される [2] [3]。

$$W_{m,1} = \lfloor [m\varphi]\varphi \rfloor \quad (10)$$

$$W_{m,2} = \lfloor [m\varphi]\varphi^2 \rfloor \quad (11)$$

$$W_{m,n} = W_{m,n-2} + W_{m,n-1} (n > 2) \quad (12)$$

この定義から逆算をし、 $W_{m,-1}$ ,  $W_{m,-2}$  なども求めることが出来る。  
以下に、 $-2$  列目、 $-1$  列目、 $0$  列目を含むワイソフ配列の一部を示す。

1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
2	2	4	6	10	16	26	42	68	110	178
3	3	6	9	15	24	39	63	102	165	267
4	4	8	12	20	32	52	84	136	220	356
4	5	9	14	23	37	60	97	157	254	411
5	6	11	17	28	45	73	118	191	309	500
6	7	12	19	31	50	81	131	212	343	555

ここで、表でもわかる通り、ワイソフ配列の  $-2$  列目は先に定義した  $a_n$  に一致する。  
また、 $-1$  列目は非負整数に一致する。

### 3.3 黄金比との関係

隣り合うフィボナッチ数の比は黄金比に漸近することが一般的に知られているが、行としてフィボナッチ数やリュカ数をも含むワイソフ配列は、どの行についても隣り合う 2 数は黄金比に漸近する。

$$\forall k \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{n,k}}{W_{n,k+1}} = \frac{1}{\varphi} \quad (13)$$

特に、 $W_{n,-2} = a_n$  であることから、 $-2$  列目と  $-1$  列目の隣り合う数は、先述の性質により以下のように表すことができる。

$$\frac{W_{n,-2}}{W_{n,-1}} = \frac{a_n}{n} \quad (14)$$

これにより、以下の簡単な極限式が導かれる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{\varphi} \quad (15)$$

実際、 $\frac{a_n}{n}$  に具体値を代入すると、徐々に黄金比の逆数  $\frac{1}{\varphi} \approx 0.61803$  に徐々に近づくことが確認できる。

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{1} &= \frac{2}{1} = 2 \\ \frac{a_2}{2} &= \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{a_3}{3} &= \frac{3}{3} = 1 \\ &\vdots \\ \frac{a_{21}}{21} &= \frac{14}{21} \approx 0.666667 \\ \frac{a_{22}}{22} &= \frac{15}{22} \approx 0.681818 \\ \frac{a_{23}}{23} &= \frac{15}{23} \approx 0.652174 \end{aligned}$$

### 3.4 結果

$\frac{a_{100000}}{100000} = \frac{61805}{100000} = 0.61805$  となり、 $\frac{1}{\phi} \approx 0.61803$  に極めて近い値を取得することができた。  
引数を 10 のべき乗数ではなく 2 のべき乗数にすれば、計算機での近似値計算をビットシフト演算を用いて容易に実装可能となる。

### 3.5 考察

今回は計算量の評価までは行わなかったが、計算自体は乗算を利用せずに実装が可能なおかげから、計算量のオーダーが仮に大きいとしても、粗い近似は高速に算出できる可能性がある。

## 4 まとめ

フィボナッチ列はフィボナッチ数やワイソフ配列、黄金比と深い関わりがある。  
フィボナッチ列の諸性質を元に、本稿では黄金比のある算出方法を提案したが、その他にもさまざまな方法を考えることができる。

## 参考文献

- [1] Fibonacci word - Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci\\_word](https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_word).
- [2] KASUKA Yoshiharu. 2006 年 9 月 19 日 - ジュエリーアイズ on the Web, <http://www.jewelryeyes.net/log.cgi?dat=69j>.
- [3] Weisstein, Eric W. Wythoff Array. MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/WythoffArray.html>

# とある恒等式と応用

河野 真\*

2017年8月25日

まず、次の表から始めます。

間差 1 の式	間差 $m$ の式
$F_{n+1} - F_n - F_{n-1} = 0$	$F_{n+m} - L_m F_n + (-1)^m F_{n-m} = 0$
$F_{n+1}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2 = (-1)^n$	$F_{n+m}^2 - L_m F_{n+m} F_n + (-1)^m F_n^2 = (-1)^n F_m^2$
$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$	$F_{n+m} F_{n-m} - F_n^2 = (-1)^{n+m} F_m^2$

(1)

左上の式は、フィボナッチ数を定義する漸化式です。

左中の式は、フィボナッチ数に関する恒等式を証明するとき、時々登場する恒等式です。

左下の式は、Cassini's identity と呼ばれる、非常に有名な恒等式です。

本稿では、左の等式を含んだ拡張を考えるというところから始めます。拡張の考え方は、「間差 1 の式」から「間差  $m$  の式」へというもので、左下の Cassini's identity に対応する恒等式は、右下の等式であると考えます。この右下の式は、Catalan's identity という名前が付けられている有名な恒等式です。

左上・左中に対応する間差  $m$  の式は、それぞれ、右上・右中の恒等式であろうと考えます。

この 2 式の証明は配布資料を、ご確認ください。

さて、次にこの式の応用について考えてみましょう。

## 1 $F_{n+m} - L_m F_n + (-1)^m F_{n-m} = 0$ の応用例

右上の式

$$F_{n+m} - L_m F_n + (-1)^m F_{n-m} = 0 \tag{2}$$

の応用例として次の式を掲げます。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+(2m-1)}}{F_n F_{n+2(2m-1)}} = \frac{1}{L_{2m-1}} \sum_{n=1}^{2(2m-1)} \frac{1}{F_n} \tag{3}$$

同様の過程により、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+3}}{F_n F_{n+2} F_{n+4} F_{n+6}} = \frac{17}{480} \tag{4}$$

という計算が容易にできます（算出過程は配布資料を参照）。

---

\* e-mail:qgb01362@yahoo.co.jp

## 2 $F_{n+m}^2 - L_m F_{n+m} F_n + (-1)^m F_n^2 = (-1)^n F_m^2$ の応用例

右中の式、

$$F_{n+m}^2 - L_m F_{n+m} F_n + (-1)^m F_n^2 = (-1)^n F_m^2 \quad (5)$$

の応用例として次の式を掲げます。

$m, n \in \mathbb{N}$  として、

$$F_{n+m}^2 - L_{2m} F_n^2 + F_{-m+n}^2 = 2(-1)^n F_m^2 \quad (6)$$

が成り立つ（導出過程は配布資料を参照）。

この式は、両辺の  $F_x$  の項がすべて平方の形になっています。不思議な恒等式です。さらに、これを利用して、

$m, n \in \mathbb{Z}, w = 4mn(m^2 - n^2), x = m^2 - n^2 + 2mn, y = m^2 + n^2, z = m^2 - n^2 + 2mn$  とするとき

$$F_x^2 - L_{2w} F_y^2 + F_z^2 = 2(-1)^x F_w^2 \quad (7)$$

という、恒等式を導出できます。

## 3 $F \rightarrow L$ を施してみる

最初の表 (1) において、左辺の  $F$  を  $L$  に置き換えるということを考えると、次の表を得る。

間差 1 の式	間差 $m$ の式
$L_{n+1} - L_n - l_{n-1} = 0$	$L_{n+m} - L_m l_n + (-1)^m L_{n-m} = 0$
$L_{n+1}^2 - L_{n+1} L_n - L_n^2 = -5(-1)^n$	$L_{n+m}^2 - L_m L_{n+m} L_n + (-1)^m L_n^2 = -5(-1)^n F_m^2$
$L_{n+1} L_{n-1} - L_{n+1}^2 = -5(-1)^n$	$L_{n+m} L_{n-m} - L_n^2 = -5(-1)^{n+m} F_m^2$

(8)

上段の比較は次のようになるが、自然に理解できると思う。

	間差 1 の式	間差 $m$ の式
$F$	$F_{n+1} - F_n - F_{n-1} = 0$	$F_{n+m} - L_m F_n + (-1)^m F_{n-m} = 0$
$L$	$L_{n+1} - L_n - l_{n-1} = 0$	$L_{n+m} - L_m l_n + (-1)^m L_{n-m} = 0$

(9)

次に、中段と下段の式は 2 次形式について示唆している。すなわち

	間差 1 の式	間差 $m$ の式
$F$	$F_{n+1}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2 = (-1)^n$	$F_{n+m}^2 - L_m F_{n+m} F_n + (-1)^m F_n^2 = (-1)^n F_m^2$
$L$	$L_{n+1}^2 - L_{n+1} L_n - L_n^2 = -5(-1)^n$	$L_{n+m}^2 - L_m L_{n+m} L_n + (-1)^m L_n^2 = -5(-1)^n F_m^2$
$F$	$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$	$F_{n+m} F_{n-m} - F_n^2 = (-1)^{n+m} F_m^2$
$L$	$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$	$L_{n+m} L_{n-m} - L_n^2 = -5(-1)^{n+m} F_m^2$

(10)

となるが、2 次形式の場合、 $F \rightarrow L$  という操作によって、 $(-5)$  倍となることは想像に難くない。これを効果的に記述するために記号を定義する。

■定義  $g(X_1, X_2, \dots, X_p) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots, X_p]$  と、数列  $\bar{\alpha} = \{\alpha(n)\}, \bar{x} = \{x_n\}$  に対して、 $\hat{g}(n, \bar{x}; \bar{\alpha}) = g(x_{n+\alpha(1)}, x_{n+\alpha(2)}, \dots, x_{n+\alpha(p)})$  で定義する。

この記号のもとで、次のように予想できる。

■予想1  $g(X_1, X_2, \dots, X_p) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots, X_p]$  を  $X_1, X_2, \dots, X_p$  の2次形式とする。

$$\hat{g}(n, \bar{F}; \bar{\alpha}) = (-1)^n C \Rightarrow \hat{g}(n, \bar{L}; \bar{\alpha}) = -5\hat{g}(n, \bar{F}; \bar{\alpha}) \quad (11)$$

と予想できる。ただし  $C$  は、 $n$  に無関係な定数とする。

ここで出てくる  $(-5)$  という倍率の正体は何であろうかと思いを巡らせると、ちょうどいい対象が見つかる。それは、Cassini's identity の  $L$  バージョンを観察すると見えてくる。すなわち、 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  によって、

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = \begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} = |Q^{n+1} + Q^{n-1}| = |(Q + Q^{-1})Q^n| = -5(-1)^n \quad (12)$$

である。

以上の流れにより、

■予想2  $\bar{a} = \{a_n\}$  が  $a_{n+1} - a_n - a_{n-1} = 0$  を満たすとする。

$g(X_1, X_2, \dots, X_p) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots, X_p]$  を  $X_1, X_2, \dots, X_p$  の2次形式とする。

$$\hat{g}(n, \bar{F}; \bar{\alpha}) = (-1)^n C \Rightarrow \hat{g}(n, \bar{a}; \bar{\alpha}) = (a_1 a_{-1} - a_0^2) \hat{g}(n, \bar{F}; \bar{\alpha}) \quad (13)$$

と予想できる。ただし  $C$  は、 $n$  に無関係な定数とする。

つまり、倍率は  $a_1 a_{-1} - a_0^2 = a_1^2 - a_1 a_0 - a_0^2$  であると主張したい。

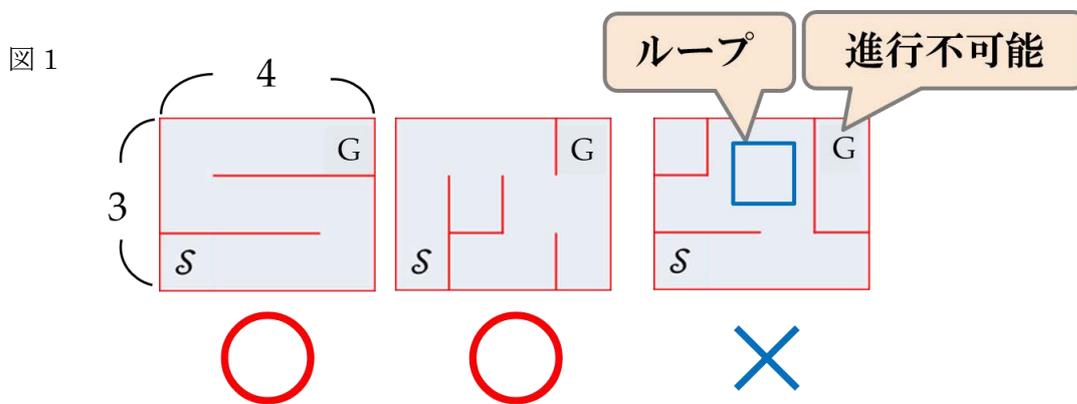
2つの予想は、私自身では証明は得られていない。あるいは、すでに証明されて、私が知らないだけかもしれない。

# パスカルの三角形の縦列とその漸化式

早稲田大学基幹理工学部 1 年

池田 悠輝

私は迷路の研究をしていて、その過程で作成可能迷路の場合の数を求めることにした。ここでの迷路の条件は図 1 の左や中のような迷路が何通り作れるかということである。



ここで  $m \times n$  の迷路の場合の数を  $\mathcal{W}_{(m,n)}$  と表すと定義する。

この一般項を  $m, n$  を用いて表すことが目標である。

これは言い換えればグラフ理論における全域木の場合の数の一般化といえる。

ループの禁止というものは、閉路を持たないグラフといえる。

もしかしたら既にこの一般項は知られているかもしれないが、私が調べた限りでは見つけれなかったため、実際に求めることにした。

最初からこの一般化は難しいため  $m$  を固定して考える。

まず  $m = 2$  で固定して考える。

具体的に考えると以下ようになる。

$$\mathcal{W}_{(2,1)} = 1$$



図 2

$$\mathcal{W}_{(2,2)} = 4$$



図 3

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{(2,3)} &= 4 \times 4 - 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

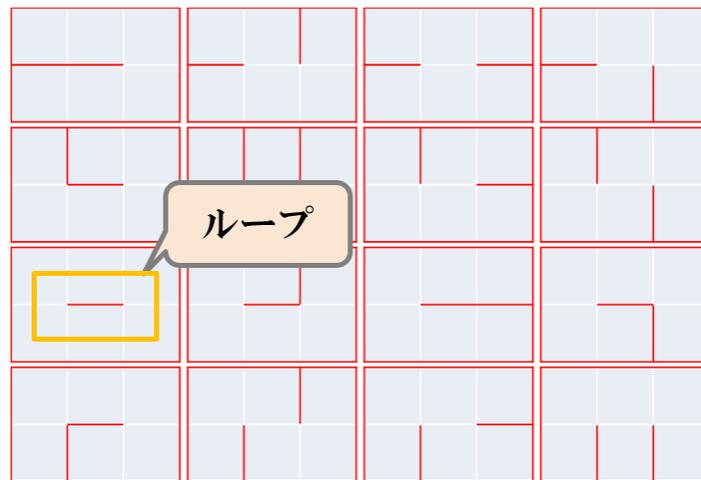


図 4

$2 \times 3$  の迷路は壁の配置だけを考えて  $4 \times 4$  の 16 通りである。

これは壁の個数を求めたとき同様に  $2 \times 2$  の迷路を基準に考えている。

この場合では迷路中心部の 2 つの格子点を中心とする  $2 \times 2$  の空間を考え、そこから 4 方向のいずれかに壁を設置している。各々が 4 通りのため  $4 \times 4$  が考えられる配置の数である。

しかし、そのうちの一つの迷路にはループがあるため条件を満たさない。

これは各々の格子点からの壁が重なった場合と考えられる。(図 5 参照)

従ってそれを引いた 15 通りとなる。

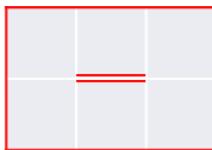


図 5

このループの存在に注意しながら  $2 \times n$  の迷路を考える。

まず既に完成されている  $2 \times n - 1$  の迷路を導入する。(図 6)

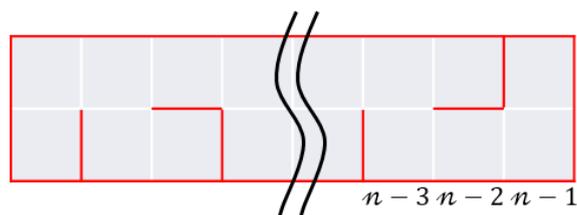


図 6

ここで最後尾に一行付け加えた迷路を考える。(図 7)

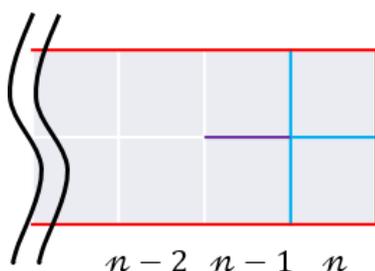


図 7

このとき  $n$  番目の壁は上図の色線の 4 通り存在する。  
 ここで青色の壁と紫色の壁の配置で場合分けして考える。

(i) 青線に壁があるとき

このとき  $n - 1$  番目までの壁の配置に青色の壁は影響しない。

各々の配置において  $\mathcal{W}_{(2,n-1)}$  通りの設置方法があるので、 $3\mathcal{W}_{(2,n-1)}$  通り。(図 8 参照)

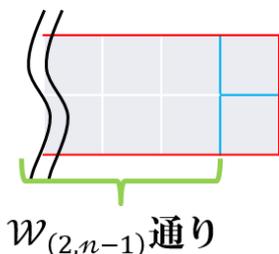


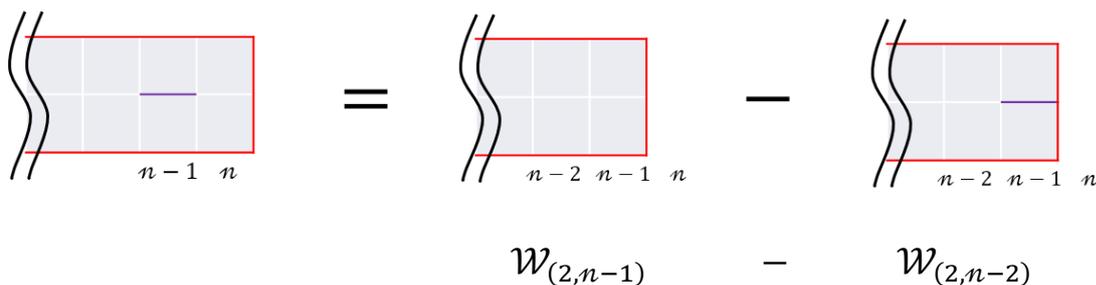
図 8

(ii) 紫線に壁があるとき

この場合  $n - 1$  番目までの壁に干渉する可能性がある。

ここで紫壁の右側は繋がっている。従って左側の部分では閉じている必要がある。

そこで逆に考え、右側で既に閉じている迷路の場合の数を全体から引くと



$\mathcal{W}_{(2,n-1)} - \mathcal{W}_{(2,n-2)}$  通りとなる。(図 9 参照)

従って  $\mathcal{W}_{(2,n)} = (i) + (ii) = 4\mathcal{W}_{(2,n-1)} + \mathcal{W}_{(2,n-2)}$

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{(2,0)} = 0, \mathcal{W}_{(2,1)} = 1 \\ \mathcal{W}_{(2,n+2)} = 4\mathcal{W}_{(2,n+1)} - \mathcal{W}_{(2,n)} \end{cases}$$

これを解くと

$$\mathcal{W}_{(2,n)} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

が得られる。よって  $\mathcal{W}_{(2,n)}$  の一般項を求めることができた。

同様の手法で非常に煩雑ではあるが  $\mathcal{W}_{(3,n)}$  の一般項についても求められる。

$\mathcal{W}_{(m,n)}$  についてはまだ求まっていないが、今回趣旨はこれではなく、この副産物である。

この研究を始めた頃、 $\mathcal{W}_{(2,n)}$  の漸化式を立てる際に誤った方法で式を作ってしまった。その方法を以下に示す。従って以降の漸化式を立てるまでの計算には誤りが生じていることに注意する。

考え方は先ほどとは逆であり、 $\mathcal{W}_{(2,3)}$ を求めたときと同様の考え方をを用いる。

$\mathcal{W}_{(2,3)}$ の場合は  $4 \times 4$  の 16 通りから、壁が重なってしまったために発生したループのある迷路の 1 通りを引いて 15 通りと出した。(図 4 参照)

同様に考えると各々の  $2 \times 2$  の空間 (この個数は外周でない格子点数に等しい) から 4 方向のいずれかに壁を設置する場合の数が  $\mathcal{W}_{(2,n)}$  のオーダーになっている。

従ってこの数から、壁が重なる場合の数を引けばよい。

ここで外周を含まない格子点の数は  $n$  個であることから、このオーダーは  $4^n$  通りと表せる。

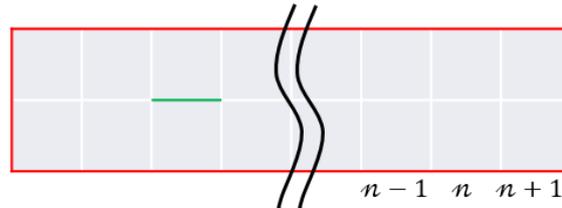


図 11

ここで図 11 のような迷路を考える。最後尾が  $n+1$  であることに注意する。

以降曖昧さ回避のためこの計算方法における迷路の場合の数を  $a_n$  とする。

ここで緑線に壁が重なっているとす。

このときこの場合の数は緑の壁の列を境に左右に分けて考えられる。

この場合左側は  $2 \times 2$ 、右側は  $2 \times (n-2)$  となっている。

それぞれの壁の配置方法は  $a_2, a_{n-2}$  である。

従って緑に壁が重なっている場合の数は  $a_2 a_{n-2}$  である。

緑がいずれで重なったとしても考え方は変わらない。

従って  $k$  番目に緑線がきたときの場合の数は  $a_k a_{n-k}$  と表せる。

このことから任意の地点で壁が重なる場合の数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

従ってこの迷路の場合の数  $a_n$  は

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = 4^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

の漸化式によって表すことができる。

ここまでの計算ミスの過程である。具体的には  $a_k a_{n-k}$  の総和をとったところで、同じものも数えてしまったために、全体として数が大きくなってしまった。

即ち一般に  $\mathcal{W}_{(2,n)} \leq a_n$  が成り立つ。

しかし、当時なかなかこの計算ミスに気付かなかった。その点についての考察はのちに述べる。

一見圧倒的に  $\mathcal{W}_{(2,n+2)} = 4\mathcal{W}_{(2,n+1)} - \mathcal{W}_{(2,n)}$  の漸化式の方がきれいである。

しかし、わざわざこの計算ミスを取り上げたのは、この煩雑な漸化式からは考えられない一般項の美しさ故である。

まずこの漸化式を観察してみる.

具体的に数値を代入することにより第5項目までを得た. 以下にそれを示す.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 4, 15, 56, 210)$$

実際に計算することでよりよくわかるが、全ての項を使うことにより次の項を算出している.  $n$ 項間漸化式のようなものである. しかも  $a_k a_{n-k}$  なので項が増える度に違うペアとの積の和になる. さらにそれが  $4^n$  から引かれているので、非常に複雑なものとなっている.

しかし一つ重要な手がかりがあり、これを計算しようと思ったきっかけとして  $\Sigma$  の部分の式に見覚えがあったというのがある.

それは一般にカタラン数と呼ばれ漸化式は次の式で与えられる.

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \end{cases}$$

またこれを計算することにより一般項を得られ、以下の式で表される.

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{※ただし } \binom{n}{r} \text{ は二項係数を表すもので } \binom{n}{r} = {}_n C_r \text{ とする.}$$

具体的には  $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 1, 2, 5, 14, 42)$  である.

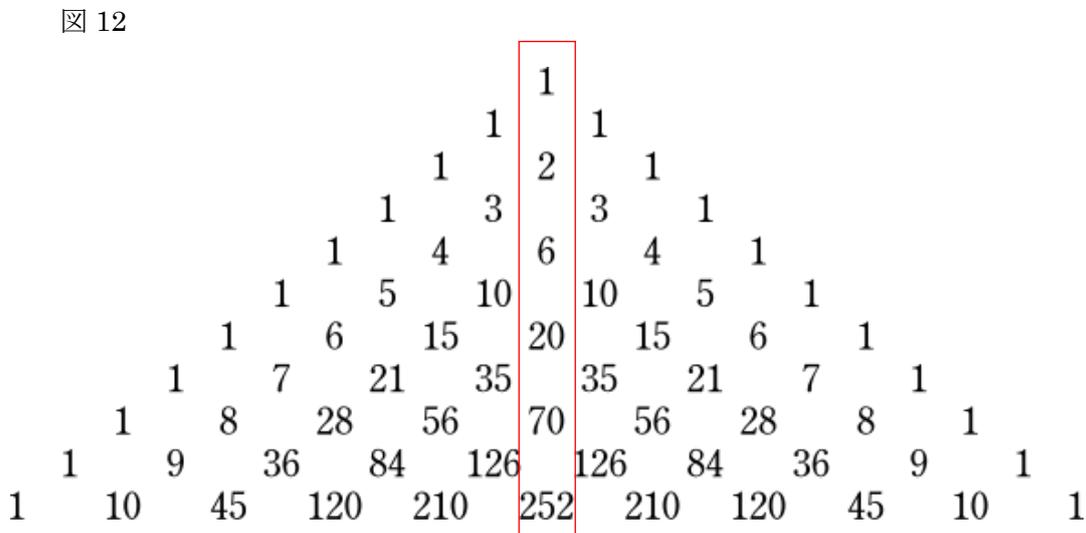
見た通り非常に似た形をしている. 始めはこの漸化式を代入できるのではないかと考えたが、 $4^n$  から引かれているため値が複雑に変化し代入することは出来なかった. しかし、色々試していた中でとても興味深い関係を見つけた.

実はこの二つの数列の各項を足し合わせた数列  $\{a_n + c_n\} (n \geq 1)$  は

$\{a_n + c_n\} = 2, 6, 20, 70, 252, \dots$  と表せる.

一見どのような数列かわからないが、偶然にもこの数列を知っていた.

それは  $\binom{2n}{n}$ 、即ちパスカルの三角形の中央列である. (図 12)



このことから  $a_n = \binom{2n}{n} - c_n$  と推測できる.

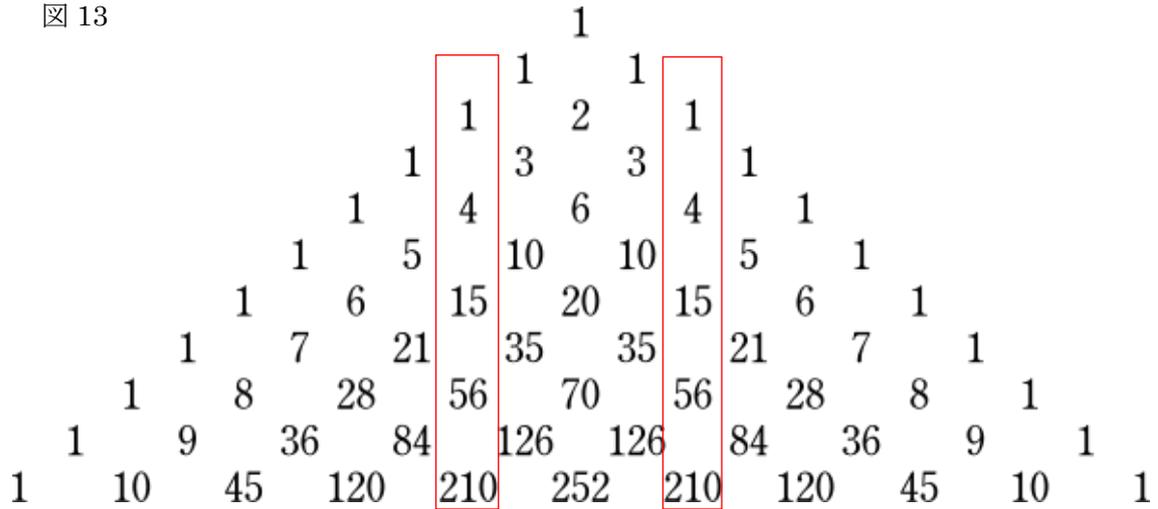
$c_n$  の一般項を代入し、計算すると  $a_n = \binom{2n}{n+1}$

よって今回の漸化式の一般項は  $\binom{2n}{n+1}$  であると推測できた.

この事実には非常に大きな衝撃を受けた.

視覚的にはパスカルの三角形の中央の両脇 2 列目がそれにあたる. (図 13)

図 13



後はこれを証明するだけである. ここで実際に漸化式を足してみると

$$a_{n+1} + c_{n+1} = 4^n + \sum_{k=0}^n (c_k c_{n-k} - a_k a_{n-k}) + 2a_0 a_n = \binom{2n+2}{n+1}$$

が成り立つと予想される.

これを数学的帰納法を用いて証明しようと思う. しかし、二つの数列がペアとなる項を変えながら変化していくというのもあり、証明できなかった.

(追記: 現在はこれの帰納法による証明に成功した.)

しかしここまでカタラン数と深い関係があるのならば、今回の漸化式もカタラン数の場合と同じ方法、即ち母関数 (生成関数) で求められるのではないかと考えた.

※以下分母が 0 になるときの振る舞いなどの細かい検証を一部省略している.

条件を確認する.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = 4^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

しかし今回の漸化式では第 0 項が定義されていないためカタラン数のようにはいかない.

ここで  $a_n = \binom{2n}{n} - c_n$  に  $n = 0$  を代入すると  $0! := 1$  を考慮し  $a_0 = \binom{0}{0} - c_0 = 0$

となり  $a_0 := 0$  とするとこれは **well-defined** であり、これを用いることで今回の漸化式を以下のような形に変形できる.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 4^n - \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \end{cases}$$

$\mathcal{A}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  とおく.

$$\{\mathcal{A}(x)\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n \right\}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = 4^n - a_{n+1}$$

上記の式を代入し  $\{\mathcal{A}(x)\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(4^n - a_{n+1})x^n\}$

ここで  $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$  は公比  $4x$  の無限等比級数の和とみなすと

$$\begin{aligned} \therefore \{\mathcal{A}(x)\}^2 &= \frac{1}{1-4x} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n \\ x\{\mathcal{A}(x)\}^2 &= \frac{x}{1-4x} - \sum_{n+1=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

$m = n + 1$  とおきカタラン数同様に計算し

$$x\{\mathcal{A}(x)\}^2 = \frac{x}{1-4x} - \mathcal{A}(x)$$

$$\therefore \mathcal{A}(x) = \frac{-1 \pm \frac{2x-1}{\sqrt{1-4x}}}{2x}$$

$\mathcal{A}(0) = 0$  を検証することで  $\mathcal{A}(x) = \frac{-1 - \frac{2x-1}{\sqrt{1-4x}}}{2x}$  を得る.

ここで  $\sqrt{1-4x} = \mathcal{D}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$  とおき、

これをマクローリン展開することで  $d_n = \frac{\mathcal{D}^{(n)}(0)}{n!}$  を得る

また  $\mathcal{D}(x) = \sqrt{1-4x}$  を微分していくことにより

$$\mathcal{D}^{(n+1)}(x) = -2 \frac{(2n)!}{n!} (1-4x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

が成り立つと予想される. これは数学的帰納法によって証明される.

$$x = 0 \text{ のとき } \mathcal{D}^{(n+1)}(0) = -2 \frac{(2n)!}{n!}$$

$$\text{ここで } \frac{1}{\mathcal{D}(x)} := \mathcal{E}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n \text{ とおくと}$$

$$\mathcal{A}(x) = \frac{-1 - (2x - 1)\mathcal{E}(x)}{2x}$$

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 = (1 - 2x) \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$$

$$1 + 2a_0x + 2a_1x^2 + \dots = e_0 + (e_0 - 2e_1)x + (e_1 - 2e_2)x^2 + \dots$$

係数比較することで

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ a_n = \frac{e_{n+1} - 2e_n}{2} \end{cases}$$

$$\text{また } d_n \text{ と同様に } e_n = \frac{\mathcal{E}^{(n)}(0)}{n!}$$

ここで  $\mathcal{D}'(x) = -2(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$  であり、 $\mathcal{E}(x) = (1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$  なので

$$\mathcal{D}'(x) = -2\mathcal{E}(x)$$

$$\mathcal{E}^{(n)}(x) = -\frac{\mathcal{D}^{(n+1)}(x)}{2}$$

$$\therefore \mathcal{E}^{(n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$$

これらを代入し計算すると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\binom{2n+2}{n+1} - 2\binom{2n}{n}}{2} = \frac{(n+1)(2n+1)! - (2n)!(n+1)^2}{\{(n+1)!\}^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \binom{2n}{n+1} \end{aligned}$$

よって一般項は  $\binom{2n}{n+1}$  である。

これは予想の式と完全に一致する。

今回は完全に想定外の発見だったためこのような形でまとめた。

ここで本来の一般項と比較してみる。

以下に数列  $\{a_n - \mathcal{W}_{(2,n)}\}$  の第 5 項までを示す。

表 1

$n$	0	1	2	3	4	5
誤差	0	0	0	0	0	1

見た通り第 4 項まで完全に一致していた。



定義及びパスカルの三角形の性質より

$$\mathcal{T}(n, k) - \mathcal{T}(n, k - 1) = \binom{n}{k}$$

$$\mathcal{T}(n, 0) = 1$$

$$\mathcal{T}(n, 1) = n + 1$$

$$\mathcal{T}(n, n) = 2^n$$

が適当な値で成立することが容易にわかる。

ここで隣接二項和を考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(n, k - 1) + \mathcal{T}(n, k) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \\ &= \left\{ \binom{n}{0} \right\} + \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right\} + \left\{ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right\} + \cdots + \left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right\} \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{k} \\ &= \sum_{\ell=0}^k \binom{n+1}{\ell} \\ &= \mathcal{T}(n+1, k) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{T}(n, k - 1) + \mathcal{T}(n, k) = \mathcal{T}(n + 1, k)$$

従って一般にパスカルの三角形同様の性質をもち、任意の隣接二項を足すことによりその一つ下段の値になる。

ここで9段目から17段目までの前半部分を取り出す。(図15)

図 15

						1	10	46	130
					1	11	56	176	
				1	12	67	232	562	
			1	13	79	299	794		
		1	14	92	378	1093	2380		
	1	15	106	470	1471	3473			
	1	16	121	576	1941	4944	9949		
1	17	137	697	2517	6885	14893			
1	18	154	834	3214	9402	21778	41226		

ここで赤枠に注目すると、先程の誤差の数列に非常に近い数列があることがわかる。  
しかし5番目の3214でまたも1ずれてしまった。

この数列は  $T(2n, n-5) = \sum_{i=0}^{n-5} \binom{2n}{i}$  である。

このことからこの誤差はこの数列によって上から押さえつけられると予想される。  
さらに誤差の数列とは9項間の完全一致である。

しかし、この数列の意味及び  $a_n$  の概念的意味が捉えられていないため、現在も予想のまま現状維持である。だが逆にこの関係に意味がないとは考え難い。

従ってこれにより何かしらの意味を見いだせないかと考えている。

またここでカタラン数に注目すると、一般にカタラン数の漸化式は定義されたもの以外に

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$$

と二項間漸化式で表されることが知られている。

そこで  $a_n$  も同様に二項間漸化式で表せると考えた。

実際これは  $a_n$  の一般項が求められた今、二項間の比をとることで容易に求められる。

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+2}}{\binom{2n}{n+1}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+2)!n!}}{\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{n(n+2)}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{n(n+2)} a_n$$

ここでカタラン数の漸化式と比較すると

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$$

これらの辺々を割り整理すると

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

これにより  $a_n$  は  $h n c_n$  の形で表されることがわかった。

実際に数値を見てみると

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots) = (0, 1, 4, 15, 56, 210 \dots)$$

$$(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \dots) = (1, 1, 2, 5, 14, 42 \dots)$$

よって  $\frac{a_n}{c_n}$  は

$$\left( \frac{a_0}{c_0}, \frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \frac{a_3}{c_3}, \frac{a_4}{c_4}, \frac{a_5}{c_5} \dots \right) = (0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots)$$

従って  $h = 1$  即ち  $a_n = n c_n$  と表せると推測できる。

(証明)

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{\binom{2n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} = \frac{(n+1)\binom{n}{n+1}\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} = n$$

$$\therefore a_n = nc_n$$

これは非常に衝撃的な事実である。何故ここまで気付かなかったのか不思議なくらい単純な式である。気付かなかった要因の一つとして先に和の関係式を見つけてしまったのがあげられる。

しかしこれにより二つの数列の関係式が二つ得られたため

$$\begin{cases} a_n = nc_n \\ a_n = \binom{2n}{n} - c_n \end{cases}$$

の連立方程式を解くだけで、母関数を一切使わず  $a_n, c_n$  両方の一般項を同時に得ることができる。

実際辺々を引くことで  $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$  が瞬時に得られる。

さらに  $a_n = nc_n$  より  $a_n = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$  であり、これを計算することで  $a_n = \binom{2n}{n+1}$

これにより証明さえ出来れば複雑な漸化式によって定義されたカタラン数の一般項を母関数を使わずに得られる。

しかし、その肝心な二つの式の証明が非常に難しく、以前は証明できなかった。

だが、現在はこの証明方法を発見した。以下にそれを誘導問題形式にしたのを示す。

問.以下の漸化式によって与えられる数列について以下の問に答えよ

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4^n - \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} & a_0 = 0 \\ c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} & c_0 = 1 \\ p_{n+1} = \sum_{k=0}^n (k+1)c_k c_{n-k} \\ q_{n+1} = \sum_{k=0}^n (k+1)^2 c_k c_{n-k} \end{cases}$$

(1)  $p_n$  を  $c_n$  を用いて表せ。

(2)  $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n$  が成立することを示せ。

(3)  $q_{n+1} = \frac{(n+2)^2}{2}c_{n+1} - 4^n$  が成立することを示せ。

(4)  $a_n = nc_n$  が成立することを示せ。

(5) 数列  $\{a_n + c_n\}$  の一般項を求めよ。

(6) 数列  $\{a_n\}, \{c_n\}$  の一般項を求めよ。

(2)までの手法は知られている。(2)からカタラン数の一般項を求めることも可能である。  
 今回はそこに新たに $q_n$ を導入することで、 $a_n$ の一般項やその関係式を導くことに成功した。  
 以下その証明である。

解答

(1)

$$p_{n+1} = c_0 c_n + 2c_1 c_{n-1} + 3c_2 c_{n-2} + \cdots + (n+1)c_n c_0$$

$$+ p_{n+1} = (n+1)c_0 c_n + n c_1 c_{n-1} + (n-1)c_2 c_{n-2} + \cdots + c_n c_0$$

$$2p_{n+1} = (n+2) \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$

$$= (n+2)c_{n+1}$$

(2) 数学的帰納法を用いる

(i)  $n = 0$ のときは成立 (詳細は略)

(ii)  $n \leq m$ の時の成立を仮定する. 即ち $c_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2} c_k (0 \leq k \leq m)$ を仮定

$$p_{m+2} = \sum_{k=0}^{m+1} (k+1)c_k c_{m-k+1} = c_0 c_{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} (k+1)c_k c_{m-k+1}$$

$$= c_{m+1} + \sum_{k=0}^m (k+2)c_{k+1} c_{m-k} = c_{m+1} + \sum_{k=0}^m (k+2) \frac{2(2k+1)}{k+2} c_k c_{m-k}$$

$$= c_{m+1} + 4 \sum_{k=0}^m (k+2)c_k c_{m-k} - 2 \sum_{k=0}^m c_k c_{m-k}$$

$$= c_{m+1} + 4p_{m+1} - 2c_{m+1}$$

$$\therefore c_{m+1} = \frac{2(2m+3)}{m+3} c_m \quad (\because p_n = \frac{n+1}{2} c_n)$$

(3)

(i)  $n = 0$ のときは成立 (詳細は略)

(ii)  $n \leq m$ の時の成立を仮定する.

$$q_{m+2} = \sum_{k=0}^{m+1} (k+1)^2 c_k c_{m-k+1}$$

$$= c_{m+1} + \sum_{k=0}^m (k+2)^2 c_{k+1} c_{m-k}$$

$$\begin{aligned}
&= c_{m+1} + \sum_{k=0}^m (k+2)^2 \frac{2(2k+1)}{k+2} c_k c_{m-k} \\
&= c_{m+1} + 4 \sum_{k=0}^m (k+1)^2 c_k c_{m-k} + 2 \sum_{k=0}^m (k+1) c_k c_{m-k} - 2 \sum_{k=0}^m c_k c_{m-k} \\
&= c_{m+1} + 4q_{m+1} + 2p_{m+1} - 2c_{m+1} \\
&= c_{m+1} + 4 \left\{ \frac{(m+2)^2}{2} c_{m+1} - 4^m \right\} + 2 \frac{m+2}{2} c_{m+1} - 2c_{m+1} \\
&= \frac{(m+3)^2}{2} c_{m+2} - 4^{m+1}
\end{aligned}$$

(4)

(i)  $n = 0$  のときは成立 (詳細は略)

(ii)  $n \leq m$  の時の成立を仮定する.

$$\begin{aligned}
a_{m+1} &= 4^m - \sum_{k=0}^m a_k a_{m-k} \\
&= 4^m - \sum_{k=0}^n k c_k (m-k) c_{m-k} \\
&= 4^m + q_{m+1} - (m+2)p_{m+1} + (m+1)c_{m+1} \\
&= 4^m + \frac{(m+2)^2}{2} c_{m+1} - 4^m - (m+2) \frac{m+2}{2} c_{m+1} + (m+1)c_{m+1} \\
&= (m+1)c_{m+1}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
a_{n+1} + c_{n+1} &= (n+1)c_{n+1} + c_{n+1} \\
&= (n+2) \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n \\
&= 2(2n+1)c_n \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} (n+1)c_n \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} (nc_n + c_n) \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} (a_n + c_n) \\
\therefore a_n + c_n &= \frac{2(2n-1)}{n} \frac{2(2n-3)}{n-1} \cdots \frac{2}{1} (a_0 + c_0) = \frac{2^n (2n-1)!!}{n!} = \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$



これはベルヌーイの三角形と同様の操作を三回繰り返した、三重ベルヌーイの三角形である。

即ち、頂点を 0 段 0 番目としたとき  $n$  段  $m$  番目を  $\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{n}{i}$  で表せる。

この中央列（赤枠）に着目するとここに  $q_n$  と非常によく似た数列がみれた。

この中央列は  $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{2n}{i}$  で表される。しかしこの数列も途中で 1 ズレてしまっている。

このようにパスカルの三角形やその似た三角形の縦列の数列について、いくつか関係を見つけたが、いずれも 1 ズレる現象があり、これらに意味があるのか等を今後考えていきたい。

$x_n, y_n$  のようにある程度一般化できるかもしれないし、その場合その誤差数列の一般項、及びそれについてまた三角形の縦列に現れないか等を考えていくつもりだ。

またこれらの三角形の縦列に対応する今回のような漸化式がないかを調べ、それについて性質を考えると面白いのではないかと考えている。

今回  $a_n$  は計算ミスによって導出された。そのためカタラン数のように組み合わせ論の考え方から一般項を導出することができなかった。故に私はこの  $a_n$  について、その漸化式を導出させるような組み合わせ論的な意味を探している。

## フィボナッチ数の生成関数を整数にする有理数

東京海洋大学名誉教授 中村 滋

**Abstract** We inform here a Pongsriiam's result, deciding all the rational numbers for which the generating functions of Fibonacci numbers is an integral. (CMJ, Vol.48, No.2, pp.97-101; 2017)

### はじめに

Fibonacci Quarterly 以外の雑誌に載った論文を一つ紹介します. MAA (アメリカ数学協会) の機関誌の一つ The College Mathematics Journal (以下 CMJ) に載った P. Pongsriiam [2] です. これは同じ雑誌で D.S. Hong [1] がフィボナッチ数とリュカ数の生成関数を整数にする有理数を与え, 最後に, これだけが生成関数を整数にする有理数だろうか? と問いかけたのに対する完全な解答になっています.

### フィボナッチ数の生成関数

フィボナッチ数の生成関数は, 次のようになります:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n x^n) = x / (1 - x - x^2), \quad \dots (1)$$

この関数は  $x^2 - x - 1 \neq 0$  のとき, すなわち,  $x \neq (1 \pm \sqrt{5})/2$  のときに定義されます. 右辺の値を  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ ,  $\beta = (1 - \sqrt{5})/2 = -1/\alpha$  と書くと,  $\alpha$  は黄金数 (golden number) で, 関数項の級数と見た時の収束半径は,  $1/\alpha$  になります:  $|x| < 1/\alpha$  で,  $\sum_{n=1}^{\infty} (F_n x^n)$  は収束する.

### いくつかの公式

フィボナッチ数とリュカ数の膨大な公式から, そのいくつかを使います.

$$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \dots (2)$$

$$L_n F_m = F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m}, \quad 5F_n F_m = L_{n+m} - (-1)^m L_{n-m}, \quad \dots (3)$$

$$F_n L_m - L_n F_m = -2(-1)^m F_{n-m}, \quad \dots (4)$$

$$5F_n^2 + 4(-1)^n = L_n^2, \quad \dots (5)$$

などです. いずれも有名な公式で, 拙著『フィボナッチ数の小宇宙』では, (2) が定理7と定理7', (3) と (4) が定理11の系であり, (5) は定理9(c)です. より一般に, 次の定理39が自然数  $m$  と  $k$  に対して成り立ちます:

$$5m^2 + 4(-1)^n = k^2 \quad (m \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}) \Rightarrow m = F_n, k = L_n \quad (\exists n \in \mathbf{N}). \quad \dots (6)$$

これは (5) より同値 ( $\Leftrightarrow$ ) です. またリュカ数を mod 5 で考えると 1, 3, 4, 2 で循環するので, mod 5 で合同式  $L_n \equiv 2, 1, 3, 4 \pmod{5}$  ( $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$  respectively) が成り立ちます. 特に,

$$L_{2n+1} \equiv (-1)^n \pmod{5} \quad \dots (7)$$

です. これらの式を使って, ポングスリーアムは彼の結果を導いたのでした. 結果は次の通りです.

### Hong・Pongsriiam の定理 (フィボナッチ数の場合)

**定理H**  $x = F_n / F_{n+1}$  ( $n$  は 0 または自然数) のとき,  $F(x) \in \mathbf{Z}$ .

証明は (1) にこの値を代入し, (2) を使えばすぐに得られます. ポングスリーアムは次の形にして, この問題を完全解決しました.

**定理P** 有理数  $x \in \mathbf{Q}$  に対して,  $F(x) \in \mathbf{Z}$  となるための必要十分条件は,  $x = F_n / F_{n+1}$

( $n: 0$  または自然数) または  $x = -F_{n+1} / F_n$  ( $n: 自然数$ ) となることであり, このとき  $F(x) = (-1)^n F_n \cdot F_{n+1}$  である.

(証明)  $x < 0$  の場合も含めて, 十分条件は容易に確かめられる. そこで  $x \in \mathbf{Q}$ ,  $F(x) = k \in \mathbf{Z}$  と仮定する.  $k = 0$  のときは,  $n = 0$  とすれば,  $x = F_0 / F_1 = 0$  だから定理は成り立つ. そこで  $k \neq 0$  と仮定する. このとき (1) より, 2次式  $kx^2 + (k+1)x - k = 0$  が成り立ち,

$$x = \left\{ -(k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2 + 4k^2} \right\} / 2k \quad \dots (8)$$

と求まる.  $x$  は有理数だから根号の中は平方数となり, それを  $m^2$  ( $m > 0$ ) と書けば,  $5m^2 - 4 = 25k^2 + 10k + 1 = (5k+1)^2 = \square$  となる. よって (6) より  $m$  はフィボナッチ数だが, その符号を見ると  $n$  は奇数なので, 次式が成り立つ:

$$m = F_{2n+1}, \pm(5k+1) = L_{2n+1} \quad (\exists n \in \mathbf{N}) \quad \dots (9).$$

この複号は (7) より  $(-1)^n$  なので,

$$k = (-1)^n \{L_{2n+1} - (-1)^n\} / 5 \quad \dots (10)$$

となる. (3) 式の後半で,  $n$  と  $m$  を  $n+1$  と  $n$  に置き換えると,  $5F_{n+1}F_n = L_{2n+1} - (-1)^n = (-1)^n 5k$ , よって  $k = (-1)^n F_n F_{n+1}$  となる. また (3) 式の前半で,  $n$  と  $m$  を  $n+1$  と  $n$  に置き換えて  $F_{2n+1} - (-1)^n = L_{n+1}F_n$  となり, (4) と併せて  $F_{2n+1} + (-1)^n = F_{n+1}L_n$ .

$$F_{2n+1} - (-1)^n = L_{n+1}F_n, \quad F_{2n+1} + (-1)^n = F_{n+1}L_n. \quad \dots (11).$$

(8) より,  $x = \{ -(-1)^n F_n F_{n+1} \pm F_{2n+1} - 1 \} / (-1)^n 2F_n F_{n+1}$  である.

**Case I**  $n$  が偶数の場合 (複号  $\pm$  で2つに分ける):

$$x = (-F_n F_{n+1} + L_{n+1} F_n) / 2F_n F_{n+1} = (-F_{n+1} + L_{n+1}) / 2F_{n+1} = F_n / F_{n+1},$$

$$\text{または, } x = (-F_n F_{n+1} - F_{n+1} L_n) / 2F_n F_{n+1} = -(F_n + L_n) / 2F_n = -F_{n+1} / F_n.$$

**Case II**  $n$  が奇数の場合 (複号  $\pm$  で2つに分ける):

$$x = -(F_n F_{n+1} + F_{n+1} L_n) / 2F_n F_{n+1} = -(F_n + L_n) / 2F_n = -F_{n+1} / F_n,$$

$$\text{または, } x = -(F_n F_{n+1} - L_{n+1} F_n) / 2F_n F_{n+1} = -(F_{n+1} - L_{n+1}) / 2F_{n+1} = F_n / F_{n+1}. \quad \square$$

**系** 生成関数  $F(x)$  を関数項の級数と見ると, 収束半径内の  $x$  は,  $x = F_n / F_{n+1}$  ( $n: 0 \text{ or } \mathbf{N}$ ).

## References

[1] D.S. Hong, "When is the generating function of Fibonacci Numbers is integral",

(CMJ, Vol.46, No.2, pp.110-112; 2015)

[2] P. Pongsriiam, "Integral Values of the Generating Functions of Fibonacci and Lucas Numbers",

(CMJ, Vol.48, No.2, pp.97-101; 2017)

## フィボナッチ数列の関係式

城野 真民

和歌山大学 大学院

2017年8月25日

## 参考文献

G.Soydan, L.Németh, L.Szalay  
"On the Diophantine equation  $\sum_{j=1}^k jF_j^p = F_n^q$ "  
arXiv:1705.06066 (2017)

この論文の続きを研究中.

## フィボナッチ数列について

### 定義 フィボナッチ数列

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

## 和に関する関係式

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

例えば, 次のような和の関係式が成立する.

### 定理 1

$$\sum_{j=1}^k F_j = F_{k+2} - 1$$

これは, 数学的帰納法によって容易に証明できる.

## 和に関する関係式

この定理とは別に, 次のようなものがある.

### 定理 2

$$\sum_{j=1}^k jF_j = kF_{k+2} - F_{k+3} + 2$$

これも, 数学的帰納法によって容易に証明できる.

例えば

$$\sum_{j=1}^3 jF_j = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 = 3 \times F_5 - F_6 + 2$$

$$\sum_{j=1}^4 jF_j = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 21 = 4 \times F_6 - F_7 + 2$$

## モチベーション

### 参考文献

G.Soydan, L.Németh, L.Szalay  
"On the Diophantine equation  $\sum_{j=1}^k jF_j^p = F_n^q$ "  
arXiv:1705.06066 (2017)

$(p, q) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$  が解かれたが, 一般には未解決.  
その中の1つの

### 問題 $(p, q) = (1, 1)$

$$\sum_{j=1}^k jF_j = F_n$$

をみだす  $(k, n)$  を全て求めなさい.

## モチベーション

$$\sum_{j=1}^1 jF_j = 1 = F_1 = F_2$$

$$\sum_{j=1}^2 jF_j = 1 + 2 \times 1 = 3 = F_4$$

$$\sum_{j=1}^3 jF_j = 3 + 3 \times 2 = 9 \quad \text{満たす } F_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^4 jF_j = 9 + 4 \times 3 = 21 = F_8$$

$$\sum_{j=1}^5 jF_j = 21 + 5 \times 5 = 46 \quad \text{満たす } F_n \text{ は存在しない}$$

## モチベーション

$$\sum_{j=1}^6 jF_j = 46 + 6 \times 8 = 94 \quad \text{満たす } F_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^7 jF_j = 94 + 7 \times 13 = 185 \quad \text{満たす } F_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^8 jF_j = 185 + 8 \times 21 = 353 \quad \text{満たす } F_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^9 jF_j = 353 + 9 \times 34 = 659 \quad \text{満たす } F_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^{10} jF_j = 659 + 10 \times 55 = 1209 \quad \text{満たす } F_n \text{ は存在しない}$$

## モチベーション

### 定理 3 (Soydan, Németh, Szalay, 2017)

$$\sum_{j=1}^k jF_j = F_n$$

が成立するときの  $(k, n)$  は,  $(k, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 8)$  のみである。

#### mod $F_k$

$$0, 1, 1, 2, \dots, F_{k-2}, F_{k-1}, 0, F_{k-1}, F_{k-1}, 2F_{k-1}, \dots, F_{k-2}F_{k-1}, F_{k-1}F_{k-1}$$

$$F_{k-2}F_{k-1} \equiv \begin{cases} -1 & \text{if } k \text{ is even} \\ 1 & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}, \quad F_{k-1}F_{k-1} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ is even} \\ -1 & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}$$

## モチベーション

### 定理 3 (Soydan, Németh, Szalay)

$$\sum_{j=1}^k jF_j = F_n$$

が成立するときの  $(k, n)$  は,  $(k, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 8)$  のみである。

→ 他の数列では？

## 主定理

### 定義 リュカ数列

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L_n$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

ここで,  $L_n$  において成り立つのかを調べてみた。

### 問題

$$\sum_{j=1}^k jL_j = L_n$$

をみたす  $(k, n)$  を全て求めなさい。

## 主定理

$$\sum_{j=1}^1 jL_j = 1 = L_1$$

$$\sum_{j=1}^2 jL_j = 1 + 2 \times 3 = 7 = L_4$$

$$\sum_{j=1}^3 jL_j = 7 + 3 \times 4 = 19 \quad \text{満たす } L_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^4 jL_j = 19 + 4 \times 7 = 47 = L_8$$

$$\sum_{j=1}^5 jL_j = 47 + 5 \times 11 = 102 \quad \text{満たす } L_n \text{ は存在しない}$$

## 主定理

$$\sum_{j=1}^6 jL_j = 102 + 6 \times 18 = 210 \quad \text{満たす } L_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^7 jL_j = 210 + 7 \times 29 = 413 \quad \text{満たす } L_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^8 jL_j = 413 + 8 \times 47 = 789 \quad \text{満たす } L_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^9 jL_j = 789 + 9 \times 76 = 1468 \quad \text{満たす } L_n \text{ は存在しない}$$

$$\sum_{j=1}^{10} jL_j = 1468 + 10 \times 123 = 2698 \quad \text{満たす } L_n \text{ は存在しない}$$

## 主定理

ここまでの実験結果をまとめると次のようになる。

**実験結果**  $1 \leq k \leq 10$  において ( $k \in \mathbb{N}$  とする.)

$$\sum_{j=1}^1 jL_j = 1 = L_1 \quad (k, n) = (1, 1)$$

$$\sum_{j=1}^2 jL_j = 3 = L_4 \quad (k, n) = (2, 4)$$

$$\sum_{j=1}^4 jL_j = 21 = L_8 \quad (k, n) = (4, 8)$$

## 主定理

### 主定理

$$\sum_{j=1}^k jL_j = L_n$$

が成立するときの  $(k, n)$  は,  $(k, n) = (1, 1), (2, 4), (4, 8)$  のみである.

**mod  $L_k$**

$$\underbrace{2, 1, 3, 4, \dots, L_{k-2}, L_{k-1}}_k, \underbrace{0, L_{k-1}, L_{k-1}, 2L_{k-1}, \dots, F_{k-2}L_{k-1}, F_{k-1}L_{k-1}}_k$$

$$F_{k-2}L_{k-1} \equiv \begin{cases} -3 & \text{if } k \text{ is even} \\ 3 & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}, \quad F_{k-1}L_{k-1} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ is even} \\ -1 & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}$$

## 定義 ペル数列・ペルリュカ数列

$$P_0 = 0, P_1 = 1, P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

$$Q_0 = 2, Q_1 = 2, Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$$

### 主定理

$$\sum_{j=1}^k jP_j = P_n$$

が成立するときの  $(k, n)$  は,  $(k, n) = (1, 1), (2, 3)$  のみである.

### 主定理

$$\sum_{j=1}^k jQ_j = Q_n$$

が成立するときの  $(k, n)$  は,  $(k, n) = (1, 1), (2, 3)$  のみである.

## 今後の展望

### 定義 一般化

$$U_0 = 0, U_1 = 1, U_{n+2} = aU_{n+1} + U_n$$

$$V_0 = 2, V_1 = a, V_{n+2} = aV_{n+1} + V_n$$

### 問題

$$\sum_{j=1}^k jU_j = U_n \quad \left( \text{resp.} \quad \sum_{j=1}^k jV_j = V_n \right)$$

が成立するときの  $(k, n)$  を全て決定せよ.

- $a = 1$  のとき, フィボナッチ数列とリュカ数列
- $a = 2$  のとき, ペル数列とペルリュカ数列

# 有理数体上の2階の abenacci 数

渋川元樹\* (阪大情報)

## 概要

対称関数の良い特殊値という観点から、 $\mathbb{Q}$  上の既約な abel 多項式に付随した Fibonacci 数の拡張 (abenacci 数) を導入する. 更にその例として 2 次多項式に付随した abenacci 数について論じる.

## 1 Introduction

古典的な Fibonacci 数  $F_n$  は初期条件  $F_0 = 0, F_1 = 1$  と漸化式

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

で定義される. これらの数列に関しては非常に多くの性質が知られており, 様々な類似, 拡張, 一般化も存在する.

他方で多くの variations が考察されながらも, Fibonacci 数の特徴付け, あるいはそれを踏まえた良い拡張というのは未だに明確ではないように思われる. そこで今年の発表では対称関数の良い特殊値という観点から,  $\mathbb{Q}$  上の既約な abel 多項式に付随した Fibonacci 数の拡張を導入した. すなわち (i)  $\mathbb{Q}$  上既約の monic な整数係数の abel 多項式

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^r a_k \lambda^k$$

とその根  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  を, (ii)  $r$  変数の  $n$  次完全対称式

$$h_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r) := \sum_{m_1 + \dots + m_r = n} x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r}$$

に代入した特殊値

$$F_{n+1}(f) := h_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

で, (iii) 正值単調非減少性を満たす数列  $\{F_{n+1}(f)\}_{n \geq 0}$ , を「 $\mathbb{Q}$  上既約な abel 多項式  $f$  に付随した Fibonacci 数  $F_{n+1}(f)$ 」と呼ぶことにする. ただこれだと長すぎるので,

---

\*g-shibukawa@ist.osaka-u.ac.jp

$$\text{abel} + \text{Fibonacci} = \text{abenacci}$$

で  $\mathbb{Q}$  上の abenacci 数, 更に  $\deg(f) = r$  のとき,  $F_{n+1}(f)$  は  $r$  階の定数係数の差分方程式を満たすので,  $\mathbb{Q}$  上  $r$  階の abenacci 数と呼ぶことにする.

このように定めると漸化式 (特に定義よりその特性多項式は abelian になる) 等の基本的諸性質は対称函数の一般論から, 整除性は円分体の数論から従うような非常に良い拡張になっている. 今年の発表では classical な Fibonacci 数を含む系列として

$$F_{n+1}^{(r)} = h_n^{(r)} \left( -\cos \left( \frac{2\pi r}{2r+1} \right), \dots, -\cos \left( \frac{2\pi}{2r+1} \right) \right) \quad (1.1)$$

を考察し, 特に  $F_{n+1}^{(r)}$  が  $\mathbb{Q}$  上  $r$  階の abenacci 数になっていることを述べた.

そこで今回は低階の abenacci 数の決定を行う. 特に  $\mathbb{Q}$  上 2 階の abenacci 数の決定を行う.

## 2 有理数体上の 1 階の abenacci 数

まず  $r = 1$  のときを考察する. このとき,  $\mathbb{Q}$  上既約の monic な整数係数 1 次の abel 多項式は

$$f(\lambda) = \lambda - a \in \mathbb{Z}[\lambda]$$

と書ける. このとき定義より 1 変数の完全対称多項式は  $h_n(x) = x^n$  なので

$$h_n(a) = a^n$$

となる. これはただの等比数列なので, 正值単調非減少数列になる条件は  $a \geq 1$  であることがわかる. つまり 1 以上の整数のなす等比数列が  $\mathbb{Q}$  上 1 階の abenacci 数であることがわかる.

## 3 有理数体上の 2 階の abenacci 数

次いで 2 階の場合を考察する. この場合,  $\mathbb{Q}$  上既約の monic な整数係数 2 次の abel 多項式は,  $a^2 + 4b$  が平方数にならない整数  $a, b$  を用いて

$$f(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b \in \mathbb{Z}[\lambda]$$

と書ける. このとき  $f$  の根を

$$\alpha_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

とする. 2 変数の完全対称多項式

$$h_n(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^n x_1^j x_2^{n-j} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$

に代入したものを  $F_{n+1}(f) = h_n(\alpha_+, \alpha_-)$  とする. このとき  $h_n$  および対称函数の一般論 (Wronski 関係式) より,  $F_{n+1}(f)$  は

$$F_0(f) = 0, F_1(f) = 1, F_{n+2}(f) = aF_{n+1}(f) + bF_n(f) \quad (3.1)$$

を満たすことはすぐにわかる. また  $f$  の Galois 群は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ゆえ abelian であることはよい. あとは  $F_{n+1}(f)$  が正値単調非減少となる  $a, b$  の条件を決定できればよい.

実はより一般に,  $a, b$  を実数として (3.1) を満たす数列  $\{F_{n+1}\}$  に大して次の結果が成り立つ.

$$P := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 1, a^2 + 4b \geq 0, (a-1)\alpha_+ + b \geq 0\}$$

とおく. ここで領域  $P$  は

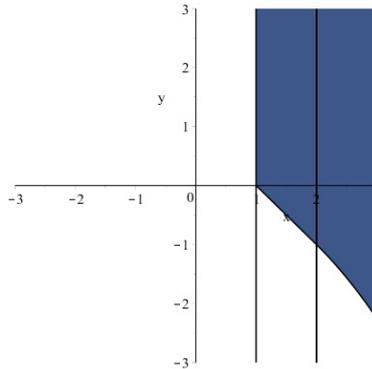
$$U := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \geq a \geq 1, a + b \geq 1\},$$

$$V := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 2, a^2 + 4b \geq 0\},$$

を用いて

$$P = U \cup V$$

となることに注意すると, 以下のように図示できる.



このとき,  $\{F_{n+1}\}_{n \geq 0}$  が (正値) 単調非減少数列

$$F_1 = 1 \leq F_2 = a \leq F_3 = a^2 + b \leq F_4 \leq \dots \quad (3.2)$$

になるための条件は以下のように述べられる.

**Lemma 3.1** ([S]).

$$(a, b) \in P \iff \{F_{n+1}\}_{n \geq 0} \text{ が (3.2) を満たす.}$$

この補題を用いれば次が示せる.

**Theorem 3.2** (主結果).

$\{F_{n+1}(f)\}_{n \geq 0}$  が  $\mathbb{Q}$  上 2 階の abenacci 数

$\iff$

$a^2 + 4b \in \mathbb{Z}$  が平方数ではなく, かつ  $(a, b) \in P$ .

## 4 今後の課題

$\mathbb{Q}$  上 2 階までの abenacci 数は完全に決定できた. 今後の課題としては 3 階以上の abenacci 数を決定がある. しかし 3 階以上は 2 階までとは異なり, 一般の多項式に関して同様の考察を行うことは格段に難しくなる. まず 2 次までと異なり 3 次以上の多項式は無条件には abelian にはならない. 更に  $\mathbb{Q}$  上の既約性も自明ではなくなる. 加えて正值単調非減少性のチェックも行わなければならない.

そこで当面は abelian であることがわかっている特殊な多項式を考え, その  $\mathbb{Q}$  上の既約性とその根を代入した完全対称多項式の特殊値の正值単調非減少性を論じることが問題になる. ここで考えられるのは以下の例である.

- (1) 3 階の場合
- (2) 4 階の場合
- (3) 多重 2 次体に付随する標準的な abenacci 数
- (4) 円分体とその部分体に付随する標準的な abenacci 数

たとえば (1) 3 階の場合は, simplest cubic field を定める 3 次の abel 多項式

$$f_a(x) := x^3 - ax^2 - (a+3)x - 1 = 0$$

が考察対象になり, (2) 4 階の場合は, simplest quartic field を定める 4 次の abel 多項式

$$f_a(x) := x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1 = 0$$

が考察対象になる. これらの場合, 既約性はすぐにわかり, あとは正值単調非減少性も  $a \geq 1$  と同値であることがわかる. つまり高次の abelian の特殊性から, 既約性や正值単調非減少性の議論が 2 次の場合よりも簡単になる.

5 階以上の abelian の例として (3), (4) がある. この場合, 既約性はほぼ自明になるが正值単調非減少性のチェックが難しくなる. 特に興味深いと思われるのは (4) である. 前回示したのはこれが円分体の最大実部分体の場合だが, その時点で正值単調非減少性のチェックは非自明だった. より小さな部分体に関しては正值性や単調性を満たさない例も存在するので, どのような場合に正值単調非減少性を満たすかを調べるのが今後の課題である.

## 参考文献

- [S] 渋川元樹: 単調非減少数列を与える三項間漸化式, 数学セミナー 2017 年 7 月号, 23–25.

# Convolution identities for Tribonacci numbers

Takao Komatsu

School of Mathematics and Statistics

Wuhan University

Wuhan 430072 China

komatsu@whu.edu.cn

## Abstract

Tribonacci-type numbers  $T_n^{(T_0, T_1, T_2)}$  are defined by the recurrence relation

$$T_n^{(s_0, s_1, s_2)} = T_{n-1}^{(T_0, T_1, T_2)} + T_{n-2}^{(T_0, T_1, T_2)} + T_{n-3}^{(T_0, T_1, T_2)} \quad (n \geq 3)$$

with given initial values  $T_0^{(T_0, T_1, T_2)} = T_0$ ,  $T_1^{(T_0, T_1, T_2)} = T_1$  and  $T_2^{(T_0, T_1, T_2)} = T_2$ . Hence,  $T_n = T_n^{(0, 1, 1)}$  are ordinary Tribonacci numbers, which sequence is given by

$$\{T_n\}_{n \geq 0} = 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \dots$$

In this paper we give some convolution identities for Tribonacci-type numbers with binomial (multinomial) coefficients.

## 1 Introduction

Convolution identities for various kinds of numbers (or polynomials) have been studied, with or without binomial (or multinomial) coefficients, including Bernoulli, Euler, Genocchi, Cauchy, Stirling, and Fibonacci numbers ([1, 2, 3, 6, 7, 8, 11]). One typical formula is due to Euler, given by

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_k \mathcal{B}_{n-k} = -n\mathcal{B}_{n-1} - (n-1)\mathcal{B}_n \quad (n \geq 0),$$

where  $\mathcal{B}_n$  are Bernoulli numbers, defined by

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < 2\pi).$$

In [9], Panda et al. several kinds of the sums of product of two balancing numbers are given. As an application, the sums of the products of two Fibonacci (and Lucas) numbers

$$\sum_{m=0}^n F_{km+r} F_{k(n-m)+r} \quad \text{and} \quad \sum_{m=0}^n L_{km+r} L_{k(n-m)+r},$$

where  $k$  and  $r$  are fixed integers with  $k > r \geq 0$ , are given. In [10], Ray et al. consider the higher-order convolution identities for balancing numbers. In addition, let  $u_n$  and  $v_n$  satisfy the three-term recurrence relations  $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) with  $u_0 = 0$  and  $u_1 = 1$  and  $v_n = av_{n-1} + bv_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) with  $v_0 = 2$  and  $v_1 = a$ , respectively. Then, explicit formulae for general Fibonacci numbers  $u_n$  and Lucas numbers  $v_n$ , namely,

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = n \\ k_1, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} u_{k_1} \cdots u_{k_r} \quad \text{and} \quad \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = n \\ k_1, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} v_{k_1} \cdots v_{k_r}$$

are given, where

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$$

is the multinomial coefficient.

In this paper, we give some convolution identities with binomial (or multinomial) coefficients by using the generating function.

## 2 Convolution identities with binomial coefficients

For convenience, we shall introduce Tribonacci-type numbers  $T_n^{(T_0, T_1, T_2)}$ , satisfying the recurrence relation

$$T_n^{(s_0, s_1, s_2)} = T_{n-1}^{(T_0, T_1, T_2)} + T_{n-2}^{(T_0, T_1, T_2)} + T_{n-3}^{(T_0, T_1, T_2)} \quad (n \geq 3)$$

with given initial values  $T_0^{(T_0, T_1, T_2)} = T_0$ ,  $T_1^{(T_0, T_1, T_2)} = T_1$  and  $T_2^{(T_0, T_1, T_2)} = T_2$ . Hence,  $T_n = T_n^{(0, 1, 1)}$  are ordinary Tribonacci numbers, which sequence is given by

$$\{T_n\}_{n \geq 0} = 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \dots$$

([12, A000073]).

The generating function with binomial coefficients is given by

$$t(x) := c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} + c_3 e^{\gamma x} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(s_0, s_1, s_2)} \frac{x^n}{n!}, \quad (1)$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are the roots of  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  and given by

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1}{3} = 1.839286755, \\ \beta, \gamma &= \frac{2 - (1 \pm \sqrt{-3})\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} - (1 \mp \sqrt{-3})\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}}{6} \\ &= -0.4196433776 \pm 0.6062907292\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

satisfying

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= -1, \\ \alpha\beta\gamma &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Since

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= T_0, \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma &= T_1, \\ c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 + c_3\gamma^2 &= T_2, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{T_0\beta\gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \\ c_2 &= \frac{T_0\gamma\alpha - T_1(\gamma + \alpha) + T_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}, \\ c_3 &= \frac{T_0\alpha\beta - T_1(\alpha + \beta) + T_2}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \end{aligned}$$

(see e.g., [5]),

First, we shall prove the following two lemmata.

**Lemma 1.** *We have*

$$c_1^2 e^{\alpha x} + c_2^2 e^{\beta x} + c_3^2 e^{\gamma x} = \frac{1}{22} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(T_0^*, T_1^*, T_2^*)} \frac{x^n}{n!},$$

where

$$\begin{aligned} T_0^* &= 2(4T_0^2 - 6T_1^2 - 2T_2^2 - 3T_0T_1 + 9T_1T_2 + T_2T_0), \\ T_1^* &= T_0^2 + 4T_1^2 + 5T_2^2 + 2T_0T_1 - 6T_1T_2 - 8T_2T_0, \\ T_2^* &= 2(-2T_0^2 + 3T_1^2 + T_2^2 + 7T_0T_1 + T_1T_2 + 5T_2T_0). \end{aligned}$$

*Remark.* If  $T_0 = 0$  and  $T_1 = T_2 = 1$ , then  $T_0^* = 2$ ,  $T_1^* = 3$  and  $T_2^* = 10$ .

*Proof.* For tribonacci-type numbers  $s_n$ , satisfying the recurrence relation  $s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3}$  ( $n \geq 3$ ) with given initial values  $s_0$ ,  $s_1$  and  $s_2$ , we have

$$d_1 e^{\alpha x} + d_2 e^{\beta x} + d_3 e^{\gamma x} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(s_0, s_1, s_2)} \frac{x^n}{n!}. \quad (3)$$

Since  $d_1$ ,  $d_2$  and  $d_3$  satisfy the system of the equations

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 &= s_0, \\ d_1 \alpha + d_2 \beta + d_3 \gamma &= s_1, \\ d_1 \alpha^2 + d_2 \beta^2 + d_3 \gamma^2 &= s_2, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-s_0 \beta \gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)}, \\ d_2 &= \frac{-s_0 \gamma \alpha + s_1(\gamma + \alpha) - s_2}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}, \\ d_3 &= \frac{-s_0 \alpha \beta + s_1(\alpha + \beta) - s_2}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}. \end{aligned}$$

Since  $d_1 = 22c_1^2$ , we have

$$\frac{-s_0 \beta \gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} = 22 \left( \frac{T_0 \beta \gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \right)^2.$$

By using the relations (2), we have

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 2 - (\beta + \gamma) + \beta\gamma, \\ (\beta + \gamma)^2 &= 1 + (\beta + \gamma) + \beta\gamma, \\ \beta^2\gamma^2 &= -(\beta + \gamma) - \beta\gamma, \\ \beta\gamma(\beta + \gamma) &= \beta\gamma - 1.\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}&(-s_0\beta\gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2)(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha) \\ &= s_0(-2(\beta + \gamma) + \beta^2\gamma^2 + 1) + s_1(-2(\beta + \gamma) - 2\beta\gamma(\beta + \gamma) + 2) \\ &\quad + s_2(-(\beta + \gamma) + 3\beta\gamma + 3) \\ &= (-s_0 - 2s_1 + 3s_2)\beta\gamma + (-3s_0 - 2s_1 - s_2)(\beta + \gamma) + (s_0 + 4s_1 + 3s_2).\end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}&(T_0\beta\gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2)^2 \\ &= (2T_0T_1 + 2T_0T_2 - T_0^2 + T_1^2)\beta\gamma + (-2T_1T_2 - T_0^2 + T_1^2)(\beta + \gamma) \\ &\quad + (2T_0T_1 + T_1^2 + T_2^2).\end{aligned}$$

By solving the system

$$\begin{aligned}-s_0 - 2s_1 + 3s_2 &= 2T_0T_1 + 2T_0T_2 - T_0^2 + T_1^2, \\ -3s_0 - 2s_1 - s_2 &= -2T_1T_2 - T_0^2 + T_1^2, \\ s_0 + 4s_1 + 3s_2 &= 2T_0T_1 + T_1^2 + T_2^2,\end{aligned}$$

we obtain that

$$\begin{aligned}s_0 &= \frac{4T_0^2 - 6T_1^2 - 2T_2^2 - 3T_0T_1 + 9T_1T_2 + T_2T_0}{11}, \\ s_1 &= \frac{T_0^2 + 4T_1^2 + 5T_2^2 + 2T_0T_1 - 6T_1T_2 - 8T_2T_0}{22}, \\ s_2 &= \frac{-2T_0^2 + 3T_1^2 + T_2^2 + 7T_0T_1 + T_1T_2 + 5T_2T_0}{11}.\end{aligned}$$

By replacing  $s_0$ ,  $s_1$  and  $s_2$  by  $s_0/22$ ,  $s_1/22$  and  $s_2/22$ , respectively, we get the result. It is similar for  $d_2 = 22c_2^2$  and  $d_3 = 22c_3^2$ .  $\square$

**Lemma 2.** *We have*

$$c_2c_3e^{\alpha x} + c_3c_1e^{\beta x} + c_1c_2e^{\gamma x} = \frac{1}{22} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \frac{x^n}{n!},$$

where

$$\begin{aligned}\hat{T}_0 &= 7T_0^2 + 6T_1^2 + 2T_2^2 + 5T_0T_1 - T_0T_2 - 9T_1T_2, \\ \hat{T}_1 &= 8T_0^2 + 10T_1^2 + 7T_2^2 + T_0T_1 - 9T_0T_2 - 15T_1T_2, \\ \hat{T}_2 &= 17T_0^2 + 24T_1^2 + 8T_2^2 + 9T_0T_1 - 15T_0T_2 - 25T_1T_2.\end{aligned}$$

*Remark.* If  $T_0 =$  and  $T_1 = T_2 = 1$ , then  $\hat{T}_0 = -1$ ,  $\hat{T}_1 = 2$  and  $\hat{T}_2 = 7$ .

*Proof.* Similarly to the proof of Lemma 1, we need to have  $d_1 = 22c_2c_3$ . Equivalently,

$$\begin{aligned}\frac{-s_0\beta\gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} \\ = \frac{22(T_0\gamma\alpha - T_1(\gamma + \alpha) + T_2)(T_0\alpha\beta - T_1(\alpha + \beta) + T_2)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)}.\end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned}(-s_0\beta\gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2)(\beta - \gamma)^2 \\ = (\beta + \gamma)(-3s_0 + 2s_1 - s_2) + \beta\gamma(-5s_0 - 2s_1 + 3s_2) + (s_0 + 4s_1 - s_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(T_0\gamma\alpha - T_1(\gamma + \alpha) + T_2)(T_0\alpha\beta - T_1(\alpha + \beta) + T_2) \\ = (\beta + \gamma)(-T_0^2 - T_1^2 - T_0T_1 + T_1T_2) + \beta\gamma(T_1^2 - T_0T_2) \\ + (T_0^2 + T_1^2 + T_2^2 - T_0T_2 - 2T_1T_2),\end{aligned}$$

by solving the system

$$\begin{aligned}-3s_0 + 2s_1 - s_2 &= -T_0^2 - T_1^2 - T_0T_1 + T_1T_2, \\ -5s_0 - 2s_1 + 3s_2 &= T_1^2 - T_0T_2, \\ s_0 + 4s_1 - s_2 &= T_0^2 + T_1^2 + T_2^2 - T_0T_2 - 2T_1T_2,\end{aligned}$$

we obtain that

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{7T_0^2 + 6T_1^2 + 2T_2^2 + 5T_0T_1 - T_0T_2 - 9T_1T_2}{22}, \\ s_1 &= \frac{8T_0^2 + 10T_1^2 + 7T_2^2 + T_0T_1 - 9T_0T_2 - 15T_1T_2}{22}, \\ s_2 &= \frac{17T_0^2 + 24T_1^2 + 8T_2^2 + 9T_0T_1 - 15T_0T_2 - 25T_1T_2}{22}. \end{aligned}$$

By replacing  $s_0$ ,  $s_1$  and  $s_2$  by  $s_0/22$ ,  $s_1/22$  and  $s_2/22$ , respectively, we get the result. Similarly, we obtain that  $d_2 = 22c_3c_1$  and  $d_3 = 22c_1c_2$ .  $\square$

By using Lemma 1 and Lemma 2, we get the sum of the products of two Tribonacci-type numbers with initial values  $T_0$ ,  $T_1$  and  $T_2$  with the binomial coefficient.

**Theorem 1.** For  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k^{(T_0, T_1, T_2)} T_{n-k}^{(T_0, T_1, T_2)} \\ = \frac{1}{22} \left( 2^n T_n^{(T_0^*, T_1^*, T_2^*)} + 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k T_k^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \right). \end{aligned}$$

*Proof.* First, by Lemmas 1 and 2,

$$\begin{aligned} &(c_1e^{\alpha x} + c_2e^{\beta x} + c_3e^{\gamma x})^2 \\ &= (c_1^2e^{2\alpha x} + c_2^2e^{2\beta x} + c_3^2e^{2\gamma x}) + 2(c_1c_2e^{(\alpha+\beta)x} + c_2c_3e^{(\beta+\gamma)x} + c_3c_1e^{(\gamma+\alpha)x}) \\ &= (c_1^2e^{2\alpha x} + c_2^2e^{2\beta x} + c_3^2e^{2\gamma x}) + 2(c_1c_2e^{(1-\gamma)x} + c_2c_3e^{(1-\alpha)x} + c_3c_1e^{(1-\beta)x}) \\ &= \frac{1}{22} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(T_0^*, T_1^*, T_2^*)} \frac{(2x)^n}{n!} + 2 \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{1}{22} \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{22} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(T_0^*, T_1^*, T_2^*)} \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{22} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k T_k^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(T_0, T_1, T_2)} \frac{x^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k^{(T_0, T_1, T_2)} T_{n-k}^{(T_0, T_1, T_2)} \frac{x^n}{n!}.$$

Comparing the coefficients on both sides, we get the desired result.  $\square$

Now, we shall consider the sum of the products of three Tribonacci-type numbers with trinomial coefficients.

**Lemma 3.** *We have*

$$c_1 c_2 c_3 = \frac{\tilde{T}}{44},$$

where

$$\tilde{T} = T_0^3 + 2T_1^3 + T_2^3 + (2T_1 + T_2)T_0^2 + (2T_1^2 - 2T_1T_2 - T_2^2)T_0 - 2T_1T_2^2.$$

*Remark.* If  $T_0 = 0$  and  $T_1 = T_2 = 1$ , then

$$c_1 c_2 c_3 = \frac{1}{44}.$$

*Proof.* Since

$$\begin{aligned} & (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 \\ &= -(3\alpha + 1)(\alpha - 1)(3\beta + 1)(\beta - 1)(3\gamma + 1)(\gamma - 1) \\ &= -(27\alpha\beta\gamma + 9(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 3(\alpha + \beta + \gamma) + 1) \\ &\quad \times (\alpha\beta\gamma - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) - 1) \\ &= -22 \cdot 2 = -44 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & (T_0\gamma\alpha - T_1(\gamma + \alpha) + T_2)(T_0\alpha\beta - T_1(\alpha + \beta) + T_2)(T_0\beta\gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2) \\ &= T_0^3(\alpha\beta\gamma)^2 - T_0^2T_1(\alpha(\beta + \gamma) + \beta(\gamma + \alpha) + \gamma(\alpha + \beta)) \\ &\quad + T_0^2T_2(\alpha + \beta + \gamma) + T_0T_2^2(\gamma\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma) \\ &\quad + T_0T_1^2(\gamma\alpha(\alpha + \beta)(\beta + \gamma) + \alpha\beta(\gamma + \alpha)(\beta + \gamma) + \beta\gamma(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)) \\ &\quad - T_0T_1T_2(\gamma\alpha(\alpha + 2\beta + \gamma) + \alpha\beta(\alpha + \beta + 2\gamma) + \beta\gamma(2\alpha + \beta + \gamma)) \\ &\quad + T_1^2T_2((\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)) \\ &\quad - T_1^3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) + T_2^3 \\ &\quad - T_1T_2^2((\gamma + \alpha) + (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma)) \\ &= \tilde{T}, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned}
& c_1 c_2 c_3 \\
&= \frac{(T_0 \gamma \alpha - T_1(\gamma + \alpha) + T_2)(T_0 \alpha \beta - T_1(\alpha + \beta) + T_2)(T_0 \beta \gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2)}{-(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2} \\
&= \frac{\tilde{T}}{44}.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.** *We have*

$$c_1^3 e^{\alpha x} + c_2^3 e^{\beta x} + c_3^3 e^{\gamma x} = \frac{1}{44} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2)} \frac{x^n}{n!},$$

where

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_0 &= 5T_0^3 - 24T_0^2 T_1 - 30T_0 T_1^2 + 6T_1^3 + 9T_0^2 T_2 \\
&\quad + 48T_0 T_1 T_2 - 15T_0 T_2^2 - 6T_1 T_2^2 + 3T_2^3, \\
\tilde{T}_1 &= 3T_0^3 + 24T_0^2 T_1 - 10T_1^3 - 15T_0^2 T_2 - 12T_0 T_1 T_2 \\
&\quad + 18T_1^2 T_2 + 9T_0 T_2^2 - 6T_1 T_2^2 + T_2^3, \\
\tilde{T}_2 &= -5T_0^3 - 6T_0^2 T_1 + 18T_0 T_1^2 + 6T_1^3 + 9T_0^2 T_2 \\
&\quad - 12T_0 T_1 T_2 - 12T_1^2 T_2 + 3T_0 T_2^2 + 12T_1 T_2^2 - T_2^3.
\end{aligned}$$

*Remark.* If  $T_0 = 0$  and  $T_1 = T_2 = 1$ , then  $\tilde{T}_0 = \tilde{T}_1 = 3$  and  $\tilde{T}_2 = 5$ .

*Proof.* Similarly to the proof of Lemma 1, we consider the relation

$$d_1 = \frac{-s_0 \beta \gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} = \frac{44(T_0 \beta \gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2)^3}{(\alpha - \beta)^3(\alpha - \gamma)^3} = 44c_1^3.$$

Since

$$\begin{aligned}
(\beta + \gamma)^3 &= 2(\beta + \gamma) + 2\beta\gamma, \\
\beta\gamma(\beta + \gamma)^2 &= -(\beta + \gamma) + \beta\gamma - 1, \\
\beta^2\gamma^2(\beta + \gamma) &= -(\beta + \gamma) - 2\beta\gamma, \\
\beta^3\gamma^3 &= (\beta + \gamma) + 1,
\end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned}
& -(-s_0\beta\gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2)(\alpha - \beta)^2(\gamma - \alpha)^2 \\
& = (s_0\beta\gamma - s_1(\beta + \gamma) + s_2)(-14(\beta + \gamma) + 4\beta\gamma + 16) \\
& = (\beta + \gamma)(-4s_0 - 2s_1 - 14s_2) + \beta\gamma(-2s_0 + 10s_1 + 4s_2) \\
& \quad + (14s_0 + 18s_1 + 16s_2)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& (T_0\beta\gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2)^3 \\
& = \beta^3\gamma^3T_0^3 - 3\beta^2\gamma^2(\beta + \gamma)T_0^2T_1 + 3\beta\gamma(\beta + \gamma)^2T_0T_1^2 - T_1^3(\beta + \gamma)^3 + 3\beta^2\gamma^2T_0^2T_2 \\
& \quad - 6\beta\gamma(\beta + \gamma)T_0T_1T_2 + 3(\beta + \gamma)^2T_1^2T_2 + 3\beta\gamma T_0T_2^2 - 3(\beta + \gamma)T_1T_2^2 + T_2^3 \\
& = (\beta + \gamma)(T_0^3 + 3T_0^2T_1 - 2T_1^3 - 3T_0^2T_2 + 3T_1^2T_2 - 3T_1T_2^2) \\
& \quad + \beta\gamma(6T_0^2T_1 + 3T_0T_1^2 - 2T_1^3 - 3T_0^2T_2 - 6T_0T_1T_2 + 3T_1^2T_2 + 3T_0T_2^2) \\
& \quad + (T_0^3 - 3T_0T_1^2 + 6T_0T_1T_2 + 3T_1^2T_2 + T_2^3).
\end{aligned}$$

Solving the system

$$\begin{aligned}
& -4s_0 - 2s_1 - 14s_2 \\
& \quad = T_0^3 + 3T_0^2T_1 - 2T_1^3 - 3T_0^2T_2 + 3T_1^2T_2 - 3T_1T_2^2, \\
& -2s_0 + 10s_1 + 4s_2 \\
& \quad = 6T_0^2T_1 + 3T_0T_1^2 - 2T_1^3 - 3T_0^2T_2 - 6T_0T_1T_2 + 3T_1^2T_2 + 3T_0T_2^2, \\
& 14s_0 + 18s_1 + 16s_2 \\
& \quad = T_0^3 - 3T_0T_1^2 + 6T_0T_1T_2 + 3T_1^2T_2 + T_2^3,
\end{aligned}$$

we obtain that

$$s_0 = \frac{\check{T}_0}{44}, \quad s_1 = \frac{\check{T}_1}{44}, \quad s_2 = \frac{\check{T}_2}{44}.$$

By replacing  $s_0$ ,  $s_1$  and  $s_2$  by  $s_0/44$ ,  $s_1/44$  and  $s_2/44$ , respectively, we get the result. Similarly, we obtain that  $d_2 = 44c_2^3$  and  $d_3 = 44c_3^2$ .  $\square$

By using Lemmas 1, 3 and 4, we get the following convolution identity for the three tribonacci-type numbers. Deonte the trinomial coefficient by

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!},$$

where  $k_1 + k_2 + k_3 = n$  and  $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ .

**Theorem 2.** For  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=n \\ k_1, k_2, k_3 \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} T_{k_1}^{(T_0, T_1, T_2)} T_{k_2}^{(T_0, T_1, T_2)} T_{k_3}^{(T_0, T_1, T_2)} \\ &= \frac{1}{22} \left( 3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} T_{n-k}^{(T_0^*, T_1^*, T_2^*)} T_k^{(T_0, T_1, T_2)} - 3^n T_n^{(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2)} + 3\tilde{T} \right). \end{aligned}$$

*Proof.* First, by Lemmas 1, 3 and 4, we have

$$\begin{aligned} & (c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} + c_3 e^{\gamma x})^3 \\ &= 3(c_1^2 e^{2\alpha x} + c_2^2 e^{2\beta x} + c_3^2 e^{2\gamma x})(c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} + c_3 e^{\gamma x}) \\ & \quad - 2(c_1^3 e^{3\alpha x} + c_2^3 e^{3\beta x} + c_3^3 e^{3\gamma x}) + 6c_1 c_2 c_3 e^{(\alpha+\beta+\gamma)x} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{22} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(T_0^*, T_1^*, T_2^*)} \frac{(2x)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(T_0, T_1, T_2)} \frac{x^n}{n!} \\ & \quad - 2 \cdot \frac{\tilde{T}}{44} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2)} \frac{(3x)^n}{n!} + 6 \cdot \frac{1}{44} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{3}{22} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} T_{n-k}^{(T_0^*, T_1^*, T_2^*)} T_k^{(T_0, T_1, T_2)} \frac{x^n}{n!} \\ & \quad - \frac{1}{22} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n T_n^{(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2)} \frac{x^n}{n!} + \frac{3\tilde{T}}{22} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(T_0, T_1, T_2)} \frac{x^n}{n!} \right)^3 \\ &= \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=n \\ k_1, k_2, k_3 \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} T_{k_1}^{(T_0, T_1, T_2)} T_{k_2}^{(T_0, T_1, T_2)} T_{k_3}^{(T_0, T_1, T_2)} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Comparing the coefficients on both sides, we get the desired result.  $\square$

Finally, we shall consider the sum of the products of four Tribonacci-type numbers with trinomial coefficients.

**Lemma 5.** *We have*

$$c_1^4 e^{\alpha x} + c_2^4 e^{\beta x} + c_3^4 e^{\gamma x} = \frac{1}{484} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2)} \frac{x^n}{n!},$$

where

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= \frac{1}{242} (5T_0^4 - 106T_0^3T_1 - 111T_0^2T_1^2 + 104T_0T_1^3 + 36T_1^4 + 40T_0^3T_2 \\ &\quad + 216T_0^2T_1T_2 - 102T_0T_1^2T_2 - 108T_1^3T_2 - 81T_0^2T_2^2 - 6T_0T_1T_2^2 \\ &\quad + 105T_1^2T_2^2 + 18T_0T_2^3 - 36T_1T_2^3 + 4T_2^4), \\ \bar{T}_1 &= \frac{1}{242} (13T_0^4 + 72T_0^3T_1 - 51T_0^2T_1^2 - 108T_0T_1^3 - T_1^4 - 39T_0^3T_2 \\ &\quad - 6T_0^2T_1T_2 + 210T_0T_1^2T_2 + 36T_1^3T_2 + 27T_0^2T_2^2), \\ \bar{T}_2 &= \frac{1}{484} (-27T_0^4 - 4T_0^3T_1 + 210T_0^2T_1^2 + 72T_0T_1^3 - 36T_1^4 + 15T_0^3T_2 \\ &\quad - 216T_0^2T_1T_2 - 228T_0T_1^2T_2 + 64T_1^3T_2 + 48T_0^2T_2^2 + 204T_0T_1T_2^2 \\ &\quad - 6T_1^2T_2^2 - 40T_0T_2^3 - 8T_1T_2^3 + 7T_2^4). \end{aligned}$$

*Remark.* If  $T_0 = 0$  and  $T_1 = T_2 = 1$ , then  $\bar{T}_0 = 2$ ,  $\bar{T}_1 = 14$  and  $\bar{T}_2 = 21$ .

*Proof.* Similarly to the proof of Lemma 1, we consider the relation

$$d_1 = \frac{-s_0\beta\gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} = \frac{484(T_0\beta\gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2)^4}{(\alpha - \beta)^4(\alpha - \gamma)^4} = 484c_1^4.$$

Since

$$\begin{aligned} (\beta + \gamma)^4 &= 2(\beta + \gamma) + 4\beta\gamma, \\ \beta\gamma(\beta + \gamma)^3 &= -2(\beta + \gamma) - 2, \\ \beta^2\gamma^2(\beta + \gamma)^2 &= -(\beta + \gamma) - 3\beta\gamma + 1, \\ \beta^3\gamma^3(\beta + \gamma) &= 2(\beta + \gamma) + \beta\gamma + 1, \\ \beta^4\gamma^4 &= 2\beta\gamma - 1, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} &- (-s_0\beta\gamma + s_1(\beta + \gamma) - s_2)(\alpha - \beta)^3(\gamma - \alpha)^3 \\ &= (s_0\beta\gamma - s_1(\beta + \gamma) + s_2)(-56(\beta + \gamma) + 16\beta\gamma + 108) \\ &= (\beta + \gamma)(-16s_0 - 52s_1 - 56s_2) + \beta\gamma(36s_0 + 40s_1 + 16s_2) \\ &\quad + (56s_0 + 72s_1 + 108s_2) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& (T_0\beta\gamma - T_1(\beta + \gamma) + T_2)^4 \\
&= \beta^4\gamma^4T_0^4 - 4\beta^3\gamma^3(\beta + \gamma)T_0^3T_1 + 6\beta^2\gamma^2(\beta + \gamma)^2T_0^2T_1^2 \\
&\quad - 4\beta\gamma(\beta + \gamma)^3T_0T_1^3 + (\beta + \gamma)^4T_1^4 + 4\beta^3\gamma^3T_0^3T_2 \\
&\quad - 12\beta^2\gamma^2(\beta + \gamma)T_0^2T_1T_2 + 12\beta\gamma(\beta + \gamma)^2T_0T_1^2T_2 \\
&\quad - 4(\beta + \gamma)^3T_1^3T_2 + 6\beta^2\gamma^2T_0^2T_2^2 - 12\beta\gamma(\beta + \gamma)T_0T_1T_2^2 \\
&\quad + 6(\beta + \gamma)^2T_1^2T_2^2 + 4\beta\gamma T_0T_2^3 - 4(\beta + \gamma)T_1T_2^3 + T_2^4 \\
&= (\beta + \gamma)(-8T_0^3T_1 - 6T_0^2T_1^2 + 8T_0T_1^3 + 2T_1^4 + 4T_0^3T_2 + 12T_0^2T_1T_2 \\
&\quad - 12T_0T_1^2T_2 - 8T_1^3T_2 - 6T_0^2T_2^2 + 6T_1^2T_2^2 - 4T_1T_2^3) \\
&\quad + \beta\gamma(2T_0^4 - 4T_0^3T_1 - 18T_0^2T_1^2 + 4T_1^4 + 24T_0^2T_1T_2 + 12T_0T_1^2T_2 \\
&\quad - 8T_1^3T_2 - 6T_0^2T_2^2 - 12T_0T_1T_2^2 + 6T_1^2T_2^2 + 4T_0T_2^3) \\
&\quad + (-4T_0^4 - 4T_0^3T_1 + 6T_0^2T_1^2 + 8T_0T_1^3 + T_0^3T_2 - 12T_0T_1^2T_2 \\
&\quad + 12T_0T_1T_2^2 + 6T_1^2T_2^2 + T_2^4).
\end{aligned}$$

Solving the system

$$\begin{aligned}
& -16s_0 - 52s_1 - 56s_2 \\
&= -8T_0^3T_1 - 6T_0^2T_1^2 + 8T_0T_1^3 + 2T_1^4 + 4T_0^3T_2 + 12T_0^2T_1T_2 - 12T_0T_1^2T_2 \\
&\quad - 8T_1^3T_2 - 6T_0^2T_2^2 + 6T_1^2T_2^2 - 4T_1T_2^3, \\
& 36s_0 + 40s_1 + 16s_2 \\
&= 2T_0^4 - 4T_0^3T_1 - 18T_0^2T_1^2 + 4T_1^4 + 24T_0^2T_1T_2 + 12T_0T_1^2T_2 \\
&\quad - 8T_1^3T_2 - 6T_0^2T_2^2 - 12T_0T_1T_2^2 + 6T_1^2T_2^2 + 4T_0T_2^3, \\
& 56s_0 + 72s_1 + 108s_2 \\
&= -4T_0^4 - 4T_0^3T_1 + 6T_0^2T_1^2 + 8T_0T_1^3 + T_0^3T_2 - 12T_0T_1^2T_2 \\
&\quad + 12T_0T_1T_2^2 + 6T_1^2T_2^2 + T_2^4,
\end{aligned}$$

we obtain that

$$s_0 = \frac{\bar{T}_0}{484}, \quad s_1 = \frac{\bar{T}_1}{484}, \quad s_2 = \frac{\bar{T}_2}{484}.$$

By replacing  $s_0$ ,  $s_1$  and  $s_2$  by  $s_0/484$ ,  $s_1/484$  and  $s_2/484$ , respectively, we get the result. Similarly, we obtain that  $d_2 = 484c_2^4$  and  $d_3 = 484c_3^4$ .  $\square$

By Lemma 5 and above results, we get the sum of the products of four tribonacci-type numbers.

**Theorem 3.** For  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3+k_4=n \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 1}} \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4} T_{k_1}^{(T_0, T_1, T_2)} T_{k_2}^{(T_0, T_1, T_2)} T_{k_3}^{(T_0, T_1, T_2)} T_{k_4}^{(T_0, T_1, T_2)} \\
&= \frac{1}{484} \left( 44 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} T_{n-k}^{(\check{T}_0, \check{T}_1, \check{T}_2)} T_k - 3 \cdot 4^n T_n^{(\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2)} \right. \\
& \quad \left. + 6 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i T_i^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \right) \left( \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j T_j^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \right) \right).
\end{aligned}$$

*Proof.* By Lemmas 4 and 5 with the proof of Theorem 1, we have

$$\begin{aligned}
& (c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} + c_3 e^{\gamma x})^4 \\
&= 4(c_1^3 e^{3\alpha x} + c_2^3 e^{3\beta x} + c_3^3 e^{3\gamma x})(c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} + c_3 e^{\gamma x}) \\
& \quad - 3(c_1^4 e^{4\alpha x} + c_2^4 e^{4\beta x} + c_3^4 e^{4\gamma x}) \\
& \quad - 6(c_1 c_2 e^{(\alpha+\beta)x} + c_2 c_3 e^{(\beta+\gamma)x} + c_3 c_1 e^{(\gamma+\alpha)x}) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{44} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(\check{T}_0, \check{T}_1, \check{T}_2)} \frac{(3x)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{x^n}{n!} - 3 \cdot \frac{1}{484} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2)} \frac{(4x)^n}{n!} \\
& \quad + 6 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{22} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k T_k^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \frac{x^n}{n!} \right)^2 \\
&= \frac{1}{11} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} T_{n-k}^{(\check{T}_0, \check{T}_1, \check{T}_2)} T_k \frac{x^n}{n!} - \frac{3}{484} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n T_n^{(\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2)} \frac{x^n}{n!} \\
& \quad + \frac{6}{484} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i T_i^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \right) \\
& \quad \times \left( \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j T_j^{(\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2)} \right) \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

□

It would be possible to obtain even higher-order convolution identities, but the forms seem to become more complicated.

## References

- [1] T. Agho and K. Dilcher, *Convolution identities and lacunary recurrences for Bernoulli numbers*, J. Number Theory 124 (2007), 105–122.
- [2] T. Agho and K. Dilcher, *Higher-order recurrences for Bernoulli numbers*, J. Number Theory **129** (2009), 1837–1847.
- [3] T. Agho and K. Dilcher, *Higher-order convolutions for Bernoulli and Euler polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), 1235–1247.
- [4] E. Kiliç, *Tribonacci sequences with certain indices and their sums*, Ars Comb. **86**, (2008), 13–22.
- [5] T. Komatsu, *On the sum of reciprocal Tribonacci numbers*, Ars Combin. **98** (2011), 447–459.
- [6] T. Komatsu, *Higher-order convolution identities for Cauchy numbers of the second kind*, Proc. Jangjeon Math. Soc. **18** (2015), 369–383.
- [7] T. Komatsu, *Higher-order convolution identities for Cauchy numbers*, Tokyo J. Math. **39** (2016). 15 pages.
- [8] T. Komatsu, Z. Masakova and E. Pelantova, *Higher-order identities for Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. **52**, no.5 (2014), 150–163.
- [9] T. Komatsu and G. K. Panda, *On several kinds of sums of balancing numbers*, Math. Rep. (Bucur.), (to appear). arXiv:1608.05918.
- [10] T. Komatsu and P. K. Ray, *Higher-order identities for balancing numbers*, arXiv:1608.05925.
- [11] T. Komatsu and Y. Simsek, *Third and higher order convolution identities for Cauchy numbers*, Filomat **30** (2016), 1053–1060.
- [12] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, available online at <http://oeis.org>.

# 有限体上既約な Fibonacci 多項式について

塩見 大輔 (山形大学)

2017 年 8 月 25 日

Fibonacci 数  $F_n$  は次の漸化式で定義される.

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Fibonacci 数が素数のとき, Fibonacci 素数という. 簡単な考察から次が確かめられる.

$$F_n \text{ が Fibonacci 素数} \Rightarrow n \text{ は素数または } 4.$$

逆は一般的には成立しない (例:  $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$ ). 数値実験により, 多くの Fibonacci 素数が見つまっている (cf. [1], [2], [3]). しかし, Fibonacci 素数が無限に存在するかどうかは未解決問題である.

この問題の多項式版を考える. Fibonacci 多項式  $F_n(T)$  は次の漸化式で定義される.

$$F_0(T) = 0, F_1(T) = 1, F_n(T) = TF_{n-1}(T) + F_{n-2}(T) \quad (n \geq 2).$$

定義から  $F_n(T)$  は次数  $n-1$  の整数係数多項式である. また  $F_n(T)$  に  $T=1$  を代入すると  $F_n$  に一致する.

例 1.  $0 \leq n \leq 10$  において Fibonacci 多項式は次のようになる.

$$\begin{aligned} F_0(T) &= 0, & F_1(T) &= 1, & F_2(T) &= T, & F_3(T) &= T^2 + 1 \\ F_4(T) &= T^3 + 2T, & F_5(T) &= T^4 + 3T^2 + 1, & F_6(T) &= T^5 + 4T^3 + 3T, \\ F_7(T) &= T^6 + 5T^4 + 6T^2 + 1, & F_8(T) &= T^7 + 6T^5 + 10T^3 + 4T. \\ F_9(T) &= T^8 + 7T^6 + 15T^4 + 10T^2 + 1, \\ F_{10}(T) &= T^9 + 8T^7 + 21T^5 + 20T^3 + 5T. \end{aligned}$$

Fibonacci 多項式の  $\mathbb{Q}$  上での既約性に関し, Webb と Parberry は論文 [5] で次の結果を示している.

定理 1.

$$F_n(T) \text{ が } \mathbb{Q} \text{ 上既約} \iff n \text{ は素数.}$$

---

本研究は和歌山大学の北山秀隆氏との共同研究である.

本稿では、有限体上における Fibonacci 多項式の既約性を考察する。奇素数  $p$  に対し、 $q = p^r$  個の元からなる有限体を  $\mathbb{F}_q$  で表す。素数  $l$  ( $l \neq 2, p$ ) に対し、 $\bar{p} \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$  の位数を  $g_l(p)$  で表す。

**主結果 1.**

- (1)  $p \equiv 1 \pmod{4}$  のとき、 $F_n(T)$  が  $\mathbb{F}_q$  上既約となるのは  $n = 2$  のときに限る。
- (2)  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $l$  が奇素数とする。  $F_l(T)$  が  $\mathbb{F}_q$  上既約であることと次の (i)-(iii) が成立することは同値である。
  - (i)  $l \equiv 3 \pmod{4}$ ,
  - (ii)  $\gcd(l-1, r) = 1$ ,
  - (iii)  $g_l(p) = \frac{l-1}{2}$  or  $l-1$ .

**例 2.**  $q = p = 3$ ,  $l = 7$  のとき. (2) の条件 (i)(ii) を満たす.

$$\begin{aligned} 3 &\equiv 1 \pmod{7}, & 3^2 &\equiv 2 \pmod{7}, & 3^3 &\equiv 6 \pmod{7}, \\ 3^4 &\equiv 4 \pmod{7}, & 3^5 &\equiv 5 \pmod{7}, & 3^6 &\equiv 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

従って  $g_l(p) = 6 = l-1$  より (2) の条件 (iii) も満たす。よって主結果 1 より  $F_7(T)$  は mod 3 上で既約である。

**例 3.**  $q = p = 3$ ,  $l = 67$  のとき. (2) の条件 (i)(ii) を満たす。一方、 $g_l(p) = 22 < \frac{l-1}{2}$  より (2) の条件 (iii) は満たさない。よって  $F_{67}(T)$  は mod 3 上可約である。実際、次のように因数分解される。

$$\begin{aligned} &F_{67}(T) \\ &\equiv (T^{22} + T^{16} + 2T^{14} + 2T^{12} + 2T^{10} + T^6 + T^4 + 1) \\ &\quad \times (T^{22} + T^{18} + T^{16} + T^{14} + T^{12} + T^{10} + T^6 + 2T^2 + 1) \\ &\quad \times (T^{22} + 2T^{20} + 2T^{18} + 2T^{16} + T^{14} + 2T^{12} + T^8 + 2T^6 + T^4 + T^2 + 1) \pmod{3} \end{aligned}$$

★主結果 1 の証明の方針を述べる。  $\alpha_l = i \cos\left(\frac{\pi}{l}\right)$  とおけば  $F_l(T)$  は  $\alpha_l$  の最小多項式と一致する。代数的整数論でよく知られた素イデアル分解に関する結果から次が成り立つ。

$$F_l(T) \equiv f_1(T) \cdots f_s(T) \pmod{p} \iff (p) = P_1 \cdots P_s.$$

左辺は  $F_n(T)$  の mod  $p$  での既約分解であり、右辺は  $(p)$  の  $\mathbb{Q}(\alpha_l)$  での素イデアル分解である。従って  $F_l(T)$  が mod  $p$  上既約であることは  $(p)$  が  $\mathbb{Q}(\alpha_l)$  で素イデアルであることと同値である。あとは円分体の理論から  $(p)$  が  $\mathbb{Q}(\alpha_l)$  で素イデアルになる条件を考察することで主結果 1 が得られる。

**主結果 2.**  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\gcd(r, 2p) = 1$  とする. このとき, GRH (一般リーマン予想) を仮定すれば,  $\mathbb{F}_q$  上既約な Fibonacci 多項式が無限に存在する.

この証明には Lenstra の次の結果を用いる.

**定理 2.**  $a, b$  は互いに素な正の整数,  $t$  は平方因子を含まない整数とする ( $t \neq 0, \pm 1$ ,  $\gcd(b, t) = 1$ ). GRH を仮定すれば, 次を満たす素数  $l$  が無限に存在する.

$$l \equiv a \pmod{b}, \quad g_l(t) = l - 1.$$

★主結果 1 と定理 2 から次のように主結果 2 が導かれる.  $a \equiv 2 \pmod{r}$  かつ  $a \equiv 3 \pmod{4}$  を満たす整数  $a$  をとる. 定理 2 から  $l \equiv a \pmod{4r}$  かつ  $g_l(p) = l - 1$  を満たす素数  $l$  が無限に存在する. このような  $l$  は主結果 1 の条件 (i)-(iii) を満たす. 従って主結果 2 を得る.

★定理 2 に関し, Lenstra はより一般的な結果を与えている. 詳しくは Lenstra [4] の Theorem 8.6 を参考のこと.

最後に  $p = 2$  のケースを述べる.

**主結果 3.**  $q = 2^r$  とするとき,  $F_n(T)$  が  $\mathbb{F}_q$  上既約となるのは  $n = 2$  のときに限る.

## 参考文献

- [1] C. Caldwell, "Fibonacci Number." <http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=39>.
- [2] J. Brillhart, P. L. Montgomery, and R. D. Silverman, Tables of Fibonacci and Lucas factorizations, Math. Comp. **50** (1988), 251-260.
- [3] H. Dubner and W. Keller, New Fibonacci and Lucas primes, Math. Comp. **68** (1999), 417-427.
- [4] H. W. Lenstra, On Artin's conjecture and Euclid's algorithm in global fields, Invent. Math. **42** (1977) 201-224.
- [5] W. A. Webb and E. A. Parberry, Divisibility properties of Fibonacci polynomials, Fibonacci Quart. **7** (1969) 457-463.

# 超完全数の世界

2017年 8月 25日

於 東京理科大学

飯高 茂

## 1 完全数の平行移動

$\sigma(a)$  を自然数  $a$  の約数の和とする.  $\sigma(a) = 2a$  を満たす  $a$  はユークリッドにより完全数と呼ばれた.  $\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$  はユークリッドの発見した公式である.

$q = \sigma(2^e) + m$  が素数のとき  $a = 2^e q$  を  $m$  だけ平行移動した狭義の完全数という.

$m = 0$  のときとくにユークリッドの完全数といい実際に完全数となる. これは原論で得られた最良の結果のひとつ.

一般の場合も  $\sigma(a) = 2a - m$  を満たす. この式を満たす  $a$  を  $m$  だけ平行移動した (広義) の究極の完全数という.

計算例をあげる.

### 1.1 完全数の数表

表 1: 完全数の場合,  $q = 2^{e+1} - 1$  は素数

$e \bmod 4$	$e$	$e + 1$	$2^e * q$	$a$	$a \bmod 10$
1	1	2	$2 * 3$	6	6
2	2	3	$2^2 * 7$	28	8
0	4	5	$2^4 * 31$	496	6
2	6	7	$2^6 * 127$	8128	8
0	12	13	$2^{12} * 8191$	33550336	6
0	16	17	$2^{16} * 131071$	8589869056	6
2	18	19	$2^{18} * 524287$	137438691328	8

## 1.2 $m = 1$

$\sigma(a) = 2a - 1$  を満たす例は  $a = 2^e (e = 1, 2, 3, \dots)$ . このように  $e$  に関係のない素数べきの解を  $C$  型解という.

## 1.3 $m = 2$

2 だけ平行移動した場合,  $q = 2^{e+1} + 1$  が素数になるので  $e + 1$  は 2 のべき, すなわち  $e + 1 = 2^r$  と書くことができる.

一般に  $F_r = 2^{2^r} + 1$  をフェルマ数といい, これが素数になるならフェルマ素数という.

フェルマはフェルマ数はすべて素数になると予想し, 死に至るまで考えていた.

表 2:  $q = 2^{e+1} + 1$  が素数

$e$	$e + 1$	$e \bmod 4$	$2^e * q$	$a$
0	1	0	3	3
1	2	1	$2 * 5$	10
3	4	3	$2^3 * 17$	136
7	8	3	$2^7 * 257$	32896
15	16	3	$2^{15} * 65537$	2147516416

$m = 0, 2$  では反例が見つからない,

$m = 2$  のとき解は  $2^e q (q : \text{奇素数})$  の型しか見当たらない. この形の解を正規形の解, または A 型解という. 次に  $m = 4$  の場合を扱う.

## 1.4 $\sigma(a) = 2a - 4$ の場合

$m = 4$  のとき  $\sigma(a) = 2a - 4$ . この解をパソコンで計算したところ次の表ができた.

表 3:  $\sigma(a) = 2a - 4$

$a$	素因数分解	$\sigma(a)$
5	[5]	6
14	[2, 7]	24
44	[2 <sup>2</sup> , 11]	84
110	[2, 5, 11]	216
152	[2 <sup>3</sup> , 19]	300
884	[2 <sup>2</sup> , 13, 17]	1764
2144	[2 <sup>5</sup> , 67]	4284
8384	[2 <sup>6</sup> , 131]	16764
18632	[2 <sup>3</sup> , 17, 137]	37260

$a = 110, a = 884, a = 18632$  は解だが  $s(a) = 3$ .

$s(a) = 3$  の解は他に 2 個あるが  $2^e r q$ , ( $2 < r < q$ : 素数) の形をしている. これらは第 2 正規形の解と呼ばれる. D 型解ともいう.

## 1.5 $m = -12$ のとき

$m = -12$  のとき方程式は  $\sigma(a) = 2a + 12$  を満たす.

表 4:  $[P = 2, m = -12]$  完全数

$a$	素因数分解
24	$2^3 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$

解として  $a = 6p$ , ( $p \neq 2, 3$ : 素数) が続くので途中略す.

$a = 6p$  を通常解という. 6:完全数

$a = 24 = 2^3 * 3$  と  $a = 54 = 2 * 3^3$  はいわゆる擬素数解である.

以上見たように, 方程式  $\sigma(a) = 2a + 12$  には解として

通常解  $a = 6p$ , ( $2 < 3 < p$ : 素数) は無限にありこれらを B 型解という.

擬素数解  $a = 24 = 2^3 * 3$ ,  $a = 54 = 2 * 3^3$  の他に全く異質のエイリアン解の 3 種類の解がある.

この他の形もあるかもしれない.

計算の結果平行移動でできた完全数の場合解には A,B,C,D の 4 主系列があることがわかる.(しかし証明はない)

## 2 B型解 と完全数

$$\sigma(a) - 2a = -m$$

のB型解  $a = \alpha p$  ( $\alpha$ : 定数,  $p > \alpha$ : 素数) があるとする.

$$\sigma(a) - 2a = \sigma(\alpha p) - 2\alpha p = \sigma(\alpha)(p + 1) - 2\alpha p = (\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha)$$

なので,  $\sigma(a) - 2a = -m$  を思い出すと

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha) = -m$$

ゆえに

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p = -\sigma(\alpha) - m$$

ここで  $p$  は無数にある素数なので

$\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$  かつ  $\sigma(\alpha) = -m$  が成り立つ.  $\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$  により  $\alpha$  は完全数.

ここで2000年来の大難問「奇数完全数の不存在」を仮定すると正規形の表示ができるので  $\alpha = 2^e r$ , ( $r = 2^{e+1} - 1$ : 素数).

したがって  $\sigma(\alpha) = 2\alpha$  なので,  $m = -2\alpha$ .

完全数の平行移動でできた式  $\sigma(a) - 2a = -m$  にB型解があるとするとき再び完全数が登場した.

私はこの不思議さに言葉を失った. そしてこれを一般の底の場合に考えようと思うに至った.

## 3 究極の完全数

$P$  を素数とし, 整数  $m$  に関して  $\sigma(P^e) + m$  が素数  $q$  のとき  $a = P^e q$  を  $m$  だけ平行移動した底が  $P$  の狭義の究極の完全数と呼ぶ.

$m$  だけ平行移動した場合を考えることは重要であり, これによって問題が奥深くなった.

$\bar{P} = P - 1$  とおく.

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m\bar{P}. \quad (1)$$

$\text{Maxp}(a)$  は  $a$  の最大素因子を指している.

この式を満たす  $a$  を  $m$  だけ平行移動した底が  $P$  の広義の究極の完全数と呼ぶ.

底が素数:  $P$ , 平行移動:  $m$  の究極の完全数の方程式

## 4 B 型解

究極の完全数においても B 型解を探す.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)q - m\overline{P}$$

において B 型解  $a = \alpha p$  ( $\alpha$ : 定数,  $p > \alpha$ : 素数) があるとする.

$p$  は一般の素数なので無限にある.  $q = p$  になる.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa &= \overline{P}\sigma(\alpha p) - P\alpha p \\ &= p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)q - m\overline{P}$  を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P - 2)p - m\overline{P}.$$

$p$  でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P - 2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

さて  $p$  の係数  $\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P - 2)$  を 0 とおくと  $\sigma(\alpha) = -m$ .

**定義 1**  $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P - 2)$  のとき

$\alpha$  を底  $P$  の広義の超完全数 (*hyperperfect number*) という.

$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P - 2)$  の解  $\alpha$  は正規形と仮定する. (正規形仮説)

$\alpha = P^f r$ , ( $r$ : 素数) となるので,  $W = P^{f+1} - 1$  とおくと

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r + 1), P\alpha = (W + 1)r.$$

$$W = r + P - 2 \tag{2}$$

$$r = W - P + 2 = P^{f+1} - 1 - P + 2 = P^{f+1} - P + 1.$$

**定義 2**  $r = P^{f+1} - P + 1$  が素数のとき  $\alpha = P^f r$  を狭義の超完全数という.

$\alpha = P^f r$  は完全数の一般化であり, これを超完全数 (*hyper perfect number*) という.

## 4.1 先行研究

1970 年に Minoli and Bear は  $k$  hyperperfect number を導入した.

**定義 3**  $k\sigma(\alpha) = (k+1)\alpha + (k-1) = 0$  のとき  
 $\alpha$  を  $k$ -hyperperfect number という.

**命題 1**  $P = k+1$  が素数で,  $Q = P^i - P + 1$  も素数なら  $\alpha = P^{i-1}Q$  は  $k$ -hyperperfect number.

Minoli, Daniel (Feb 1981),

Structural issues for hyperperfect numbers,  
Fibonacci Quarterly, 19 (1): 6?14.

Minoli, Daniel (April 1980),

Issues in non-linear hyperperfect numbers,  
Mathematics of Computation, 34 (150): 639?645, doi:10.2307/2006107.

Minoli, Daniel (October 1980),

New results for hyperperfect numbers,  
Abstracts of the American Mathematical Society, 1 (6): 561.

ここでフィボナッチ数列の専門誌が出ている.

## 4.2 平行移動した超完全数

底が素数:  $P$ , 平行移動:  $m$  の狭義の超完全数 (hyper paerfect numbers) の定義:

**定義 4**  $r = P^{f+1} - P + 1 + m$  が素数のとき,  
 $\alpha = P^f r$  を底が素数:  $P$ , 平行移動:  $m$  の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める.  $W = P^{f+1} - 1$  とおく. 定義により  $r = P^{f+1} - P + 1 + m = W - P + m + 2$ .

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^f r) = W(r+1) = Wr + W.$$

$$Wr = (P^{f+1} - 1)r = P\alpha - r \text{ により}$$

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = Wr + W = P\alpha - r + W.$$

$r = W - P + m + 2$  により  $W - r = P - 2 - m$  なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m.$$

**定義 5**  $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m$  の解を底が素数:  $P$ , 平行移動:  $m$  の広義の超完全数という.

究極の完全数と異なり  $\text{Maxp}(\alpha)$  が消えている点に注意したい.

### 4.3 計算例

$P = 3$  のとき方程式は

$$2\sigma(\alpha) = 3\alpha + 1 - m.$$

表 5:  $P = 3, m = 0$ ;

$a$	factor
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$
176661	$3^5 * 727$

表 6:  $P = 3, m = 2$ ;

$a$	factor
9	$3^2$
27	$3^3$
81	$3^4$
243	$3^5$
729	$3^6$
2187	$3^7$
6561	$3^8$
19683	$3^9$
59049	$3^{10}$
177147	$3^{11}$

表 7:  $P = 3, m = 4$ ;

$a$	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

表 8:  $P = 3, m = 6$ ;

$a$	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

表 9:  $P = 3, m = 10$ ;

$a$	factor
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$

表 10:  $P = 3, m = 12$ ;

$a$	factor
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

表 11:  $P = 3, m = 14$ ;

$a$	factor
25	$5^2$

表 12:  $P = 3, m = 17$ ;

$a$	factor
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
149765	$5 * 7 * 11 * 389$
180549	$3^5 * 743$

表 13:  $P = 3, m = 18$ ;

$a$	factor
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$

## 5 $P = 3$ のときの究極の完全数

$P = 3$ , 平行移動:  $m$  の究極の完全数の方程式は  $2\sigma(a) = 3a + q - 2m$  になる.  
ここで  $a = 21p$ , ( $7 < p$ : 素数) ならすべて解としよう.(したがって解は無限にある).

$$\sigma(a) = \sigma(21p) = 32(p+1), q = p \text{ なので,}$$

$$2\sigma(a) - 3a - q = 64(p+1) - 63p - p = 64.$$

$2\sigma(a) - (3a + q) = -2m$  によれば,  $m = -32$ . したがって  $2\sigma(a) = 3a + q + 64$  には解  $a = 21p$  がある.

この 21 こそ  $P = 3, m = 0$  での最小の超完全数であった. ( $q = \text{Maxp}(a)$  とした.)

数値例

表 14:  $P = 3, m = -32$ ;

$a$	factor
231	$3 * 7 * 11$
273	$3 * 7 * 13$
357	$3 * 7 * 17$
399	$3 * 7 * 19$
483	$3 * 7 * 23$
609	$3 * 7 * 29$
651	$3 * 7 * 31$
777	$3 * 7 * 37$

表 15:  $P = 3, m = -32$ ;continue

$a$	factor
7077	$3 * 7 * 337$
7209	$3^4 * 89$
7287	$3 * 7 * 347$
7329	$3 * 7 * 349$
7413	$3 * 7 * 353$
7539	$3 * 7 * 359$
7707	$3 * 7 * 367$
7833	$3 * 7 * 373$
7959	$3 * 7 * 379$

エイリアン  $7209 = 3^4 * 89$  が隠れていた.

表 16:  $P = 3, m = -32$  ;continue

$a$	factor
772989	$3 * 7 * 36809$
773241	$3 * 7 * 36821$
773469	$3^6 * 1061$
773493	$3 * 7 * 36833$
773787	$3 * 7 * 36847$

エイリアン  $773469 = 3^6 * 1061$  が隠れていた.

詳しくは著者ホームページ (飯高 茂) [HP:iitakashigeru.web.fc2.com](http://iitakashigeru.web.fc2.com) をご覧ください

# オイラー余関数の評価式について

長野県飯山高等学校 鈴木拓磨 富井海斗 平井皓陽 藤田源翔 山崎雅貴

## 要約

オイラー関数を含む方程式の解を求める問題を考える。その際、重要になるのがオイラー余関数の下からの評価である。オイラー余関数の評価式については3次評価式まではすでに飯高茂先生らによって与えられている。この評価式を高次化することによってオイラー余関数を下から良く評価してオイラー関数を含む方程式の解を求めたい。また、オイラー陪関数についても同じように、評価式の高次化を考える。

## 1. はじめに

自然数  $n$  に対して  $n$  と互いに素な  $n$  より小さな自然数の個数を  $\varphi(n)$  とすることによって

定まる関数をオイラー関数という。また  $\varphi(1) = 1$  とする。

例えば,

$$\varphi(3) = 2, \quad \varphi(6) = 2, \quad \varphi(9) = 6.$$

オイラー関数の性質についていくつかよく知られているものを紹介する。

オイラー関数の性質

①  $m$  と  $n$  を互いに素な自然数とする。このとき

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

②  $p$  を素数とすると,

$$\varphi(p) = p - 1$$

さらに,

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

③ 2以上の自然数  $n$  に対して,

$$\varphi(n) \leq n - 1.$$

またオイラー関数は整数論において重要な役割を果たす。例えば次の定理は非常に重要である。

#### オイラーの定理

$a$  と  $n$  は互いに素な自然数。このとき次が成り立つ。

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

このオイラーの定理は、RSA暗号など様々な応用を持つことが知られている。

一方で、オイラー関数  $\varphi(n)$  の余関数  $co\varphi(n)$  があり、以下のように定義されている。

$$co\varphi(n) = n - \varphi(n)$$

私達は整数論で重要なオイラー関数に興味を持ち、本論文ではオイラー余関数を含む方程式

$$co\varphi(x) = a \quad (a \text{ は自然数})$$

の自然数解の求め方について考察する。

また、オイラー関数から派生したオイラー陪関数という関数が飯高茂先生によって与えられている。それは以下のようなものである。

2 以上の自然数  $n$  に対して、 $n$  の相異なる素因数の個数を  $s(n)$  とおく。

このとき、

$$\tilde{\varphi}(n) = \frac{\varphi(n)}{2^{s(n)}}$$

によって定義される関数をオイラー陪関数という。

オイラー陪関数についてもオイラー関数と同じく乗法性など以下のような良い性質を持っている。

#### オイラー陪関数の性質

① 自然数  $n$  と  $m$  が互いに素のとき、

$$\tilde{\varphi}(n)\tilde{\varphi}(m) = \tilde{\varphi}(nm)$$

② 2 以上の自然数  $n$  に対して、

$$n - 2\tilde{\varphi}(n) \geq 1.$$

とくに等号成立は  $n = p$  のとき、そのときに限る。

また、オイラー関数にオイラー余関数が考えられたのと同様にオイラー陪関数に対しても余関数が定義される。

オイラー余陪関数  $\widetilde{co\varphi}(n)$  は

$$\widetilde{co\varphi}(n) = n - 2\widetilde{\varphi}(n)$$

によって定義される。

オイラー余陪関数についても

$$\widetilde{co\varphi}(n) = a \quad (a \text{ は自然数})$$

を満たす自然数  $n$  を求める問題が考えられる。私達はこの場合も本論文で考察する。

例えば、次の問題を考えてみる。

問 1 自然数  $n$  に対して、次の方程式を解け。

$$\widetilde{co\varphi}(n) = 5$$

このような方程式の解の存在範囲を与えるものとしてオイラー余関数の 2 次評価式がある。

### 2 次評価式

$n$  が 2 以上の自然数で素数でない ( $n$  の素因数の総数が重複を含めて 2 以上) とき、

$$\widetilde{co\varphi}(n) \geq \sqrt{n}$$

等号が成り立つのは、 $n = p^2$  ( $p$  は素数) のとき、またそのときに限る。

2 次評価式を用いて問 1 を解いてみる。

解)  $n$  が素数のとき

$$\widetilde{co\varphi}(n) = 1$$

よって、 $n$  が素数のときは、

$$\widetilde{co\varphi}(n) = 5$$

となることはない。

$n$  が素数でない 2 以上の自然数のとき

2 次評価式から

$$\widetilde{co\varphi}(n) \geq \sqrt{n}.$$

これから

$$5 \geq \sqrt{n}$$

n	nの素因数分解	$\varphi(n)$	$\widetilde{co\varphi}(n)$
1	1	1	0
2	2	1	1
3	3	2	1
4	2 <sup>2</sup>	2	2
5	5	4	1
6	2*3	2	4
7	7	6	1
8	2 <sup>3</sup>	4	4
9	3 <sup>2</sup>	6	3
10	2*5	4	6
11	11	10	1
12	2 <sup>2</sup> *3	4	8
13	13	12	1
14	2*7	6	8
15	3*5	8	7
16	2 <sup>4</sup>	8	8
17	17	16	1
18	2*3 <sup>2</sup>	6	12
19	19	18	1
20	5*2 <sup>2</sup>	8	12
21	3*7	12	9
22	2*11	10	12
23	23	22	1
24	2 <sup>3</sup> *3	8	16
25	5 <sup>2</sup>	20	5

(表 1)

となり、両辺を2乗して

$$25 \geq n$$

25以下の自然数  $n$  について  $co\varphi(n)$  の値は表1の通り、よって方程式  $co\varphi(n) = 5$  の自然数解は  $n = 25$  ということがわかる.  $\square$

このように評価式がオイラー関数を含む方程式を解く際に重要になるが、我々はオイラー関数とオイラー陪関数について次の評価式を得た.

主結果1 (オイラー余関数の高次評価式)

自然数  $n$  と  $0$  以上の整数  $m$  に対して

$$F(n) = n - \varphi(n) - n^{\frac{m}{m+1}}$$

とおく.

$n$  の重複も含めた素因数の総数が  $m+1$  以上なら、

$$F(n) \geq 0.$$

さらに等号成立は  $n = p^{m+1}$  ( $p$  は素数) のとき、またそのときに限る.

主結果2 (オイラー余陪関数の8次評価式)

$n$  を2以上の自然数とし、 $n$  が素数でもなく、素数の平方でもなく、素数の立方でもなく、素数の4乗でもなく、素数の5乗でもなく、素数の6乗でもなく、素数の7乗でもないとき、

$$\tilde{co}\varphi(n) \geq n^{\frac{7}{8}}$$

等号成立は  $n = p^8$  ( $p$  は素数) のときそのときに限る.

以上の評価式によってあるオイラー関数を含む方程式の自然数解、またはあるオイラー陪関数を含む方程式の自然数解の範囲を絞ることができ解を求めることができるという事を本論文では論じる.

## 2. オイラー余関数の評価式

次に、以下の問題を考える

問2  $n$  は素因数の総数が重複を含めて 5 以上の自然数とする.

方程式

$$\text{co}\varphi(n) = 250$$

の自然数解を求めよ.

この問題も上で紹介した 2 次評価式を用いて、方程式を解くことができるが、2 次評価式から

$$250^2 \geq n$$

すなわち

$$62500 \geq n$$

よって 62500 以下の自然数の中からオイラー余関数の値が 250 となるものを探さなければならなくなってしまった。これはとても大変である。

幸いなことに、飯高茂先生によってオイラー余関数の 3 次評価式が与えられている。

### 3 次評価式

$n$  が 2 以上の自然数で異なる素因数の数が 3 以上なら、

$$\text{co}\varphi(n) \geq n^{\frac{2}{3}}$$

等号が成り立つのは、 $n = p^3$  ( $p$  は素数) のとき、またそのときに限る。

この 3 次評価式を用いて問 2 を考えてみると

$$\text{co}\varphi(n) = 250$$

より

$$250 \geq n^{\frac{2}{3}}$$

これから

$$3952 \geq n$$

となって 3952 以下の自然数の中からオイラー余関数の値が 250 となるものをさがせばよくなって改善されたことが分かる。

では 4 次評価式、5 次評価式などさらなる評価式はあるのであろうか。その問いに答える

のが次の結果である.

### 3. 主結果 1

定理 (オイラー余関数の高次評価式)

自然数  $n$  と非負整数  $m$  に対して

$$F(n) = n - \varphi(n) - n^{\frac{m}{m+1}}$$

とおく.

$n$  の重複も含めた素因数の総数が  $m+1$  以上なら

$$F(n) \geq 0.$$

さらに等号成立は  $n = p^{m+1}$  ( $p$  は素数) のとき, またそのときに限る.

(証明) 自然数  $n$  は,  $n = p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s}$ ,  $l_1 + \cdots + l_s \geq m+1$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_s$  は素数で  $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$

と素因数分解できる. ここで,

$$\begin{aligned} F(n) &= p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s} - (p_1^{l_1} - p_1^{l_1-1}) \cdots (p_s^{l_s} - p_s^{l_s-1}) - (p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s})^{\frac{m}{m+1}} \\ &= p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} \left\{ p_1 \cdots p_s (p_1 - 1)(p_2 - \cdots)(p_s - 1) - p_1^{\frac{1-l_1}{m+1}} \cdots p_s^{\frac{1-l_s}{m+1}} \right\} \end{aligned}$$

さらに,

$$l_1 \geq L_1, \dots, l_s \geq L_s, L_1 + \cdots + L_s = m+1$$

となるような  $s$  個の非負整数  $L_1, \dots, L_s$  が存在する. さらに

$$p_1^{\frac{1-l_1}{m+1}} \leq p_1^{\frac{1-L_1}{m+1}}, \dots, p_s^{\frac{1-l_s}{m+1}} \leq p_s^{\frac{1-L_s}{m+1}}$$

より

$$p_1^{\frac{1-l_1}{m+1}} \cdots p_s^{\frac{1-l_s}{m+1}} \leq p_1^{\frac{1-L_1}{m+1}} \cdots p_s^{\frac{1-L_s}{m+1}}.$$

以上の事から,

$$p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} \left\{ p_1 \cdots p_s - (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_s-1) - p_1^{1-\frac{l_1}{m+1}} \cdots p_s^{1-\frac{l_s}{m+1}} \right\}$$

$$\cong p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} \left\{ p_1 \cdots p_s - (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_s-1) - p_1^{1-\frac{L_1}{m+1}} \cdots p_s^{1-\frac{L_s}{m+1}} \right\} \cdots \textcircled{1}$$

(等号成立は  $l_1 + \cdots + l_s = m+1$  のとき, またそのときに限る.)

ここで  $s=1$  のときは,  $L_1 = m+1$  より

$$\textcircled{1} \text{の右辺} = p_1^{l_1-1} \left\{ p_1 - (p_1-1) - p_1^{1-\frac{L_1}{m+1}} \right\} = 0$$

$s \geq 2$  のとき,

$$\textcircled{1} \text{の右辺} = p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} \left\{ p_1 \cdots p_s - (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_s-1) - p_1^{1-\frac{L_1}{m+1}} \cdots p_s^{1-\frac{L_s}{m+1}} \right\}$$

$$= p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} \left\{ p_1 \cdots p_s - (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_s-1) - p_1 p_2 \cdots p_s \frac{1}{p_1^{\frac{L_1}{m+1}} \cdots p_s^{\frac{L_s}{m+1}}} \right\}$$

$$> p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} \left\{ p_1 \cdots p_s - (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_s-1) - p_1 p_2 \cdots p_s \frac{1}{p_1^{\frac{L_1}{m+1}} \cdots p_1^{\frac{L_s}{m+1}}} \right\}$$

$$= p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} \left\{ p_1 \cdots p_s - (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_s-1) - p_1 p_2 \cdots p_s \frac{1}{p_1} \right\}$$

$$= p_1^{l_1-1} \cdots p_s^{l_s-1} (p_1-1) \{ p_2 \cdots p_s - (p_2-1) \cdots (p_s-1) \} > 0$$

以上の事から  $n$  を素因数分解したとき, 指数の和が  $m+1$  以上なら

$$F(n) \geq 0.$$

また, 等号が成り立つのは  $l_1 + \cdots + l_s = m+1$  かつ  $s=1$  のときに限るので,

等号成立は  $n = p^{m+1}$  ( $p$  は素数) のとき, またそのときに限ることが分かる.  $\square$

この定理は上で紹介したオイラー余関数の 2 次評価式, 3 次評価式の一般化となっており, 評価式が成り立つ条件も若干改善できた. また証明方法も飯高先生が与えた 3 次評価式の証明方法と異なった証明方法となっている.

系

自然数  $n$  と非負整数  $m$  に対して,

$$F(n) = 0 \Leftrightarrow n = p^{m+1} (p \text{ は素数}).$$

証明)  $\Leftarrow$  を示す.  $n = p^{m+1} (p \text{ は素数})$  とすると  $F(n) = 0$ .

$\Rightarrow$  を示す.  $F(n) = 0$  とすると  $n^{\frac{m}{m+1}}$  は自然数なので  $n^{\frac{m}{m+1}} = N$  となる自然数  $N$  が存在する.

$n$  が  $n = p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s}$  と素因数分解されたとすると ( $p_1, \dots, p_s$  は相異なる素数で  $l_1, \dots, l_s$  は自然数),

$$n^{\frac{m}{m+1}} = N$$

の両辺を  $m+1$  乗して,

$$(p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s})^m = N^{m+1}.$$

$N^{m+1}$  を素因数分解すると素因数分解の一意性から,

$$N^{m+1} = p_1^{t_1(m+1)} \cdots p_s^{t_s(m+1)}$$

となる自然数  $t_1, \dots, t_s$  が存在する. よって

$$p_1^{l_1(m+1)} \cdots p_s^{l_s(m+1)} = p_1^{l_1 m} \cdots p_s^{l_s m}.$$

これから,  $m$  と  $m+1$  は互いに素なので  $l_1, \dots, l_s$  は  $m+1$  の倍数. よって  $n$  を素因数分解し

たとき, 指数の和が  $m+1$  以上なので主結果より  $n = p^{m+1}$  となる素数  $p$  が存在する.

□

以上のことからオイラー余関数  $\phi(n)$  は  $n$  の素因数の総数が大きければ大きいほど下から良く評価できるということがわかった.

最後に、5次評価式を用いて問2を考え直してみると、

$$co\varphi(n) = 250$$

より

$$250 \geq n^{\frac{4}{5}}$$

これから

$$994 \geq n$$

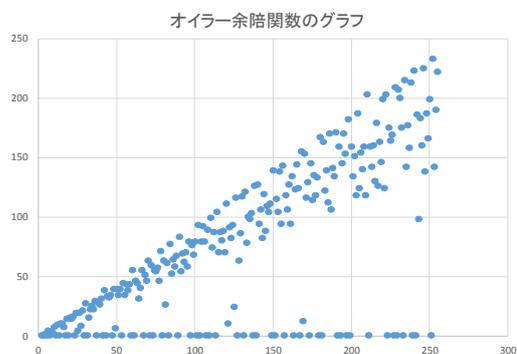
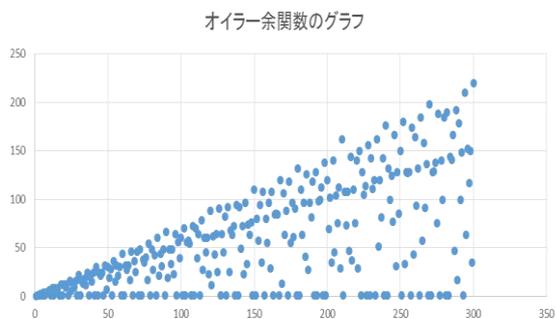
となって3桁までの自然数の中からオイラー余関数の値が250となるものをさがせばよいことになった。実際、 $994 \geq n$ のなかで $co\varphi(n) = 250$ となる条件を満たす自然数は存在しない。

#### 4. オイラー余陪関数の評価式

オイラー陪関数を含む方程式

$$co\tilde{\varphi}(n) = a \quad (a \text{は自然数})$$

を考える際、オイラー余関数の評価式と同じようにオイラー余陪関数の評価式を採用するのが良いと考えられる。ところでオイラー余関数とオイラー余陪関数のグラフは以下のとおりである。



オイラー余関数のグラフに比べて、オイラー余陪関数のグラフは右下に大きな空洞があるのが確認できる。このことから、オイラー余関数に比べてオイラー余陪関数のほうが下から良く評価できそうである。

2以上の自然数 $n$ について以下が成り立つ.

### 1次評価式

$$co \tilde{\varphi}(n) \geq 1$$

等号成立は  $n = p$  ( $p$ は素数) のときそのときに限る.

### 2次評価式

$n$ は素数でないとき,

$$co \tilde{\varphi}(n) \geq \sqrt{n}$$

等号成立は  $n = p^2$  ( $p$ は素数) のときそのときに限る.

### 3次評価式

$n$ は素数でなく素数の平方でもないとき

$$co \tilde{\varphi}(n) \geq n^{\frac{2}{3}}$$

等号成立は  $n = p^3$  ( $p$ は素数) のときそのときに限る.

これらは飯高茂先生によって与えられたものである. さらにオイラー余関数の評価式と比べて成り立つときの条件が緩くなっていることが確認できる.

ではオイラー余関数と同じようにオイラー余陪関数についても高次評価式は存在するだろうか. その問いに答えるのが以下の結果である.

## 5. 主結果 2

オイラー余陪関数の評価式について以下のことが分かった.

定理 (オイラー余陪関数の 8 次評価式)

$n$  を 2 以上の自然数とし,  $n$  が素数でもなく, 素数の平方でもなく, 素数の立方でもなく, 素数の 4 乗でもなく, 素数の 5 乗でもなく, 素数の 6 乗でもなく, 素数の 7 乗でもないとき,

$$\tilde{co} \varphi(n) \geq n^{\frac{7}{8}}$$

等号成立は  $n = p^8$  ( $p$  は素数) のときそのときに限る.

証明)  $n$  の相異なる素因数の個数を  $s(n)$  とする.

$s(n)=1$  のとき,  $n = p^l$  ( $p$  は素数で,  $l \geq 8$ ). このとき

$$\tilde{co} \varphi(n) - n^{\frac{7}{8}} = p^l - (p^l - p^{l-1}) - p^{\frac{7l}{8}} = p^{l-1} - p^{\frac{7l}{8}} = p^{\frac{7l}{8}} (p^{\frac{l-8}{8}} - 1) \geq 0$$

(等号成立は  $l=8$  でそのときに限る) よって  $s(n)=1$  のときは示された.

$s(n) \geq 2$  のとき, 背理法で示す.

$$\tilde{co} \varphi(n) \leq n^{\frac{7}{8}}$$

すなわち

$$n - 2 \frac{\varphi(n)}{2^{s(n)}} \leq n^{\frac{7}{8}} \dots \textcircled{1}$$

となる自然数  $n$  が存在すると仮定する.

$$\tilde{\varphi}(n) = \frac{\varphi(n)}{2^{s(n)}} \leq \frac{\varphi(n)}{4} \leq \frac{n-1}{4}$$

が成り立つので

$$n-1 \geq 4\tilde{\varphi}(n) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① , ②より

$$\exists n - 2n^{\frac{7}{8}} + 1.$$

ここで  $n^{\frac{1}{8}}$  を  $t$  とおき,

$$f(t) = t^8 - 2t^7 + 1$$

とすると下の表 2 と

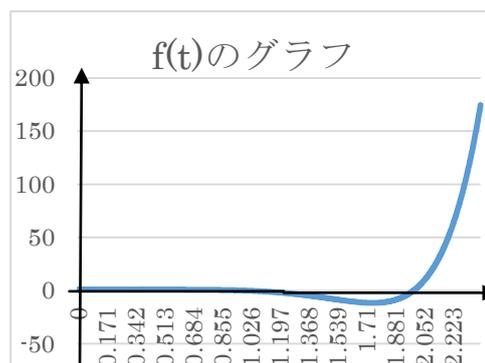
$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1$$

より  $f(t) \leq 0$  ならば

$$1 \leq t \leq 2.$$

(表 2)

t	0	...	$\frac{7}{4}$	...
f'(t)		-	0	+
f(t)		↘	-11.56626892	↗



これから  $n \leq 256$ .

$n \leq 256$  となる条件を満たす自然数については下の (表 3) より, すべて

$$\tilde{\varphi}(n) > n^{\frac{7}{8}}.$$

よって矛盾. これから  $s(n) \geq 2$  のとき

$$\tilde{\varphi}(n) > n^{\frac{7}{8}}$$

が示された. □

以上の事からオイラー余陪関数の 8 次評価式はつくれた. この証明は飯高茂先生が与えた 3 次評価式の証明を参考にしたものである. また同じようにして 4 次評価式, 5 次評価式,

6次評価式, 7次評価式も作れる. しかし, 残念ながら9次評価式は作れないということがわかった.

実際,  $n = 35$  のとき,

$$\widetilde{co\varphi}(n) - n^{\frac{8}{9}} = -0.57789\dots$$

より

$$\widetilde{co\varphi}(n) < n^{\frac{8}{9}}$$

また,  $m \geq 10$  のとき,

$$\widetilde{co\varphi}(n) - n^{\frac{8}{9}} > \widetilde{co\varphi}(n) - n^{\frac{m-1}{m}}$$

より,

$m$  次のオイラー余陪関数の評価式 ( $m \geq 10$ ) も作れない事がわかった.

## 6. 主結果 2 の応用

8次評価式を用いて, オイラー余陪関数を含む方程式を解いてみる.

問3  $n$  を 5 と互いに素な自然数とする.

$$\widetilde{co\varphi}(n) = 5^3$$

を解け.

解) もし  $n$  がある素数の冪乗, すなわち  $n = p^l$  ( $p$  は素数) のとき

$$\widetilde{co\varphi}(n) = p^{l-1}.$$

よって  $n$  と 5 が互いに素なので  $n$  がある素数の冪乗であることはない. もし  $n$  がある素数の冪乗でない場合,

$$\widetilde{co\varphi}(n) = 5^3$$

より

$$5^3 \geq n^{\frac{7}{8}}$$

よって

$$5^{\frac{24}{7}} \geq n.$$

$5^{\frac{24}{7}} \geq n$  の範囲で  $co \tilde{\varphi}(n) = 5^3$  を満たす自然数  $n$  は表 3 より 166 と 221 である.  $\square$

以下は, 2 以上の自然数  $n$  に対してオイラー陪関数  $\tilde{\varphi}(n)$ , オイラー余陪関数  $co \tilde{\varphi}(n)$ , 関数

$$F_m(n) = co \tilde{\varphi}(n) - n^{\frac{m-1}{m}} \quad (m=4,5,6,7,8) \text{ の値の表である.}$$

(表 3)

$n$	$\tilde{\varphi}(n)$	$co \tilde{\varphi}(n)$	$F_8(n)$	$F_7(n)$	$F_6(n)$	$F_5(n)$	$F_4(n)$
2	0.5	1	-0.83401	-0.81145	-0.7818	-0.7411	-0.68179
3	1	1	-1.61506	-1.56425	-1.49805	-1.40822	-1.27951
4	1	2	-1.36359	-1.28134	-1.1748	-1.03143	-0.82843
5	2	1	-3.08883	-2.97299	-2.82362	-2.6239	-2.3437
6	0.5	5	0.203965	0.354989	0.548982	0.807037	1.166341
7	3	1	-4.48859	-4.30115	-4.06114	-3.74328	-3.30352
8	2	4	-2.16884	-1.94398	-1.65685	-1.27803	-0.75683
9	3	3	-3.83852	-3.5754	-3.24025	-2.79955	-2.19615
10	1	8	0.501058	0.803143	1.187079	1.690427	2.376587
11	5	1	-7.15114	-6.80948	-6.37611	-5.80948	-5.04011
12	1	10	1.204033	1.585806	2.069187	2.699628	3.55258
13	6	1	-8.4341	-8.01174	-7.47786	-6.78314	-5.84633
14	1.5	11	0.933882	1.397254	1.982073	2.741476	3.762376
15	2	11	0.307485	0.812251	1.448402	2.272839	3.378009
16	4	8	-3.31371	-2.7672	-2.07937	-1.18959	0
17	8	1	-10.9301	-10.3415	-9.60167	-8.64626	-7.37214
18	1.5	15	2.458097	3.08901	3.881136	4.902404	6.261148
19	9	1	-12.1495	-11.476	-10.6313	-9.54394	-8.1005
20	2	16	2.24688	2.963273	3.860755	5.014395	6.542584
21	3	15	0.647027	1.406515	2.357021	3.577125	5.190102
22	2.5	17	2.050735	2.853532	3.857271	5.144001	6.841794
23	11	1	-14.5422	-13.6959	-12.6387	-11.2852	-9.50258
24	2	20	3.868125	4.758132	5.868898	7.289314	9.156776

25	10	5	-11.7185	-10.7846	-9.62009	-8.13264	-6.18034
26	3	20	2.697786	3.67571	4.894175	6.448771	8.4859
27	9	9	-8.88312	-7.861	-6.58846	-4.96661	-2.84467
28	3	22	3.538658	4.605131	5.931881	7.621075	9.827816
29	14	1	-18.037	-16.926	-15.5449	-13.7883	-11.4968
30	1	28	8.389842	9.54543	10.98099	12.80513	15.18139
31	15	1	-19.1809	-17.9806	-16.4905	-14.5987	-12.1378
32	8	16	-4.74943	-3.50422	-1.95939	0	2.545657
33	5	23	1.684295	2.9745	4.574118	6.601235	9.231537
34	4	26	4.120165	5.45547	7.109979	9.204879	11.91979
35	6	23	0.558104	1.938617	3.648111	5.810849	8.610323
36	3	30	6.998048	8.423869	10.18844	12.41906	15.30306
37	18	1	-22.5601	-21.0888	-19.2691	-16.9706	-14.0021
38	4.5	29	4.883702	6.400427	8.275392	10.64194	13.69485
39	6	27	2.329297	3.891611	5.821891	8.256457	11.39375
40	4	32	6.776666	8.384656	10.37033	12.87295	16.09459
41	20	1	-24.7742	-23.1205	-21.0794	-18.5086	-15.2027
42	1.5	39	12.67653	14.37612	16.47277	19.11162	22.50178
43	21	1	-25.8711	-24.1256	-21.9733	-19.2663	-15.792
44	5	34	6.582927	8.374419	10.58232	13.35751	16.916
45	6	33	5.038469	6.876023	9.139634	11.98303	15.62562
46	5.5	35	6.495521	8.379206	10.69859	13.61022	17.33684
47	23	1	-28.046	-26.1161	-23.7409	-20.761	-16.9504
48	4	40	10.41401	12.39016	14.82124	17.86941	21.76394
49	21	7	-23.1246	-21.1021	-18.6151	-15.4987	-11.5203
50	5	40	9.338122	11.40698	13.94996	17.13475	21.19698
51	8	35	3.802205	5.917511	8.516514	11.76963	15.91564
52	6	40	8.2676	10.42941	13.08448	16.40594	20.63567
53	26	1	-31.2657	-29.0574	-26.3462	-22.9564	-18.643
54	4.5	45	12.20221	14.45719	17.22453	20.68272	25.07973
55	10	35	1.671378	3.973024	6.79655	10.32313	14.80369
56	6	44	10.14175	12.49011	15.36987	18.96484	23.52891
57	9	39	4.6133	7.008427	9.944454	13.60783	18.25535
58	7	44	9.086009	11.52795	14.52028	18.25207	22.98299
59	29	1	-34.4401	-31.9513	-28.9027	-25.1025	-20.2882

60	2	56	20.03481	22.57052	25.67557	29.54419	34.44175
61	30	1	-35.4891	-32.9065	-29.745	-25.808	-20.8272
62	7.5	47	9.987985	12.61764	15.83553	19.84103	24.90501
63	9	45	7.466162	10.14285	13.41721	17.49115	22.63827
64	16	32	-6.05463	-3.33086	0	4.142382	9.372583
65	12	41	2.425599	5.196479	8.583873	12.7947	18.10793
66	5	56	16.90683	19.72486	23.16881	27.44809	32.8443
67	33	1	-38.611	-35.7457	-32.2452	-27.8975	-22.4183
68	8	52	11.8722	14.78467	18.34181	22.758	28.32
69	11	47	6.356326	9.316055	12.92983	17.41448	23.0593
70	3	64	22.84138	25.84841	29.51885	34.07195	39.79955
71	35	1	-40.6726	-37.6183	-33.8912	-29.2696	-23.4593
72	6	60	17.81423	20.91597	24.69981	29.38981	35.28279
73	36	1	-41.698	-38.5489	-34.7083	-29.9498	-23.9742
74	9	56	12.79065	15.98723	19.88454	24.71145	30.76962
75	10	55	11.28016	14.52421	18.47829	23.37365	29.51434
76	9	58	13.77051	17.06206	21.07295	26.03675	32.2599
77	15	47	2.26171	5.60079	9.668486	14.70074	21.0063
78	3	72	26.75373	30.14037	34.2649	39.3656	45.75353
79	39	1	-44.7534	-41.3192	-37.1378	-31.9687	-25.4984
80	8	64	17.7402	21.22205	25.4603	30.69787	37.25039
81	27	27	-19.7654	-16.2359	-11.9407	-6.63474	0
82	10	62	14.72983	18.307	22.65905	28.03348	34.75038
83	41	1	-46.7742	-43.1493	-38.7404	-33.2975	-26.4985
84	3	78	29.72254	33.39513	37.86104	43.37232	50.25342
85	16	53	4.220027	7.940367	12.46323	18.04292	25.00605
86	10.5	65	15.71825	19.48636	24.0662	29.7143	36.75941
87	14	59	9.217197	13.03312	17.66994	23.38644	30.51348
88	10	68	17.71687	21.58061	26.27443	32.05933	39.26825
89	44	1	-49.7828	-45.8712	-41.1203	-35.267	-27.9763
90	3	84	32.71833	36.67779	41.48566	47.40734	54.77989
91	18	55	3.220099	7.22746	12.09237	18.08243	25.53672
92	11	70	17.72256	21.77783	26.6998	32.75823	40.29423
93	15	63	10.22569	14.32891	19.30795	25.43474	33.05239
94	11.5	71	17.72949	21.88067	26.91679	33.11195	40.8112

95	18	59	5.233947	9.433111	14.52633	20.78984	28.57065
96	8	80	25.73906	29.98623	35.13655	41.46841	49.33073
97	48	1	-53.7552	-49.46	-44.2526	-37.8524	-29.9086
98	10.5	77	21.7512	26.09444	31.35901	37.82754	45.85276
99	15	69	13.25822	17.64953	22.97123	29.50809	37.61469
100	10	80	23.76587	28.20525	33.58411	40.18928	48.37722
101	50	1	-55.7259	-51.2384	-45.8024	-39.1289	-30.8597
102	4	94	36.78299	41.3186	46.81179	53.55358	61.90406
103	51	1	-56.7075	-52.1238	-46.5734	-39.7633	-31.3317
104	12	80	21.80252	26.43443	32.04199	38.92036	47.43321
105	6	93	34.31317	38.99326	44.65802	51.60466	60.19863
106	13	80	20.82441	25.55269	31.27466	38.28957	46.96461
107	53	1	-58.6638	-53.8873	-48.1081	-41.0249	-32.2689
108	9	90	29.84859	34.67332	40.50973	47.66116	56.49823
109	54	1	-59.6385	-54.7655	-48.8718	-41.6522	-32.7342
110	5	100	38.87504	43.79627	49.74716	57.03507	66.03399
111	18	75	13.38909	18.3586	24.36675	31.72288	40.80267
112	12	88	25.90369	30.92149	36.9869	44.41125	53.57186
113	56	1	-61.5812	-56.5151	-50.3924	-42.8998	-33.6584
114	4.5	105	41.93451	47.04895	53.2289	60.78966	70.11179
115	22	71	7.450724	12.6135	18.85073	26.47968	35.88252
116	14	88	23.96746	29.17859	35.47311	43.17024	52.65374
117	18	81	16.48471	21.74422	28.09604	35.86134	45.42545
118	14.5	89	24.00248	29.31037	35.71949	43.55296	53.19765
119	24	71	5.520766	10.87705	17.34348	25.2451	34.97034
120	4	112	46.03955	51.44425	57.968	65.93777	75.7435
121	55	11	-55.4412	-49.988	-43.407	-35.3691	-25.4829
122	15	92	25.07863	30.5802	37.21859	45.32462	55.29123
123	20	83	15.5989	21.14893	27.84466	36.0188	46.06579
124	15	94	26.11967	31.71816	38.47123	46.71348	56.84081
125	50	25	-43.3591	-37.7121	-30.9017	-22.5913	-12.3837
126	4.5	117	48.16264	53.85811	60.72587	69.10431	79.3922
127	63	1	-68.3152	-62.5712	-55.6461	-47.1995	-36.8314
128	32	64	-5.79249	0	6.982482	15.49707	25.94537
129	21	87	16.73064	22.57167	29.61152	38.19416	48.72261

130	6	118	47.25424	53.14381	60.24103	68.89172	79.50029
131	65	1	-70.2217	-64.2836	-57.129	-48.4102	-37.7216
132	5	122	50.3028	56.2895	63.50147	72.28824	83.05691
133	27	79	6.82776	12.86303	20.13239	28.98718	39.83585
134	16.5	101	28.35316	34.43703	41.76378	50.68658	61.6152
135	18	99	25.87901	32.01148	39.39562	48.38642	59.39497
136	16	104	30.4053	36.58638	44.02792	53.08671	64.17515
137	68	1	-73.068	-66.8383	-59.3393	-50.2126	-39.0443
138	5.5	127	52.45917	58.73752	66.29387	75.48861	86.7367
139	69	1	-74.0132	-67.6863	-60.0725	-50.8098	-39.4819
140	6	128	52.51476	58.89041	66.56158	75.89224	87.29985
141	23	95	19.04319	25.46751	33.19609	42.59469	54.08201
142	17.5	107	30.57203	37.04503	44.83104	54.29757	65.86455
143	30	83	6.101294	12.62298	20.46641	30.00086	41.64748
144	12	120	42.63096	49.20135	57.10221	66.70457	78.43078
145	28	89	11.16104	17.78014	25.73842	35.40869	47.21446
146	18	110	31.69153	38.35934	46.37506	56.11321	67.99852
147	21	105	26.22241	32.93895	41.01211	50.81815	62.78294
148	18	112	32.7537	39.51897	47.64957	57.52348	69.56773
149	74	1	-78.7146	-71.9006	-63.7126	-53.7708	-41.6471
150	5	140	59.81745	66.68023	74.92572	84.93533	97.13839
151	75	1	-79.6501	-72.7385	-64.4356	-54.3581	-42.0757
152	18	116	34.88276	41.84309	50.20347	60.34876	72.71049
153	24	105	23.416	30.4251	38.84294	49.05605	61.49706
154	7.5	139	56.94961	64.00751	72.4828	82.76372	95.28399
155	30	95	12.48361	19.59031	28.12306	38.47177	51.07126
156	6	144	61.01798	68.17349	76.7637	87.1802	99.85887
157	78	1	-82.4473	-75.243	-66.5953	-56.111	-43.3532
158	19.5	119	35.08783	42.34099	51.04612	61.59818	74.43511
159	26	107	22.62331	29.9253	38.68791	49.30772	62.22374
160	16	128	43.15916	50.50999	59.33006	70.01763	83.01269
161	33	95	9.695363	17.09505	25.97259	36.7279	49.80198
162	13.5	135	49.23193	56.68048	65.61549	76.43852	89.59159
163	81	1	-85.2311	-77.7337	-68.7412	-57.8505	-44.6185
164	20	124	37.30613	44.85243	53.90239	64.86085	78.17179

165	10	145	57.84377	65.43895	74.54638	85.57254	98.96237
166	20.5	125	37.38175	45.02582	54.19074	65.28458	78.75327
167	83	1	-87.0799	-79.3869	-70.1646	-59.003	-45.4555
168	6	156	67.45876	75.20063	84.48051	95.7097	109.336
169	78	13	-76.0022	-68.2114	-58.8741	-47.5772	-33.8722
170	8	154	64.53713	72.37685	81.77169	93.13619	106.92
171	27	117	27.07683	34.96548	44.41781	55.84994	69.71242
172	21	130	39.61687	47.55445	57.06426	68.56402	82.50517
173	86	1	-89.8428	-81.8562	-72.2889	-60.7216	-46.7018
174	14	146	54.69794	62.73341	72.3582	83.99319	98.09157
175	30	115	23.23897	31.3234	41.00568	52.70826	66.88522
176	20	136	43.78033	51.91372	61.6535	73.42366	87.67916
177	29	119	26.32201	34.50437	44.30164	56.13939	70.47339
178	22	134	40.86402	49.09536	58.95012	70.85543	85.26791
179	89	1	-92.5937	-84.3133	-74.4011	-62.4282	-47.9373
180	6	168	73.94899	82.27831	92.24806	104.2885	118.8578
181	90	1	-93.508	-85.1297	-75.1025	-62.9945	-48.3468
182	9	164	69.03524	77.46256	87.5473	99.72278	114.4489
183	30	123	27.57884	36.05516	46.1974	58.44039	73.24482
184	22	140	44.12274	52.64809	62.84782	75.15832	90.04104
185	36	113	16.66696	25.24133	35.49856	47.87655	62.83754
186	7.5	171	74.21149	82.83488	93.14961	105.5951	120.6343
187	40	107	9.756315	18.42874	28.80097	41.31393	56.43137
188	23	142	44.30145	53.02292	63.45265	76.03307	91.22869
189	27	135	36.84689	45.6174	56.10463	68.75251	84.02628
190	9	172	73.39262	82.21219	92.75692	105.4722	120.8241
191	95	1	-98.0613	-89.1927	-78.5905	-65.8077	-50.3777
192	16	160	60.48499	69.40268	80.06241	92.9126	108.4206
193	96	1	-98.9684	-90.0016	-79.2844	-66.3668	-50.7807
194	24	146	45.57854	54.59438	65.36911	78.35411	94.0182
195	12	171	70.12576	79.19067	90.02291	103.0753	118.8174
196	21	154	52.67326	61.78726	72.677	85.79678	101.6168
197	98	1	-100.779	-91.6159	-80.6686	-67.4815	-51.5835
198	7.5	183	80.76913	89.98132	100.9861	114.2406	130.2164
199	99	1	-101.683	-92.4212	-81.359	-68.0371	-51.9834

200	20	160	56.86615	66.17654	77.29629	90.68552	106.817
201	33	135	31.41508	40.77459	51.95183	65.4084	81.61773
202	25	152	47.96429	57.37292	68.60766	82.13155	98.41867
203	42	119	14.51378	23.97153	35.26378	48.85498	65.21985
204	8	188	83.06354	92.57042	103.9202	117.5787	134.0213
205	40	125	19.61359	29.1696	40.57685	54.30266	70.82294
206	25.5	155	49.1639	58.76905	70.23381	84.0269	100.6249
207	33	141	34.71449	44.36879	55.89104	69.75141	86.42701
208	24	160	53.26535	62.96879	74.54855	88.47619	105.2294
209	45	119	11.81648	21.56908	33.20633	47.20123	64.03203
210	3	204	96.36788	106.1696	117.8644	131.9265	148.8349
211	105	1	-107.08	-97.2295	-85.4773	-71.3479	-54.362
212	26	160	51.47148	61.37156	73.18131	87.37792	104.4413
213	35	143	34.02368	43.97293	55.84018	70.104	87.24489
214	26.5	161	51.57613	61.57456	73.49931	87.83034	105.0487
215	42	131	21.12885	31.17646	43.15871	57.55694	74.8527
216	18	180	69.68183	79.77862	91.81837	106.2838	123.657
217	45	127	16.23507	26.38105	38.47829	53.01089	70.46143
218	27	164	52.78857	62.98374	75.13848	89.73825	107.2661
219	36	147	35.34232	45.58669	57.79892	72.46585	90.07106
220	10	200	87.89633	98.1899	110.4596	125.1937	142.8762
221	48	125	12.45059	22.79336	35.12059	49.92181	67.68158
222	9	204	91.0051	101.3971	113.7818	128.6502	146.4872
223	111	1	-112.44	-101.999	-89.5567	-74.6213	-56.707
224	24	176	62.11487	72.60529	85.105	100.1076	118.099
225	30	165	50.67013	61.20978	73.76697	88.83665	106.9052
226	28	170	55.22564	65.81451	78.42919	93.56597	111.7117
227	113	1	-114.219	-103.581	-90.9083	-75.7045	-57.4816
228	9	210	94.33739	105.0247	117.7544	133.0253	151.3253
229	114	1	-115.106	-104.37	-91.5826	-76.2446	-57.8676
230	11	208	91.45011	102.2359	115.0806	130.4856	148.9397
231	15	201	84.00684	94.8419	107.744	123.2161	141.7472
232	28	176	58.5638	69.44812	82.40773	97.94686	116.5549
233	116	1	-116.879	-105.945	-92.9283	-77.3222	-58.6372
234	9	216	97.67844	108.6613	121.7359	137.409	156.171

235	46	143	24.23612	35.26821	48.40027	64.14045	82.97932
236	29	178	58.79403	69.87539	83.06493	98.87211	117.7879
237	39	159	39.35218	50.4828	63.72983	79.60399	98.59662
238	12	214	93.91056	105.0905	118.395	134.3361	153.4056
239	119	1	-119.531	-108.302	-94.9397	-78.9316	-59.7853
240	8	224	103.028	114.3065	127.7259	143.801	163.0241
241	120	1	-120.413	-109.085	-95.6082	-79.4662	-60.1664
242	27.5	187	65.14638	76.5234	90.05781	106.2668	125.6434
243	72	99	-23.2941	-11.8678	1.724107	18	37.45331
244	30	184	61.26566	72.74126	86.39063	102.7334	122.2634
245	42	161	37.82564	49.35054	63.05738	79.4671	99.07378
246	10	226	102.3858	113.96	127.7244	144.201	163.8843
247	54	139	14.94627	26.56977	40.39155	56.93508	76.69503
248	30	188	63.50692	75.17972	89.05898	105.6694	125.5059
249	41	167	42.06779	53.78991	67.72662	84.40391	104.317
250	25	200	74.62888	86.40031	100.3945	117.1386	137.1283
251	125	1	-124.81	-112.989	-98.9374	-82.1264	-62.0602
252	9	234	107.7517	119.6218	133.7309	150.6088	170.7515
253	55	143	16.31347	28.23285	42.39943	59.34413	79.56333
254	31.5	191	63.87543	75.84414	90.06818	107.0797	127.3754
255	16	223	95.43761	107.4556	121.7371	138.8155	159.1876

## 7. 参考文献

- [1] 飯高茂, 数学の研究をはじめよう (I), 現代数学社
- [2] 飯高茂, 数学の研究をはじめよう (II), 現代数学社

## 8. 謝辞

本研究の指導をして下さった津野祐司先生, 私たちの研究の発表の機会を与えて下さった大関清太先生をはじめとする日本フィボナッチ協会の皆様, 高校生でも研究ができる事を教えてくださった飯高茂先生そしてお世話になった長野県飯山高等学校の先生方に深く感謝の意を表します.

# 取る石の数の制限を付けた Wythoff の 2 山崩し

久保智哉, 片山 真一 (徳島大学大学院 総合科学部教育部)

## 1 取る石の数の制限を付けた石取りゲーム

石取りゲームは, ニム (Nim) とよばれる 2 人遊びのゲームで, いくつかの石の山から交互に石を取り合って最後に石を全部取った方が勝者となるゲームである。このルールの場合を **正規形のゲーム** と言う。なお最後に石を取った方を敗者とする **逆形のゲーム** もあるが, 今回取り上げるのは, 正規形の石取りゲームである。

実は, 各回で取る石の数の制限を付けず, 先手後手が共に最善手を取るという仮定の下では, 最初の石の数と山の数で先手必勝形であるか後手必勝形であるかが決まる。またその場合の先手必勝形は, 非負整数全体  $\mathbb{N}_0$  に 2 進表示を用いて入る **Nim 和** と呼ばれる加法群の構造を用いて記述されることが知られている。1 山の場合には, 山が無いときが終了形なので, 石が無い場合は後手必勝形と見なす。それ以外の全ての場合は先手必勝形である。2 山崩し  $(m, n)$  (各山の石の数が  $m$  と  $n$ ) については, 数が小さい場合に試してみれば, 後手必勝形が,  $(m, n) = (0, 0), (1, 1), \dots, (k, k), \dots$  となっていることが分かる。以下で, 議論を 3 山以上に一般化するために,  $\mathbb{N}_0$  での Nim 和  $\oplus$  を次のように定める。 $m, n \in \mathbb{N}_0$  の 2 進展開を (展開の桁を合せて) 次のように表しておく。

$$m = a_d \times 2^d + a_{d-1} \times 2^{d-1} + \dots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0 \quad (a_i \in \{0, 1\})$$

$$n = b_d \times 2^d + b_{d-1} \times 2^{d-1} + \dots + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2 + b_0 \quad (b_i \in \{0, 1\})$$

ここで  $m, n$  の 2 進表記の桁が違う場合も,  $7 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1, 3 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$  のように  $0 \times 2^n$  を加え, 形式上同じ桁に揃えておく。さらに各係数  $a_i, b_j$  を 2 元体  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の元と考える。すなわち  $0 + 0 = 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1$  として,  $c_i = a_i + b_i$  ( $0 \leq i \leq d$ ) とする。

このとき  $m, n \in \mathbb{N}_0$  の Nim 和  $m \oplus n \in \mathbb{N}_0$  は,

$$m \oplus n = c_d \times 2^d + c_{d-1} \times 2^{d-1} + \dots + c_2 \times 2^2 + c_1 \times 2 + c_0$$

で定義される。 $m = 7, n = 3$  の場合は,  $7 \oplus 3 = 4$  になる。この記号を用いると, 局面  $P = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  が,  $n$  山崩しにおける後手必勝形となる必要十分条件は,

$$m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_n = 0$$

となることである。従って Nim 和が 0 以外の値をとる局面  $P = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  は, 先手必勝形である。制限を付けた場合の石取りゲームの後手必勝形 (先手必勝形) の決定には, それぞれの局面の状態を表す **Grundy 数** (グランディー数) という非負整数を定義しておくことと便利である。ある局面  $P$  から 1 手で移行可能な局面  $P'$  を  $P$  の後続局面と呼んで,

$$P \rightarrow P'$$

と表すことにする。次に  $T \subset \mathbb{N}$  (この場合の  $\mathbb{N}$  は自然数全体を表す) のときに

$$mex(T) = \min(\mathbb{N} - T)$$

として、集合  $T$  の 最小除外数 と呼ぶ。まず終了局面全体を  $\varepsilon$  とし、終了局面  $P \in \varepsilon$  のグランディー数  $g(P)$  を  $g(P) = 0$  とする。以下  $N(P)$  で  $P$  の後続局面全体の集合とし、

$$g(P) = \text{mex}\{g(N(P))\}$$

と帰納的に定める。

$S \subset \mathbb{N}$  とする。制限付きの 1 山崩しとは、山から取り去ることができる石の数  $s$  が  $s \in S$  に限られることを言う。この制限された石取りゲームの局面  $P$  のグランディー数を  $g_S(P)$  で表すとき、制限無しの場合と同様に次の 2 条件は、同値である。

$$g_S(P) = \text{mex}\{g(N(P))\} = 0 \iff \text{局面 } P \text{ は後手必勝形}$$

定義に従えば、制限無しの 1 山崩しの場合の、局面  $P = n$  のグランディー数は、 $g(n) = n$  であることが分かる。以下では、 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r \mid 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_r\}$  と仮定する。この有限集合  $S$  に対し、局面  $P = n$  の後続局面全体の集合  $N(n)$  は、 $N(n) = \{n - s \mid n - s \geq 0 (s \in S)\}$  である。また  $g_S(n) = \text{mex}\{n - s \mid n - s \geq 0 (s \in S)\}$  であり次の定理が成立する。

**Theorem 1.1** グランディー数列  $\{g_S(n)\}$  は 周期的 である。すなわちある  $a \geq 0, p > 0$  に対して次が成立する。

$$n \geq a \implies g(n + p) = g(n)$$

(注:この  $p$  をグランディー数列  $\{g_S(n)\}$  の 周期 と呼ぶ。)

また実際に有限集合  $S$  が与えられた場合に、周期  $p$  と  $a$  を求めるときには次の定理が有用である。

**Theorem 1.2** ある  $a \geq 0, p > 0$  があって、連続する  $a \leq n \leq a + s_r - 1$  の  $s_r$  個の  $n$  に対して  $g(n + p) = g(n)$  が成立するとき、

$$n \geq a \implies g(n + p) = g(n)$$

この定理を  $S = \{1, 2, \dots, k\}$  に適用して次を得る。

**Example 1.3**  $S = \{1, 2, \dots, k\}$  のとき、次が成立する。

$$\{g_S(n)\} = \{0, 1, 2, \dots, k, 0, 1, 2, \dots, k, \dots\}$$

すなわち  $a = 0, p = k + 1, g_S(n) \equiv n \pmod{k + 1}$ 。

また  $S$  が  $|S| = \infty$  の場合にグランディー数列  $\{g_S(n)\}$  が、ある  $a \geq 0, p > 0, q > 0$  に対して次を満たすことがある。

$$n \geq a \implies g(n + p) = g(n) + q$$

このとき  $g_S(n)$  は、 加法的周期性 を持つと言い、  $p$  を 周期、  $q$  を 増分 と言う。例えば；

**Example 1.4**  $T = \{1, 2, \dots, k\}, S = \mathbb{N} - T$  の時、  $\{g_S(n)\}$  は、 加法的周期性 を持ち  $a = 0, p = k + 1, q = 1$  である。より正確には、  $g_S(n) = \left\lfloor \frac{n}{k + 1} \right\rfloor$  と表される。

## 2 Wythoffの2山崩し

Wythoffの石取りゲームとは、2山崩しに於いて、1つの山から石を石を取るだけでなく2つの山から同時に同じ数の石を取る手順も許すゲームである。局面  $P = (m, n)$  のグランディー数を  $g(m, n)$  とする。 $g(0, 0) = 0$  から帰納的に  $g(m, n)$  を具体的に求めることは可能であるが、 $g(m, n)$  を  $m, n$  で明示的に表す閉じた式の存在は、未だ知られていない(注:未解決問題)。しかし後手必勝形すなわち  $g(m, n) = 0$  となる  $(m, n)$  を求めることは可能であって、Wythoff (1905) による次のような結果が知られている。

**Theorem 2.1** (Wythoff(1905))  $m_s$  を  $m_0 = 0, m_{s+1} = \text{mex}\{m_0, m_1, m_1 + 1, \dots, m_s, m_s + s\}$  という漸化式で定める。このとき後手必勝形  $(m, n)$  は  $g(m, n) = 0 \iff (m, n) = (m_s, m_s + s)$  または  $(m_s + s, m_s)$  で決まる。また  $m_s$  は、ガウス記号  $[x]$  と黄金比  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  を用いて  $m_s = [s\phi]$  で与えられる。

**Remark 2.2** 上記の定理の証明には、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  ( $a, b > 0, a$  は無理数) の条件の下で  $I = \{[a], [b], [2a], [2b], \dots, [na], [nb], \dots\}$  の中に全ての自然数がただ1回現れるという J.W.S. Rayleigh (The Theory of Sound (1894-96) 改訂増補版) で示された定理を用いる。

Wythoffの石取りゲームのグランディー数  $g(m, n)$  に関しては、前述の通り明示的な式は知られていないが、次のような性質が知られている。

**Theorem 2.3** (Dress, Flammenkamp, Pink (1999))  $m$  を固定したとき、Wythoffの石取りゲームのグランディー数  $g(m, n)$  は加法的周期性を持つ。すなわち、ある  $a_m \geq 0, p_m > 0$  があって

$$n \geq a_m \implies g(m, n + p_m) = g(m, n) + p_m$$

が成立する。(注:この場合特に 周期 = 増分 =  $p_m$  が成立する。)

**Table 1.**  $g(m, n)$  の加法的周期表 ( $p_m$  および  $a_m$ ), (Dress-Flammenkamp-Pink(1999) より)

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$p_m$	1	3	3	6	12	24	12	24	24	24	24	48	48	96	96	96	192	192
$a_m$	0	0	0	8	9	27	37	92	102	127	224	227	347	382	613	693	771	865

$m$	18	19	20	21...43	44...67	68...70	71...90
$p_m$	384	384	384	768	1536	3072	6144
$a_m$	919	1032	1165	1252...13849	14190...51898	53873...58059	60650...126851

## 3 取る石に数制限のある Wythoffの石取りゲーム

ここでは、山から取る石の数に制限を付けたとき Wythoffの石取りゲームのグランディー数の満たす性質を紹介する。一度に取れる石の数を  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r \mid 0 < s_1 < s_2, \dots < s_r\}$  に制限する。従って定義により局面  $P = (m, n)$  の後続局面は、

$$N(P) = \{(m - s_i, n), (m, n - s_j), (m - s_k, n - s_k) \mid s_i, s_j, s_k \in S, \text{ここで}$$

$$m - s_i \geq 0, n - s_j \geq 0 \text{であり, さらに } m - s_k \text{ と } n - s_k \text{ は共に } \geq 0\}$$

このような制限を付けた Wythoff の石取りゲームのグランディー数  $g_S(m, n) = \text{mex}\{g_S(N(m, n))\}$  は、次の性質を満たす。

**Theorem 3.1** この記号の元で  $0 \leq g_S(m, n) \leq 3r$ .

**Theorem 3.2** (片山, 久保 (2017)) 上記の記号の下で,  $m$  を固定すると, 取る石の数の制限を付けた Wythoff の石取りゲームのグランディー数  $g_S(m, n)$  は周期性を持つ。

すなわち, ある  $a_m \geq 0, p_m > 0$  があって次式が成立する。

$$n \geq a_m \implies g_S(m, n + p_m) = g_S(m, n)$$

最初の Theorem 3.1 の主張は,  $g_S(m, n) = \text{mex}\{g_S(N(m, n))\}$  で  $N(m, n)$  の個数が高々  $3r$  個であることから従う。

Theorem 3.2 は,  $m$  に関する帰納法によって証明される。まず  $m = 0$  の時は, 制限付きの 1 山崩しの場合に帰着するので正しいことが分かる。

$m' (0 \leq m' \leq m - 1)$  のときは,  $g_S(m', n + p_{m'}) = g_S(m', n)$  が  $n \geq a_{m'}$  で成立すると仮定し, それぞれの周期を  $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$  とする。ここで  $a_* = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$ ,  $p_* = \text{LCM}(p_0, p_1, \dots, p_{m-1})$  とする。以下詳細は略すことにするが,  $a_m = a_*$  に対して, ある  $p_m$  (ただし  $p_* | p_m$ ) があってこの定理が成立することが, 鳩ノ巣原理を用いて示される。

最後に  $S$  が  $S = \{1, 2\}$  の場合の  $g_S(m, n)$  の表を掲載しておく。

**Table 2** ( $S = \{1, 2\}$  の場合は, 周期 3 で純周期的で, さらに制限のない Wythoff のゲームのグランディー数  $g(m, n)$  との間に  $g_S(m, n) \equiv g(m, n) \pmod{3}$  という特殊な関係が成立する。ただし,  $S = \{1, 2, \dots, k\}$  ( $k = 1, 3, 4, 5, 6$ ) の場合には, このような関係は成立していない。)

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	1	2	0	1	2	0	1	2	0
2	2	0	1	2	0	1	2	0	1
3	0	1	2	0	1	2	0	1	2
4	1	2	0	1	2	0	1	2	0
5	2	0	1	2	0	1	2	0	1

#### 参考文献

- [ 1 ] 秋山仁, 中村義作, ゲームにひそむ数理-ゲームでみがこう!!数学的センス, 森北出版, 1998.
- [ 2 ] S. Beatty, A. Ostrowski, J. Hyslop and A. C. Aitken, Solutions to Problem 3173, Amer. Math. Monthly, **34** (1927), 159–160.
- [ 3 ] C. L. Bouton, Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory, Ann. of Math., **3** (1901–1902), 35–39.
- [ 4 ] A. Dress, A. Flammenkamp and N. Pink, Additive Periodicity of The Sprague-Grundy Function of Certain Nim Games, Adv, Appl. Math. **22** (1999), 249–270.
- [ 5 ] 土方弘明, Wythoff の二山崩しについて, 数学, **11** (1959), 28–30.
- [ 6 ] 一松信, 石とりゲームの数理, 森北出版, 1968.
- [ 7 ] H. Landman, A Simple FSM-based Proof of The Sprague-Grundy Function of Wythoff’s Game, ”More Games of No Chance” (R. J. Nowakowski ed.), Cambridge Univ. Press, 2002, pp. 383–386.
- [ 8 ] 佐藤文広, 石取りゲームの数学-ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014.
- [ 9 ] W. A. Wythoff, A Modification of the Game of Nim, Nieuw Arch, Wisk. **7** (1907), 199–202.

# ツァリスの $q$ -指数関数の遷移過程

—  $q$ -フィボナッチ数へのアプローチ —

(公益財団法人) 地震予知総合研究振興会 萩原幸男

## 1. 指数関数とべき関数の遷移過程

時間  $t$  の関数  $f(t)$  を考える. 初期値  $f(0)$  から始まって, 時間  $t$  の経過とともに遷移する過程を時間ステップ  $\Delta t$  ごとに記述する. いま時間  $t$  における状態  $f(t)$  が遷移レート  $\lambda$  で次の時間ステップの状態  $f(t + \Delta t)$  に遷移する (図 1). このとき

$$f(t + \Delta t) = f(t) (1 - \lambda \Delta t) \quad (1)$$

が成り立つ.  $\Delta t \rightarrow 0$  とすれば式(1)は微分方程式

$$df(t)/dt = -\lambda f(t) \quad (2)$$

となり, その解は指数関数となる.

$$f(t) = f(0) \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

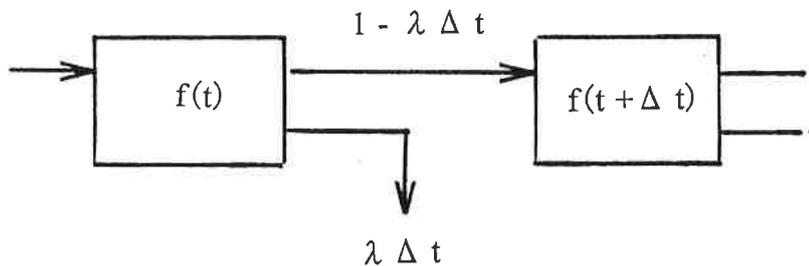


図 1 指数関数の遷移過程

次に遷移レートが  $f(t)$  に比例する場合を考える. この場合には式(1)に代わって

$$f(t + \Delta t) = f(t) \{1 - \lambda f(t) \Delta t\} \quad (4)$$

が成り立つので, 微分方程式は

$$df(t)/dt = -\lambda f^2(t) \quad (5)$$

となり, 解は次のようになる.

$$f(t) = f(0) / \{1 + \lambda f(0)t\} \quad (6)$$

$t$  軸に沿って座標を平行移動すると式(6)は直角双曲線になって  $f(t)$  は  $t^{-1}$  に比例する. すなわちべき乗則が成り立つ. すなわち式(6)はべき関数の遷移過程に他ならない.

ここで重要な事実に気が付くであろう. 指数関数の場合の遷移レートは単に  $\lambda$  (常数)であったが, べき関数の場合には遷移レートは  $\lambda f(t)$  に高度化した. すなわちべき関数系の遷移過程は指数関数系より高度に進化した過程であると言える.

## 2. ツァリスの $q$ -指数関数

いま  $f(t)$  の非線形微分方程式

$$df(t)/dt = -\lambda f^q(t) \quad (7)$$

を考える。その解は次式により得られる。

$$f(t) = f(0) \{1 - \lambda (1 - q) f^{q-1}(0) t\}^{1/(1-q)} \quad (8)$$

式(7)において  $q = 1$  とすれば指数関数の遷移過程,  $q = 2$  とすればべき関数の遷移過程になる。前述したように指数関数系がべき関数系に進化したとすれば, 式(7)によって両遷移方式間の進化の過程をフォローすることができることになる。

C.Tsallis は 1988 年に指数関数系のボルツマン-ギブス統計力学の概念をべき関数の領域に拡張した。その拡張の過程で導出されたツァリスの  $q$ -指数関数は次のように定義される。

$$\exp_q(t) = \{1 + (1 - q)t\}^{1/(1-q)} \quad (9)$$

この  $q$ -指数関数の記法を用いると式(8)は

$$f(t) = f(0) \exp_q(-\mu t) \quad (10)$$

と書くことができる。ここに  $\mu = \lambda f^{q-1}(0)$  と置いている。

ツァリスの  $q$ -指数関数の性質を知るために, 式(9)を通常の座標 (図2) と両対数座標 (図3) にそれぞれ図形化する。図2からは  $t$  値の増加とともに曲線が長く尾を引くいわゆるロングテールの傾向は  $q$  値が大きいく程顕著となることが示される。図3からは  $\ln t$  値とともに次第に直線に近づく傾向は  $q$  値が大きくなる程早めに現れることが分かる。

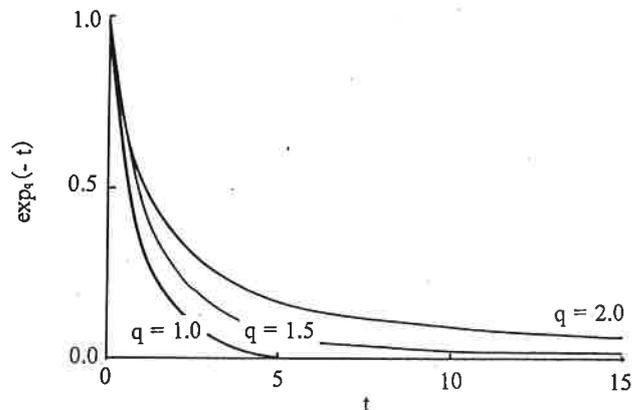


図2 通常の指数関数 ( $q = 1.0$ ) とツァリスの  $q$ -指数関数 ( $q = 1.5$  と  $2.0$ )

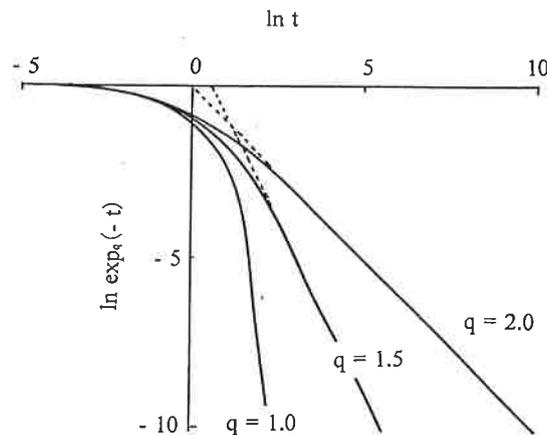


図3 図2を両対数座標に表したもの。点線は漸近線。

直線に近似できる領域をスケーリング領域と呼ぶ。スケーリング領域では曲線は漸近線

$$\exp_q(-t) = \{(q-1)t\}^{-1/(q-1)} \quad (11)$$

に近似できる。図3では漸近線を点線で示している。漸近線と横軸 ( $\ln t$  軸) との交点の座標  $\ln t_0$  は

$$\ln t_0 = -\ln(q-1) \quad (12)$$

であるから、 $q = 2.0$  の場合は漸近線は原点で、 $q = 1.5$  の場合には  $\ln t_0 \approx 0.693$  で交わる。

### 3. $q$ -フィボナッチ数へのアプローチ

フィボナッチ数  $F_n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$  はビネの式

$$F_n = \{\phi^n - (-\phi)^{-n}\} / \sqrt{5} \quad (13)$$

によって与えられる。ここに  $\phi$  は黄金数  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  である。式(13)はまた

$$F_n = \{\exp(n \ln \phi) - (-1)^n \exp(-n \ln \phi)\} / \sqrt{5} \quad (14)$$

と書き換えることもできる。

さらに次の比を定義する。この比は  $n$  の増大とともに  $1/\phi$  に近づく。

$$R_n = F_n / F_{n+1} \quad (15)$$

いま改めて  $G_n = \phi R_n$  と置けば、式(14)により

$$G_n = \{1 - (-1)^n \exp(-2n \ln \phi)\} / [1 + (-1)^n \exp\{2(n+1) \ln \phi\}] \quad (16)$$

となり、 $n$  の増大とともに  $G_n$  は 1.0 に近づく。

式(16)は容易に  $q$  による拡張が可能であり

$$\begin{aligned} G_n(q) &= \{1 - (-1)^n \exp_q(-2n \ln \phi)\} / [1 + (-1)^n \exp_q\{2(n+1) \ln \phi\}] \\ &= [1 - (-1)^n \{1 + 2n(q-1) \ln \phi\}^{-1/(q-1)}] \\ &\quad / [1 + (-1)^n \{1 + 2(n+1)(q-1) \ln \phi\}^{-1/(q-1)}] \end{aligned} \quad (17)$$

と書くことができる。図4は  $G_n(q)$  の  $n$  に伴う変化を示している。

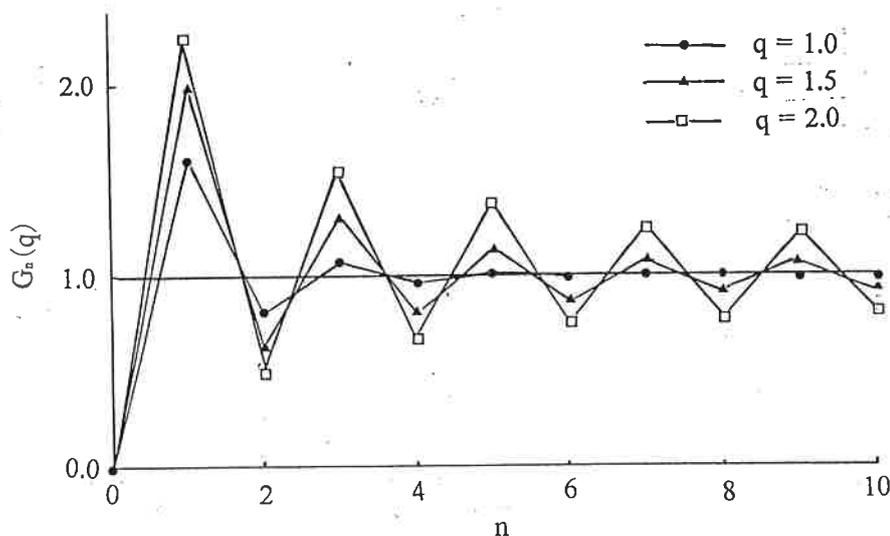


図4  $G_n(q)$  の値.  $n \rightarrow \infty$  で 1 に収束する。

# Isospectral graph についての新発見

細矢治夫 お茶大 (名誉)

日本フィボナッチ協会

第15回研究集会

東京理科大学・神楽坂

2017年8月25日

数学における spectrum とは

グラフ  $G$  の特性多項式  $P_G(x)=0$  の解

$$P_G(x) = (-1)^N \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E})$$

例



$$P_G(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4 = 0$$

$x = \{2, 1, 1, -1, -1, -2\}$  : spectrum

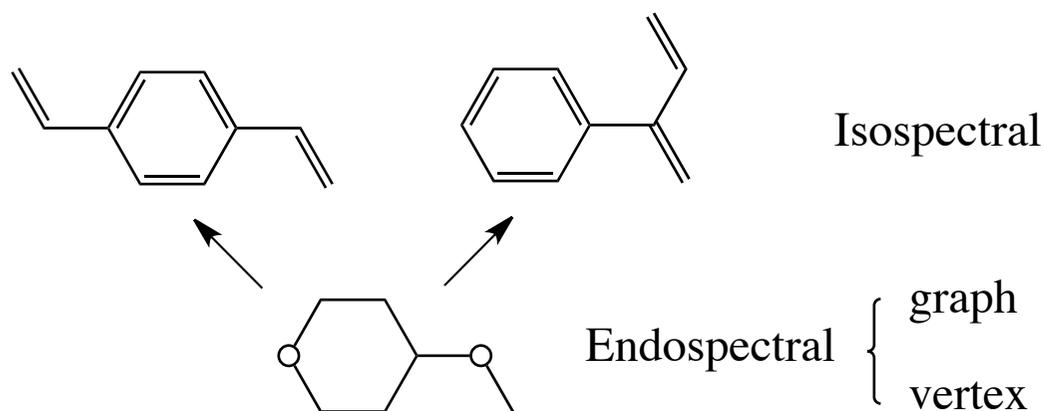
$$\text{HMO} : E_\pi = 2(2+1+1) = 8$$

Cospectral graph = Isospectral graph  
数学 (グラフ理論) 数理化学・数理物理

要するに

ヒュッケルMOが同じグラフ のこと! ?

化学では Zivkovic が 1973 年に偶然発見した。



しかし、化学、特に理論化学では

ヒュッケル法自体が時代遅れ、

また、電子スペクトルの測定値と数学のスペクトルは別物、  
ということから、

一般の化学者は、この問題に全く興味をみせてくれない。

従って、isospectrumの問題は、

一部の好事家だけの問題になってしまっている、  
のが現状。

# ところが 数理物理では

1966年 Kacは

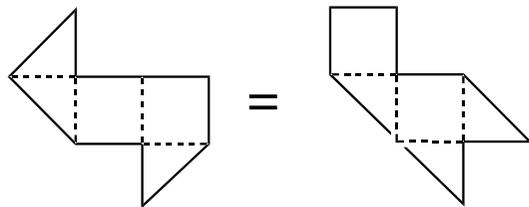
“Can one hear the shape of a drum?”

という問題提起をして、大きな反響を呼んだ。

*Amer. Math. Monthly.*, **73** (1966) 1.

それに応える論文が 1992年に  
Gordon, Webb, Wolpert によって発表された。

One cannot hear the shape of a drum.



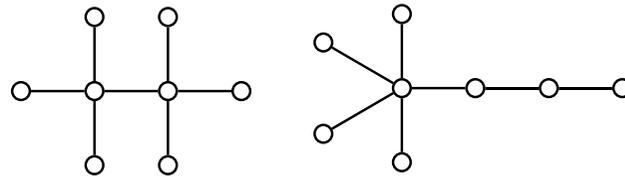
*Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992) 134.

この裏には

砂田利一 Riemannian coverings and **isospectral** manifold,  
*Ann. Math.*, **121** (1985) 248. が有名.

ここでは、化学に関係のある問題を考える

先ず、acyclic, 即ち tree graph に問題を絞る.  
BalabanとHararyが1971年に発表した

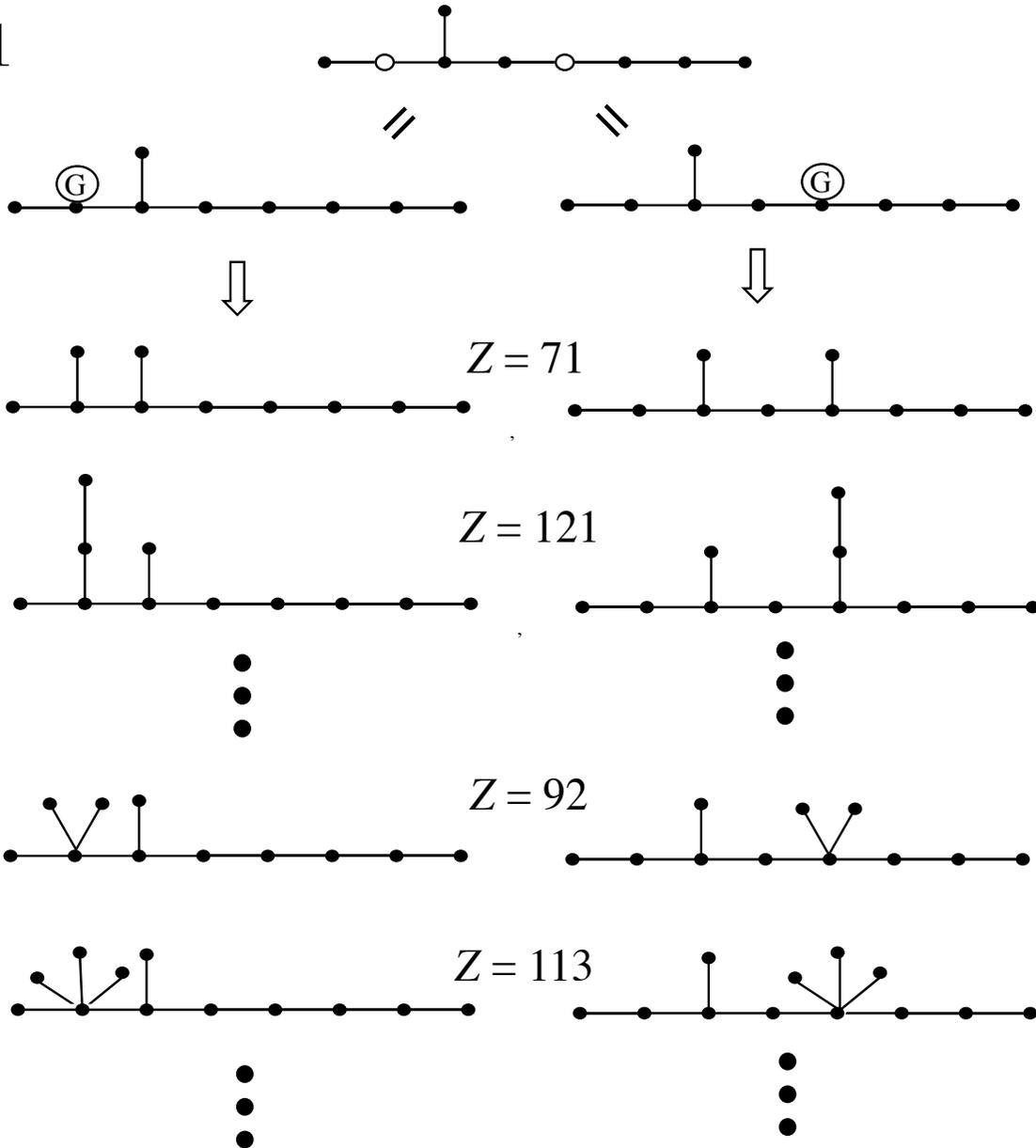


は化学とは関係なさそうだが、一応最小の  
isospectral (IS) tree graphs である.

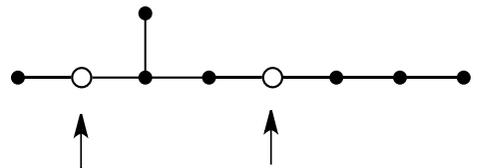
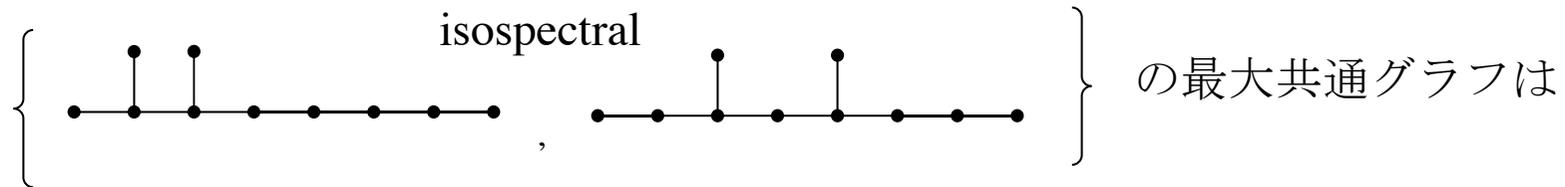
その後、graph theorists と mathematical chemists  
達は、コンピュータで沢山の IS を見つけたが、  
それらを結びつける global な理論は出ていない.

endospectral  
graph とは

isospectral graphs



# Endospectral graph を見つける



endospectral vertices

で, その白丸にエッジを付加すると  
IS対ができる.

最小の endospectral graph !!

しかし,

IS pair  $\Rightarrow$  endospectral graph  
の関係は, 必要十分ではない.

一方 Schwenk は, グラフが大きくなれば,  
**Almost all trees are cospectral.** とうそぶいている.

## 新しい strategy

- 1) 固有値の集合の代わりに **Z-インデックス**を

$$P_G(x) = (-1)^N \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E})$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (-1)^k p(G,k) x^{N-2k}$$

$p(G,k)$  : non-adjacent number

$$Q_G(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} p(G,k) x^k \quad \text{Z-counting polynomial}$$

$$Q_G(1) = Z \quad \text{topological index}$$

H. Hosoya, *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, **44** (1971) 2332.

- 2) 鎖式共役ポリエンで沢山の IS 対を発見

$N=12$ . 1 pair;  $N=14$ . 4 pairs;  $N=16$ . 27 pairs

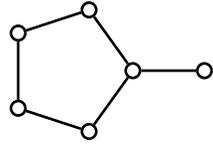
H. Hosoya, *Croat. Chem. Acta*, **89** (2016)

多くの **IS 対の身上調査**を徹底的に行った。

# graph の種類

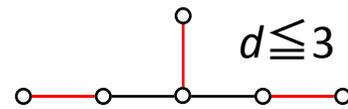
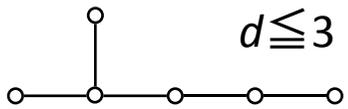
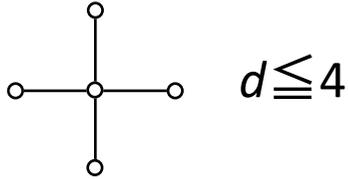
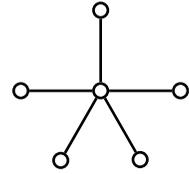
非木

Non-tree



木

tree



完全マッチング  
Kekule構造

飽和炭化水素

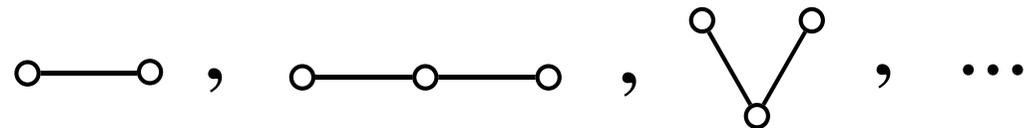
不飽和炭化水素  
ラジカルも

不飽和共役炭化水素

化学グラフ

従来の理論（数も化も）では

Endospectral graph の1対の点（ $u$ と $v$ ）のそれぞれに、ある共通のグラフ

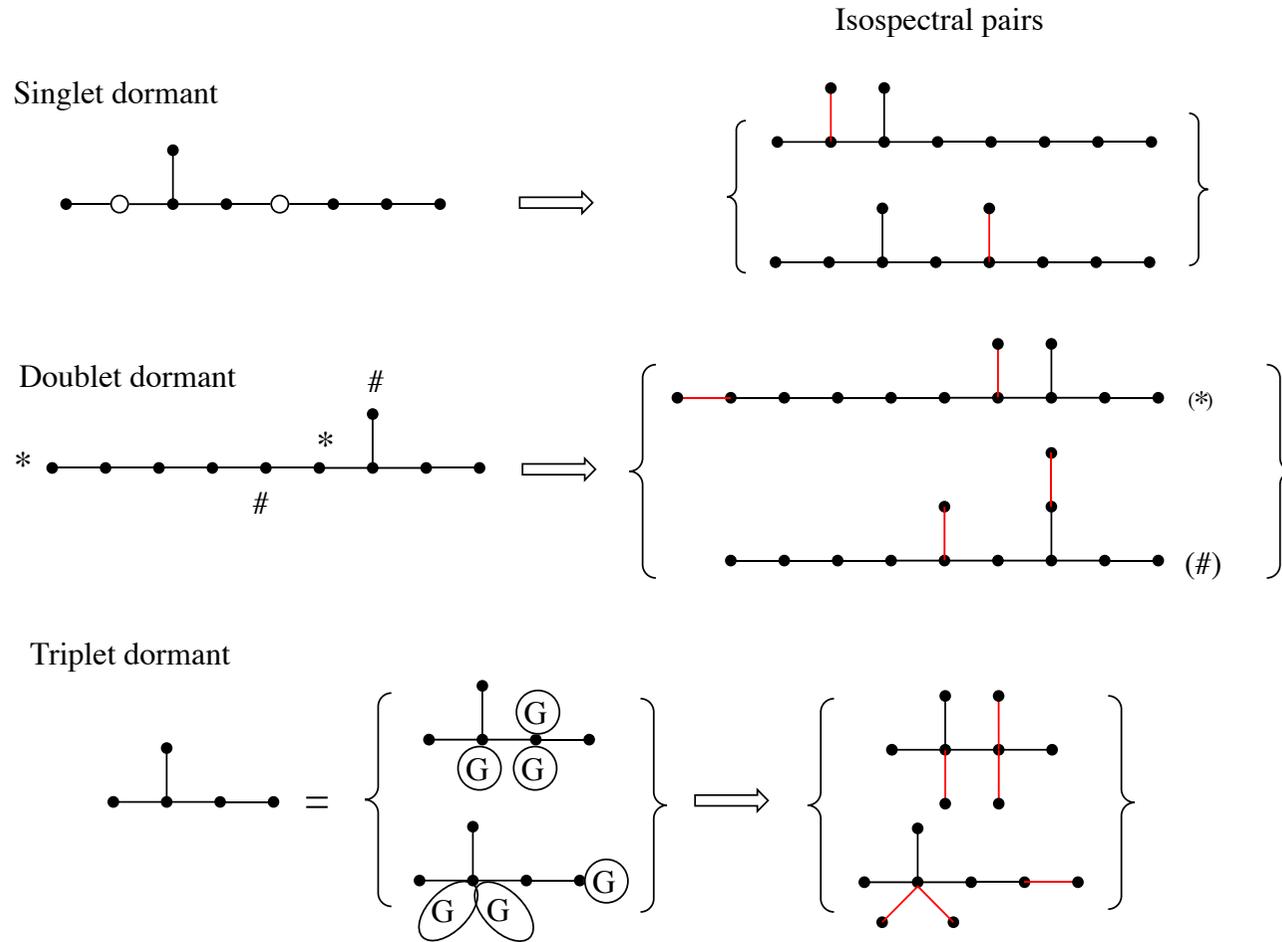


を付加させると isospectral (IS) 対が生成する、ということだったが、

我々は、**multiplet dormant** という新しい概念を生み出すことができた。

従来の endospectral graph は  
singlet dormant  
ということになる。

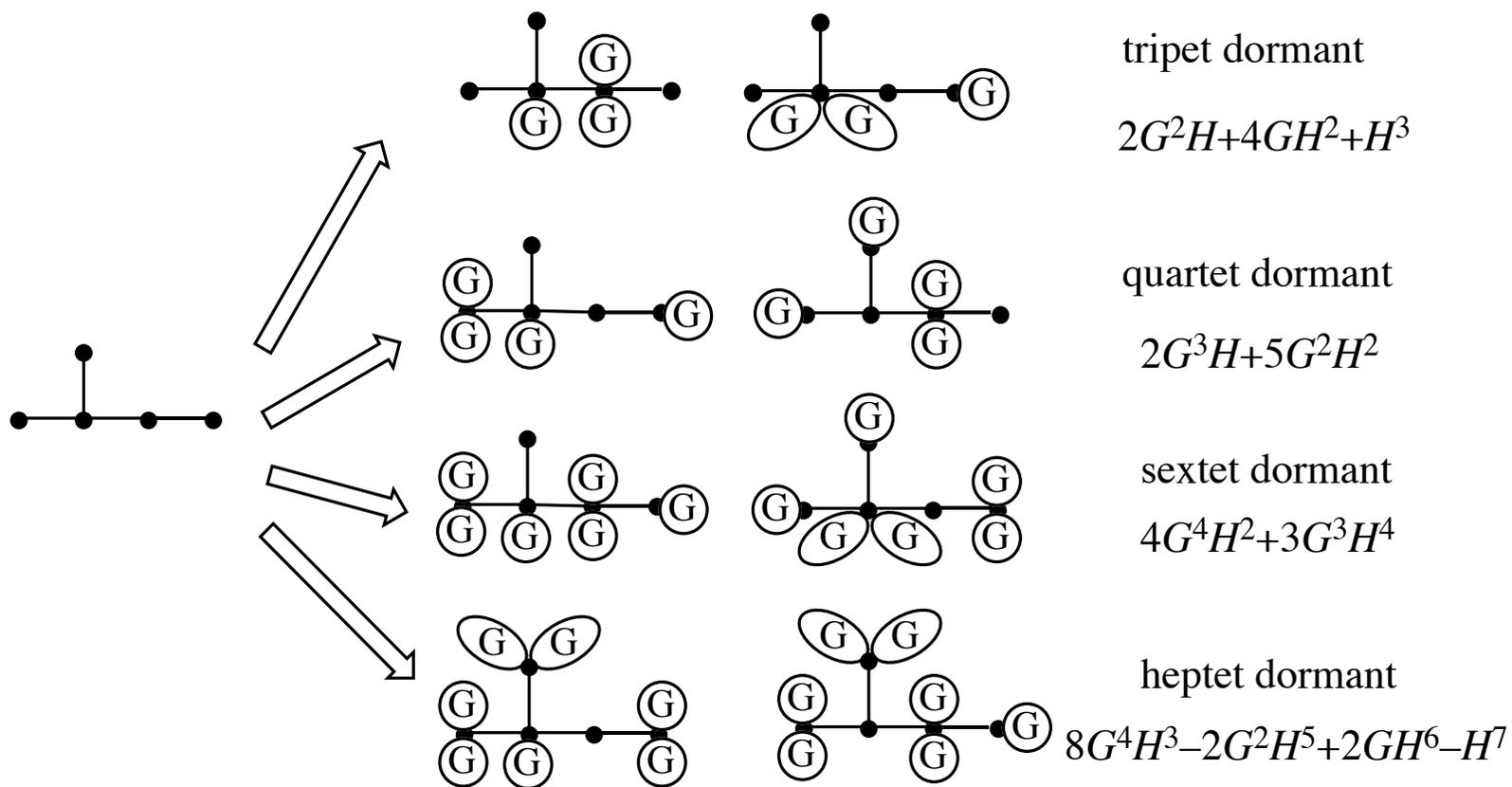
# Multiplet dormant の発見



~~Endospectral graph~~

更に

一つの dormant が何役もすることがある

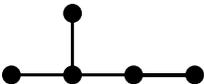
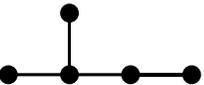
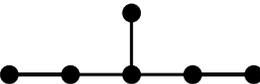
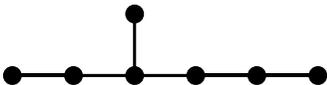


# Multiplet dormants の発見

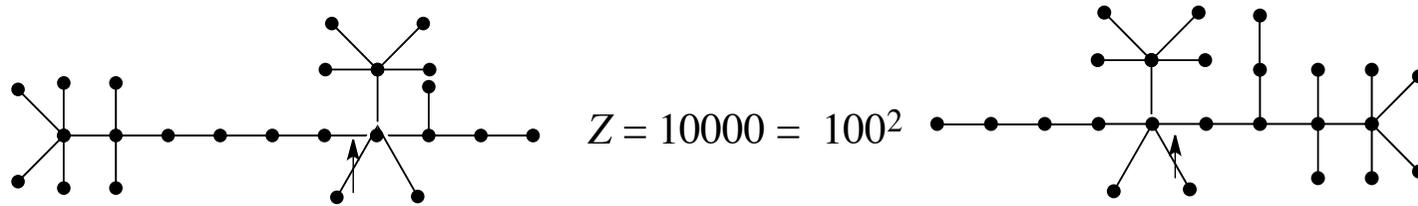
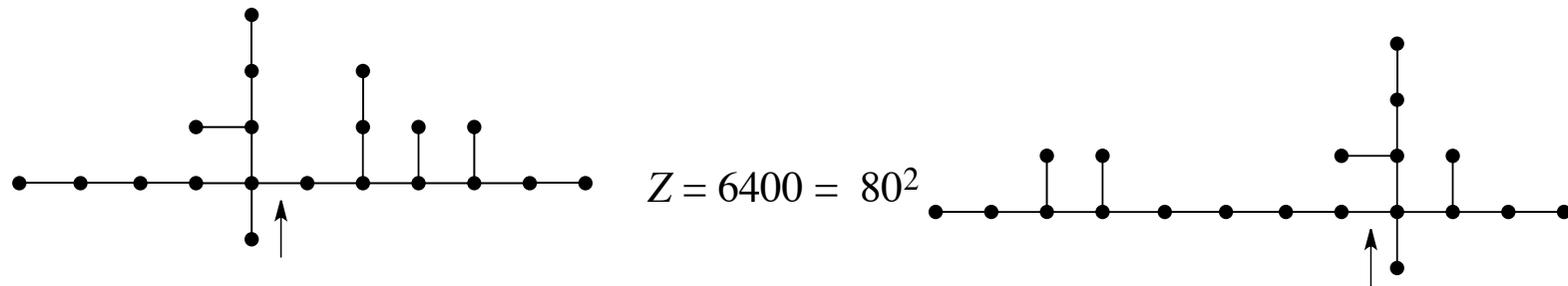
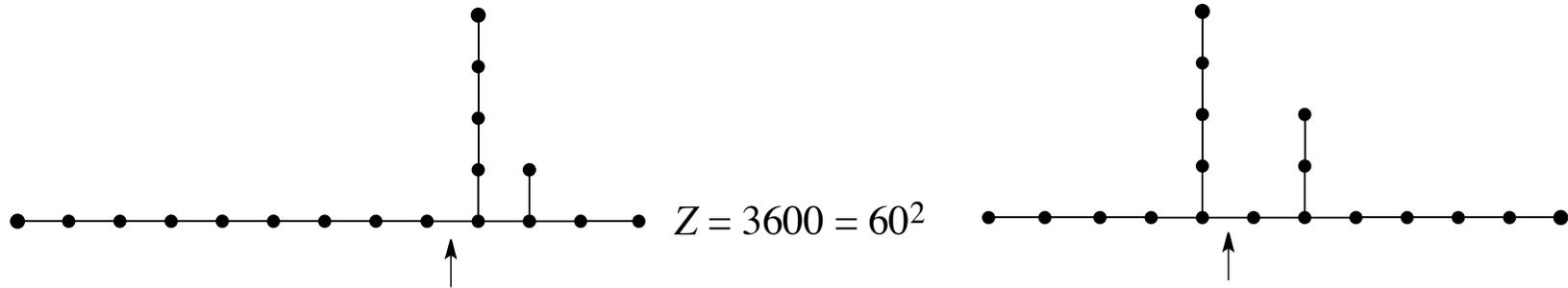
これまでに

30種以上の dormants と

延べ60種以上の multiplet dormants を発見

- 例)  $N=5$  (最小)  (3, 4, 6, 7)
- $N=6$   (3, 4, 4, 6, 8, 8, 9, 9)
- $N=7$   (3, 5, 7)
- $N=7$   (2, 2, 3, 4, 5, ?) 他2種 *etc.*
- $N=8$   (2, 3, 4, 4, 4, ?) 他5種
- その中に  (4) (最小の linear)

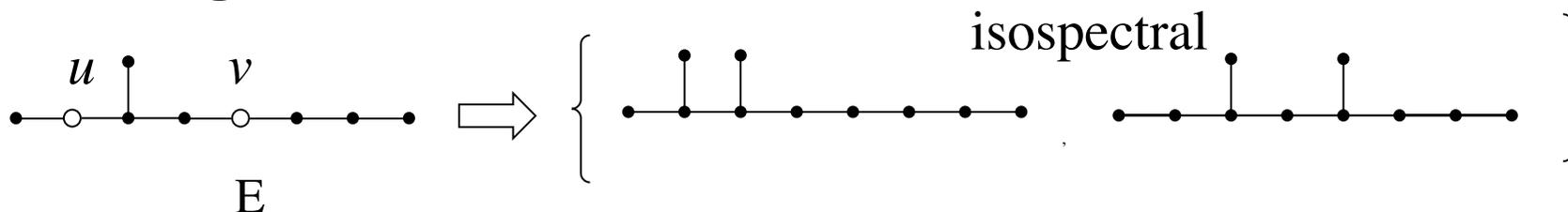
こんないたずらもできる



$$60^2 + 80^2 = 100^2$$

# Z-index の御利益

endospectral graph  
= **singlet dormant**



$E \ominus u$   $\Leftarrow$  pre-dormant  $\Rightarrow$   $E \ominus v$



$$Z(E \ominus u) = 1 \times 21 = 21 \quad = \quad Z(E \ominus v) = 3 \times 7 = 21$$

しかし残念ながら、これは必要十分条件ではないことが分った。

## Z-index の役割と限界

Z は dormant の発見や解析に  
steering role として使うが、

理論的裏付けの最終段階は  
Z-counting polynomial,  $Q_G(x)$ , に  
decisive role を与える。

それは、

$$Z_G = Q_G(1)$$

であるから。

しかし、dormant の発見によって

Isospectral tree graphs についての理論は

劇的に進んだ、と思っている。

未だ、海の物とも山の物とも分らないが、

興味のある人は、どうぞ。

非木グラフの問題は、

これから。

# マクロ不可逆的な熱移動時にあらわれるきれいな不等式について #1

A hot & cool inequality which appears on macro-irreversible heat transfer

2017.09.26

尾立貴志 古市茂\*2 堀部安一 細矢治夫 飯高茂 中川幸一\*7 中川義章 中村滋  
落海望\*9 岡本清美\*10 大塚秀幸\*11 大関清太 須鎗弘樹\*13 尾立貴志

Takashi Aurues, Shigeru Furuichi\*2, Yasuichi Horibe, Haruo Hosoya, Shigeru Iitaka,  
Kouichi Nakagawa\*7, Yoshiaki Nakagawa, Shigeru Nakamura, Nozomu Ochiumi\*9,  
Kiyomi Okamoto\*10, Hideyuki Otsuka\*11, Kiyota Ozeki, Hiroki Suyari\*13, Takashi Aurues

\*2 : 日本大学文理学部情報科学科 \*7 : 埼玉大学大学院理工学研究科 \*9 : 湘南工科大学工学部  
\*10 : 芝浦工業大学工学部 \*11 : 文教大学付属高等学校 \*13 : 千葉大学大学院融合科学研究科

## Abstract

Mixing two masses of water at different temperatures to discuss thermal energy transfer is very basic demonstration for junior high school students. Applying elementary concept of entropy in thermodynamics to the mixing hot and cold water experiment derives the following inequality.

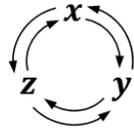
$$x > y > z > 0$$
$$x^z y^x z^y > x^y y^z z^x$$

It seems that physicists saw this inequality first in the middle of the nineteenth century, that is, after Rudolf Clausius made a presentation about the second law of thermodynamics and entropy (1854~1865). However, details are unknown.

Aurues shows how to derive the inequality physically, with some mathematical extension and proof by co-authors.

## はじめに Introduction

筆者のひとり（尾立）は、「原子核物理とフィボナッチ #2」の発表で用いる会場配布資料の準備中に、次の不等式を得ました。

$$x > y > z > 0$$
$$x^z y^x z^y > x^y y^z z^x$$


この不等式は、「水と湯を混ぜる」という中学理科の定番実験に、熱力学のごく初歩的考察を加えながら、高校の数学 III レベルの計算を行うことで導き出されました。何の特別な工夫を加え

#1 2017.08.25 日本フィボナッチ協会 第15回研究集会（協賛：東京理科大学理数教育研究センター）

本稿 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/Inequality20170825.pdf> [Link](#)

会場配布資料 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/MagicNumbers20170825.pdf> [Link](#)

#2 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/MagicNumbers20170926.pdf> [Link](#)

る必要もないので、高卒レベルなら誰でも簡単に導くことができます。不等式の導出過程そのものが、物理学的な証明になっています。

この不等式は、見た目がとても美しいので、「これはきっと有名な不等式に違いない。不等式の拡張や数学的にエレガントな証明は、数学者に頼ればすぐに片付くだろう」と思った尾立は、数学的証明を付けないまま配付資料の仕上げを急ぐことにしました。

しかし、「相談を受けた数学者らは誰もこの不等式を見たことがない」ということが、次第に明らかとなり、そうであるならば、この不等式の導出過程や証明などをまとめ、記録に残すのが良いであろうということになりました。

この不等式の初出など詳細は不明ですが、遅くとも、クラウジウスが熱力学第2法則やエントロピーについての発表を行った19世紀中旬以降には、エントロピー計算を行う物理学者や化学者によって気づかれていたのではないかと推測されます。熱力学第2法則という強力な物理法則に由来する不等式なので、将来、世界理解に役立つことになるかもしれません。

数学的には、指数・対数計算を用いた試行錯誤で（物理学的な意味は問わないで、単に、数式の対称性や巡回性の美しさを追求することのみで）この不等式を得ることが可能であり、16世紀末から始まる指数・対数の発展過程のどこかで得られていた可能性も無いわけではありませんが、史料的調査は今後の課題として残ります。

現代では、不等式に魅了された数学者が集まるインターネットのサイトに、証明問題として投稿された記録があります。

なお、この報告書は、研究集会の番外編のようなものですから、「[高校3年生ならば独力で不等式の導出を再現できるように](#)」丁寧に説明したいと思います<sup>#3</sup>。

## 内容目次 Contents :

1. 中学理科の実験 Mixing hot and cold water
2. 中学理科と同じような実験を気体で行う Contacting a hot air balloon with a cold air balloon
3. クラウジウスによるエントロピー変化の発見 Entropy change ( $\Delta S$ ) found by Rudolf Clausius
4. 中学理科の実験でエントロピー変化を計算する Calculation of entropy change for mixing water at two different temperatures
5. エレガントな数学的証明を求めて Mathematical extension and proof

---

<sup>#3</sup> この不等式の評価は、ポケモン GO のレイド・バトルのような協同作業となりました。そのため、様々な形で参加した研究者等の連名としました。しかし、物理学的な説明や編集の責任は尾立にあります。

1. 中学理科の実験 Mixing hot and cold water

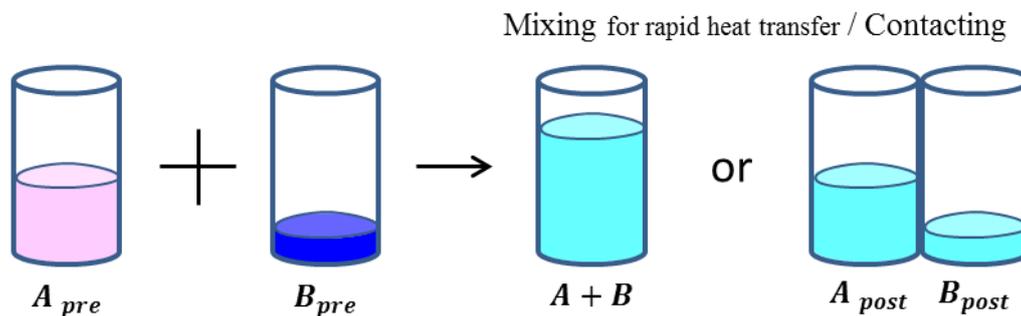


Fig.1.1 Mixing (Contacting of) hot and cold water

Table 1 Mixing (Contacting of) hot and cold water

Specific heat capacity : 1 cal/(g·°C)	$A_{pre}$	$B_{pre}$	$A + B$	$A_{post}$	$B_{post}$
Weight (g)	200	100	300	200	100
Temperature (°C)	40	10	30	30	30
Heat energy (cal) (zero calorie at 0°C)	$200 \times 40$ = 8000	$100 \times 10$ = 1000	$300 \times 30$ = 9000	$200 \times 30$ = 6000	$100 \times 30$ = 3000
Heat transfer (cal)				$pre - 2000$	$pre + 2000$
Conservation of energy		9000	9000		9000

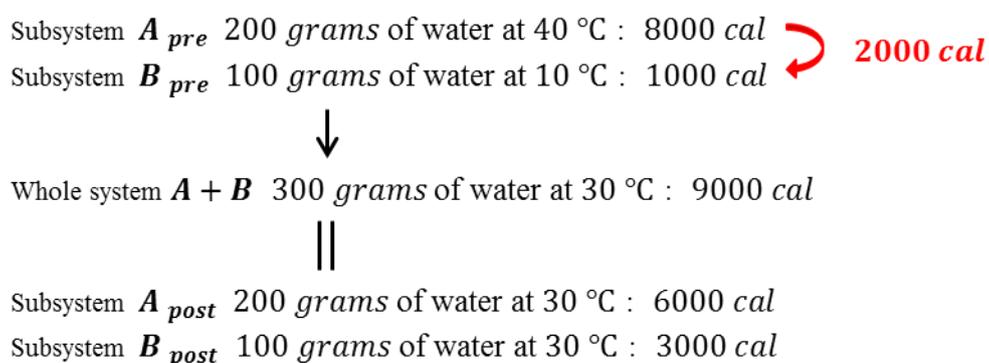


Fig.1.2 Mixing (Contacting of) hot and cold water

Fig.1.1 は、中学理科でよく行われる実験です。Table 1 は温度などの一例です。表よりも Fig.1.2 の方がわかりやすいかもしれません。異なる温度の水の接触では熱移動に時間を要します。その間に実験系の熱が外部環境に逃げてしまうので、通常は混合することにより熱移動を素早く行います。

物質は、固体でも液体でも気体と同じように、暖められたり冷やされたりして温度が変化すれ

ば、物体の圧力・体積・質量密度・比熱が変化します<sup>#4</sup>。中学理科のレベルでは、このような変化を扱いませんが、今後、エントロピーというものを導入するために、温度とは何か、熱とは何かといったことを少し詳しく見ておきます（高校レベル）。

「温度  $T$ 」は、物体を構成する原子や分子など粒子同士<sup>#5</sup>の運動や衝突の激しさ、また放射される熱線（電磁波）の強さを比較するための物差しです（示強性変数と呼ぶことがあります）。同じ温度の物体を合わせれば、質量や体積は増えますが、温度は変わりません。

「熱  $Q$ 」はエネルギーの一種であり、物体を構成する粒子集団が持つ運動エネルギーや電磁エネルギーのうち、「向きや大きさがバラバラなもの」をまとめて表したものです。バラバラで役立つのが難しい雑多なエネルギーの寄せ集めが熱です（熱エネルギー、熱量とも言います）。同じ温度の物体を合わせたとき、全体の熱エネルギーは合体前の熱量を合計したのになります（エネルギー保存則）。しかし、温度は変わりません。

「圧力  $P$ 」も、温度と同じように、物体を構成する粒子同士の運動や衝突の激しさなどの強さを比較するための物差しです。同じ温度・圧力の物体を二つ合わせると、熱エネルギーは合計したものになりますが、二つの物体の体積を保つのであれば、温度も圧力も変化しません。

温度と圧力が似ていて解かりにくいので、「温度  $T$  と圧力  $P$  の違い」をもう少し詳しく見ておきます。あとで、エントロピーとは何かを考えると、役に立ちます。

高校で教わる理想気体の状態方程式  $PV = RnT$  は、左辺も、右辺も、エネルギーの物理次元  $[ML^2T^{-2}]$  を持っています（注意：物理次元の  $T$  は時間であり、状態方程式の  $T$  は温度です。状態方程式の  $V$ ：体積、 $R$ ：比例定数、 $n$ ：モル数です）。状態方程式が示すエネルギーは、理想気体の圧力や体積に影響するエネルギーなので、理想気体が持つ熱量（熱エネルギー） $Q$  であると考えてよいでしょう。熱エネルギーを持っていない理想気体は、圧力も体積も、そして絶対温度も「0」になってしまうことをこの状態方程式は示しています。絶対温度 =  $0^\circ$  で、理想気体分子の持つ熱エネルギーの大きさも「0」になるように、状態方程式は作られているというだけのことです。あくまで架空の物質である理想気体での話なので、実気体の極限的な状態についての考察には使えません。

比例定数  $R$  は数値や物理単位を調整するためのものですから、ここでは外してしまい、理想気体の状態方程式を  $PV = nT = Q$  と単純化してみます。意味を考えるための単純化です。

そして、式を  $T = Q/n$  と変形すると、「温度  $T$ 」は、「物体を構成する粒子 1 個当たりの平

---

<sup>#4</sup> 「物質」は材質であり、「物体」は大きさや形で掌握できるものです。氷、水、水蒸気は、「物質としての水」の固体、液体、気体、つまり物体です。しかし厳格な区分は不可能であり、慣用に従って使い分けています。

<sup>#5</sup> 「粒子」という言葉で「硬いツブツブ」をイメージしても、ここでは問題ありません。物質を分解し、陽子や電子くらいの小ささになると、粒子としての性質と波としての性質を共に示すようになります。（電子のように飛び飛びのエネルギーを持つために）量子と呼ばれるようなものは「何らかの場が振動して一定のエネルギーを保っている」ために粒子としての性質を示しているのであり、量子の本質は波であるという考え方もあります。粒子とは一塊として移動する特殊な波動エネルギー体であると解釈しておけばよいでしょう。

均的な熱エネルギー」を意味しているらしい、ということがわかります。

また、式を  $P = Q/V$  と変形すれば、「圧力  $P$ 」は、「物体（粒子全体）が持つ熱エネルギーの空間的な密度」を意味しているらしい、ということがわかります。

解釈の参考 . . . . . 温度、圧力、体積はすべて熱エネルギーの指標です

$T = Q/n$  : 温度  $T$  は、粒子 1 個当たりの平均的な熱エネルギーを反映しているらしい。

$P = Q/V$  : 圧力  $P$  は、物体が持つ熱エネルギーの空間的な密度を反映しているらしい。

以上は、理想気体を極端に単純化して考えたわけですが、現実の気体だけでなく、液体や固体でも、似たようなことが言えます。

さて、話を戻します。物体に熱を加えて暖めると粒子の運動が激しくなり、衝突による粒子同士の反発が強くなり、圧力が大きくなります。その結果、物体の体積は増大します。

理科の実験でよく使われる赤液棒状温度計（いわゆるアルコール温度計）は、熱の流入による物体の体積増加を目盛で読み取れるような構造にしたものです（赤く着色したエタノールやトルエンなどの有機化合物を使っています）。

水も温度変化に伴い体積が変化しますが、水の熱膨張率はエタノールやトルエンの約  $1/3$  であり、中学理科のレベルでは、そのような変化は無視できるほど小さいと仮定します。

**比熱**（単位質量の物質の温度を 1 単位上げるのに必要な熱エネルギーのこと）と呼ばれるものも物質の温度によって値が変化しますが、中学理科のレベルでは、これも一定であると仮定します。

例えば水の比熱を、1 気圧下では  $0^{\circ}\text{C} \sim 100^{\circ}\text{C}$  の範囲で常に  $1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C})$  であると仮定します。元の水の温度が何度であっても、1 カロリーの熱エネルギーを加えれば、1 グラムの水の温度が  $1^{\circ}\text{C}$  上がるという意味です。そこで、 $200 \text{ g } 40^{\circ}\text{C}$  の水は、 $200 \text{ g } 0^{\circ}\text{C}$  の水と比べて、 $1 \times 200 \times (40 - 0) = 8000 \text{ cal}$  だけ多くの熱エネルギーを持っていると計算します。

このように単純化すると、異なる温度の水を混ぜる実験は、エネルギーの保存性を目で確認できる良い実験となります。Table 1 では、 $0^{\circ}\text{C}$  を基準にして熱エネルギーの大きさを計算しています。

中学理科のレベルでは、主に液体を使って、温度変化に伴う体積の変化、圧力の変化、比熱の変化などは無視できるほど小さいという仮定の下で物質の状態変化を学習します。

さて、次の気体の話を省略してクラウジウスのエントロピーを導入することも可能です。なぜならば、エントロピーは「温度  $T$  と熱量  $Q$ 」で決まるからであり、また液体を使おうが、気体を使おうが、エントロピーの導入はクラウジウスの努力によって得られた発見に依らざるをえず、その部分は天下りの説明になるからです。

## 2. 中学理科と同じような実験を気体で行う Contacting a hot air balloon with a cold air balloon

気体において熱移動が起こったときの変化について説明する目的は、「物質世界に起こる多種多様な変化を担っているどのようなエネルギーも、最終的には熱エネルギーに変わっていく」ということを理解していただくことです。

銀河の形成と消滅、台風の発生と消滅、生命の誕生と死、文明の出現と滅亡などは、物質世界で自発的に進んでいる現象です。こうした自然現象でみられるものは、光エネルギーや電気エネルギー、運動エネルギー、位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）といった様々な種類のエネルギーが、最終的には熱エネルギーに変化していく過程において出現している一時的な構造です。

ここでは気体を使って、「仕事エネルギーが熱エネルギーに変わっていく」様子を説明しますが、気体を使った実験を説明する前に、「仕事とは何か、熱とは何か」について先に説明しておきます。

傾きのない道路に大きな岩があり、男が岩を押して動かしているとします (Fig.2.1.1)。岩と路面の間には摩擦があり、岩の進行と反対向きに抵抗が生じているので、男が押す力を緩めると岩は減速して停止してしまいます。そこで、男は力を入れ、押し続けることによって、岩を動かし続けることができます。

こういう昔ながらの「ちから仕事」を、物理学では「**仕事  $W$** 」と呼んでおり、仕事の大きさを **力×移動距離** で評価しています。**力×移動距離** はエネルギーの物理単位を持っており、仕事エネルギーと呼ぶこともあります。これから仕事をする能力としてのエネルギーではなく、「今、仕事をしている、仕事として使われているエネルギー、あるいは仕事に使われたエネルギー」のことであると理解しておいて良いと思われます。仕事エネルギーは、電気エネルギーや熱エネルギーのように、蓄えるということとはできません。 #6

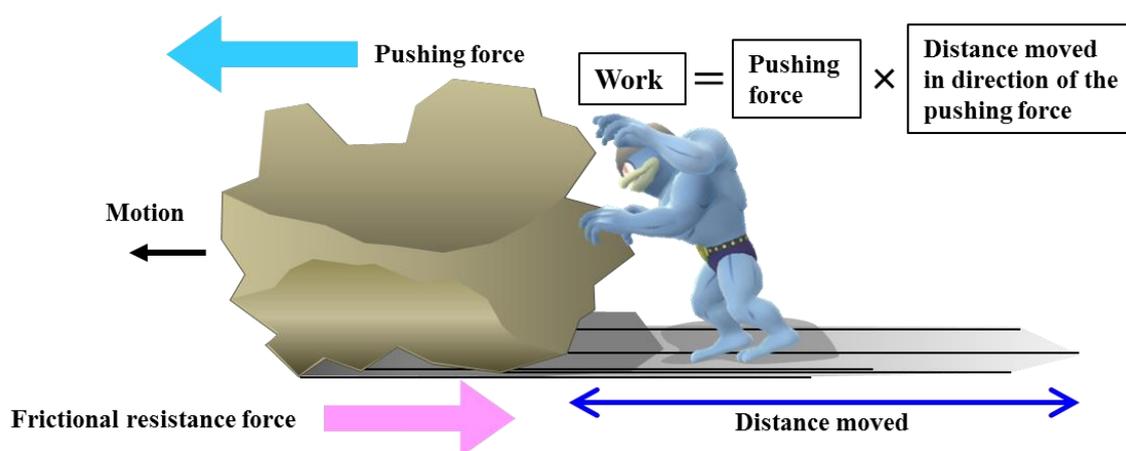


Fig.2.1.1 Work

#6 「仕事が溜まる」とは、仕事としてやるべき課題が溜まるという意味であり、「蓄電」や「蓄熱」に相当する意味ではありません。

直感的に理解できることですが、10 kg の岩より 20 kg の岩を動かす方が大きな力を必要とします。20 kg の岩を 30 m 動かすときは、10 kg の岩を 10 m 動かすときの 6 倍のエネルギーを消費します。そして、男が岩に投入した仕事エネルギー  $W$  は、すべて岩と道路の間で摩擦熱（熱エネルギー  $Q$ ）に変わり、岩の下面や通り過ぎた道路面は熱くなります。

このことから、仕事と熱の違いを原子レベルの大きさに描くと Fig.2.1.2 のようになります。仕事は、物体移動（図の movement）の向きや大きさがそろっていますが、熱では、向きや大きさがバラバラです。向きのそろった運動エネルギーが仕事であり、仕事は役に立ちますが、熱は運動の向きがバラバラで、役に立ちません。生物社会でも、組織力を発揮できない「烏合の衆」は大きな仕事を成し遂げることができません (Fig.2.1.3)。レベルは異なりますが、全く同じ物理的意味を持っています。粒子 1 個 1 個の動きで見ると、熱も「小さな仕事」の集まりです。しかし、向きや大きさがバラバラなので「大きな仕事」はできない状態にあると言えます。

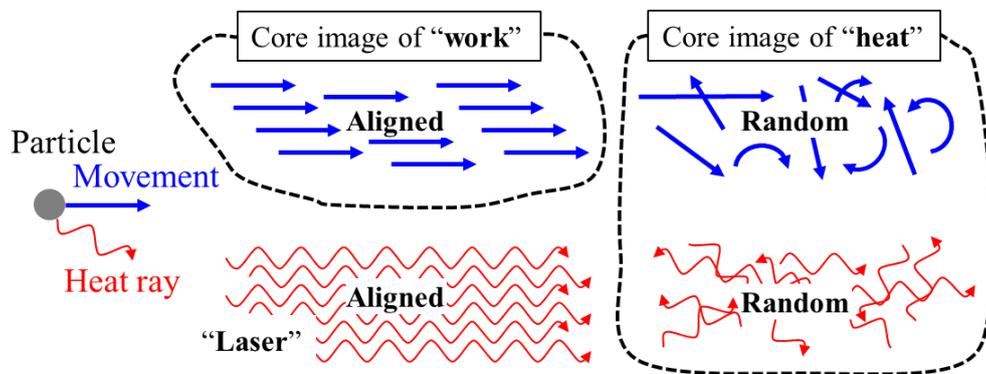


Fig.2.1.2 Difference between work and heat

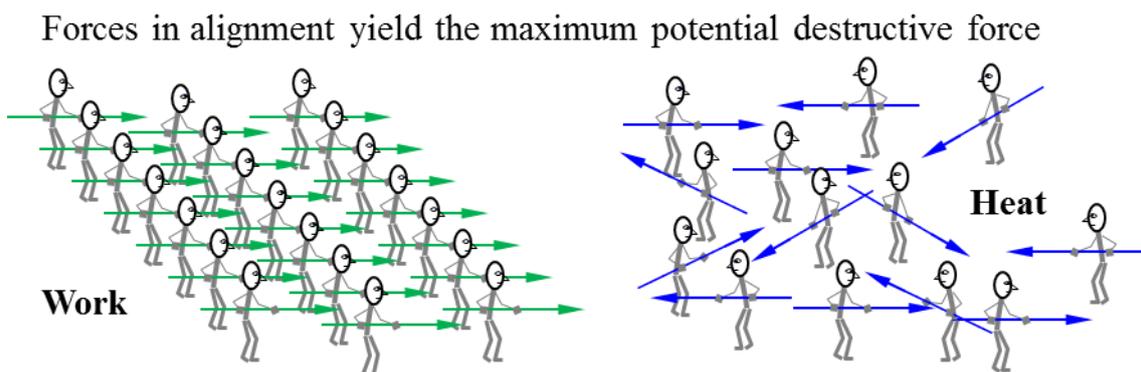


Fig.2.1.3 Work is useful, but heat is useless

また、原子などの粒子は動きの激しさに応じて電磁波（熱線；heat ray）を放射しています。熱線は向きや大きさがバラバラです。粒子の向きや大きさがバラバラの運動エネルギーと、向きや周波数などがバラバラの熱線が持つ電磁エネルギーをまとめて熱エネルギーとしています。電磁エネルギーは運動エネルギーの大きさと相関するので図示を省略することが多いです。

なお、電磁波の向きや周波数などをそろえたものがレーザー（Laser）です。レーザーを仕事エネルギーとは呼びませんが、電磁波もそろえると役に立つところが仕事と似ています。

「仕事は役に立ちますが、熱は役に立ちません」と言われると、「熱だって寒いときに体を温めたり、鉄を溶かして加工できるようにしたり、役に立っているではないか」と考えるのが普通です。しかし、そのようなときに役立っているのは熱ではなく、実際には仕事なのだと説明しておきます。

Fig.2.1.4 は粒子の移動と熱線を併せて図示したものです。「飛んでいる石」を構成している粒子の運動を2種に分けて示しています。ひとつは、全粒子に共通である「同じ向きに同じ速さで飛ぶ」という運動です。この運動エネルギーが石の持っている仕事エネルギーです。石の動きを止めようとする空気の摩擦力に対抗して仕事をしています。もうひとつは、石が持っている熱を構成するバラバラな向きと大きさの運動です。このバラバラな運動エネルギーと熱線の電磁エネルギーを合わせたものが石の熱エネルギーです。

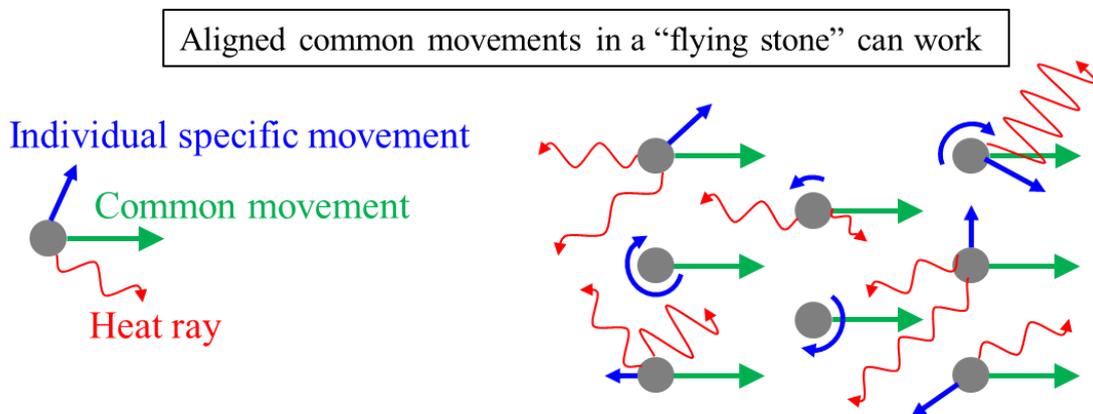


Fig.2.1.4 A flying stone has aligned kinetic energy (work) and thermal energy (heat)

Fig.2.1.5 は、「熱エネルギーは役に立たないが、熱転移  $\Delta Q$  は役に立つ」ということを図示しています。

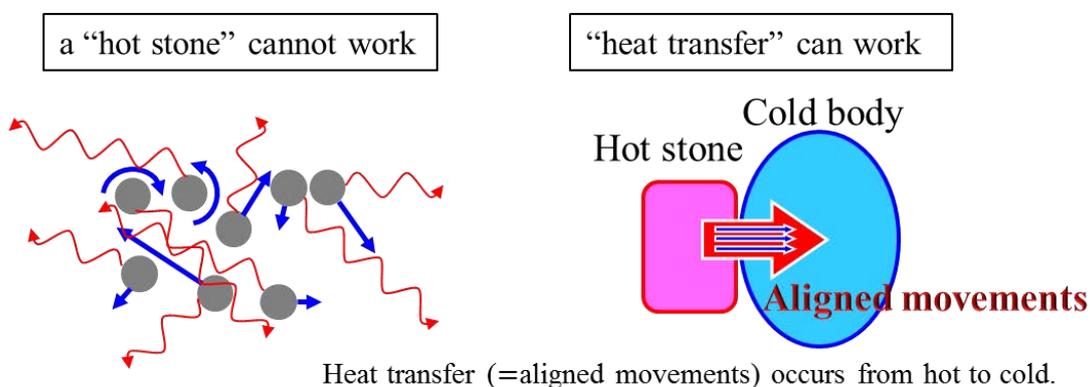


Fig.2.1.5 Difference between work and heat

高温の物体が低温の物体に接すると、高温側から低温側に向かう熱の移動が始まります。温度差で出現するこのような熱転移では粒子の運動の向きがそろって、つまり仕事エネルギーに転じると考えることができます（向きがそろった理由は、量子力学でないと説明できないと思われます）。「熱転移は熱エネルギーではなく、仕事エネルギーなので役に立つ」のです。

高温の物体は大きな熱エネルギーを持っていますが、それ自身では何の役にも立ちません。低温の物体と接したときだけ、熱エネルギーの一部が仕事エネルギーに転じ、役に立つことができます。熱エネルギーのまま（等温のまま）では何の役にも立たないのです。

Fig.2.1.6 は、高温の物体（水）と低温の物体（水）との接触面で、熱エネルギーが仕事エネルギーに転じる様子を描いています。図では、粒子の運動を波であると考えています。高温側では大きくバラバラに波打っています。低温側では小さくバラバラに波打っています。バラバラの波は熱エネルギーを表しています。

この図では、水面の高さは高温側も低温側も同じ（等圧）であるとして描いています。高温物体と低温物体の接触により断熱性の境界が無くなると、高温側の大きな波が低温側に漏れ出てきます。水面の高さは同じなので水そのものが勢いよく流れ込んでくるわけではありません。この高温側から低温側に向かう波の移動は、同じ向きの動きなので熱エネルギーではなく仕事エネルギーです。

Fig.2.1.6 は、等圧で、温度差がある場合を描いていますが、Fig.2.1.9 は、等温で、圧力差がある場合を描いています。したがって、高温・高圧と低温・低圧の場合に起こることは、ふたつの絵を重ね合わせた様子を思い描けばよいでしょう。

熱転移は、仕事なのでいろいろな作用を及ぼします。熱いものに触れてできる火傷（やけど）と冷たい物に触れてできる凍傷は、どちらも同じような皮膚や皮下組織の破壊状態に陥ります。いずれも熱転移という共通の原因による物理的破壊なので、受けるダメージが似ていて当然なのです。

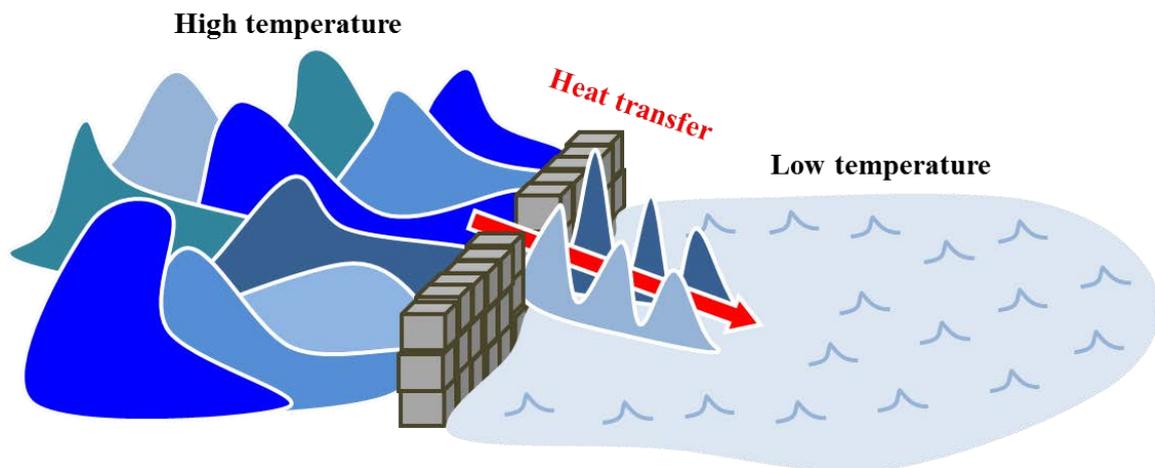
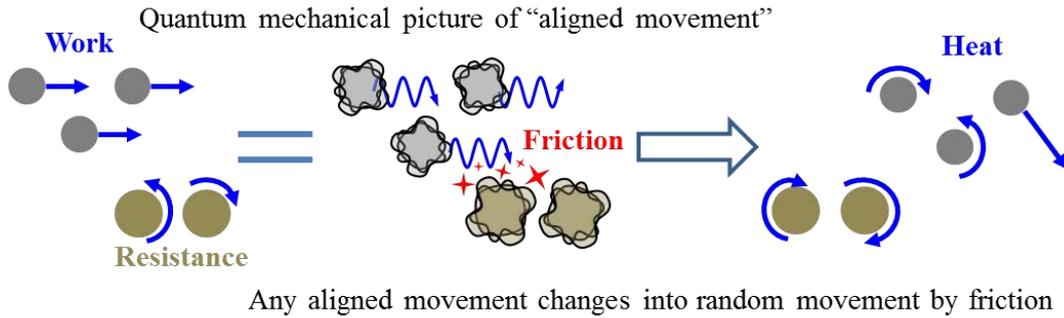


Fig.2.1.6 Heat transfer is not heat but work

Fig.2.1.7 は、粒子の真っ直ぐな運動として描かれる運動も、量子力学的に見れば波のような運動であり、したがって（他の物体との距離が離れていて直接摩擦していないように見えても）外部との摩擦を避けることはできず、向きや大きさがバラバラな運動、つまり熱に変化していくことを図示しています（まったく摩擦のない真空中を等速直線運動している物体が、その内部摩擦のために仕事エネルギーが熱エネルギーに変わるという話ではありません）。

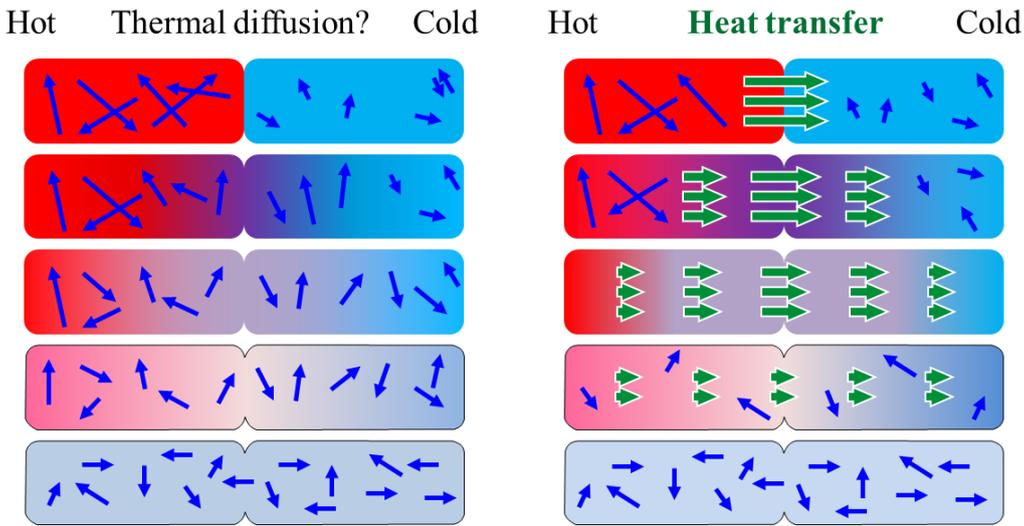


Any aligned movement changes into random movement by friction

**Fig.2.1.7 All work change to heat by friction**

Fig.2.1.8 は、高温の鉄棒と低温の鉄棒を接触させたときに起こる熱転移の様子を示しています。熱線や回転運動などは省略しています。

向きがバラバラの粒子運動（熱）が、そのまま高温部から低温部に拡がっていくイメージ（左側の図）よりも、温度差ができた場所で熱転移という仕事エネルギーが生じ。エネルギーが移動して温度が平均化していくイメージ（右側の図）の方が、理にかなっていると考えられます。



**Fig.2.1.8 Heat transfer from hot to cold iron bar**

高温部と低温部の接触面は、最初に最大の温度差があり、接触により低温側に向かう大きなエネルギーの移動が起こります。熱転移の始まりです。エネルギー移動の向きはそろっており、こ

れは仕事エネルギーです。熱した鉄板に水を掛けると、水が弾け飛んだり、鉄板がひび割れたりすることがありますが、こうした変化は肉眼的に確認できる「仕事」です。

熱転移が進むにしたがって、接触面以外の広い範囲で温度差が生じるようになります。温度差の生じた部分では高温から低温に向かうエネルギーの移動（熱転移＝仕事）が起こります。あらゆる熱転移は摩擦によって熱エネルギーに変わり、鉄棒内の温度分布が平均化していきます。

以上、仕事と熱の違いを説明してきました。

温度と同じようなことが圧力についても言えます。高い圧力そのものは役に立ちません。圧力は、「物体（を構成する粒子全体）が持つ熱エネルギーの空間的な密度」を反映しています。粒子があらゆる向きに、つまりバラバラな向きにぶつかってくるのが圧力です。しかし、高圧の物体（流体）と低圧の物体（流体）が接することにより、高圧側から低圧側に向かう多数の粒子の移動が起こると、熱エネルギーが仕事エネルギーに転じて役に立ちます。

Fig.2.1.9 は、高圧の物体（水）と低圧の物体（水）との接触面で、熱エネルギーが仕事エネルギーに転じる様子を描いています。温度は同じである（波の高さは同じである）と仮定し、水面の高さで圧力の高さを示しています。高圧側から低圧側に水が噴き出てきます。「熱転移は熱ではなく、仕事である」と言われてもピンとこないでしょうが、圧力差によって生じる水流が仕事であるということは、この水流を利用するのが水力発電所なので、とても理解しやすいと思われます。温度差で生じる熱の移動も、圧力差で生じる物体の流れも、本質的には「熱転移  $\Delta Q$  」という仕事です。Fig.2.1.6 と Fig.2.1.9 において、温度と圧力を別々に描きましたが、通常は、高温・高圧が同時に起こります。

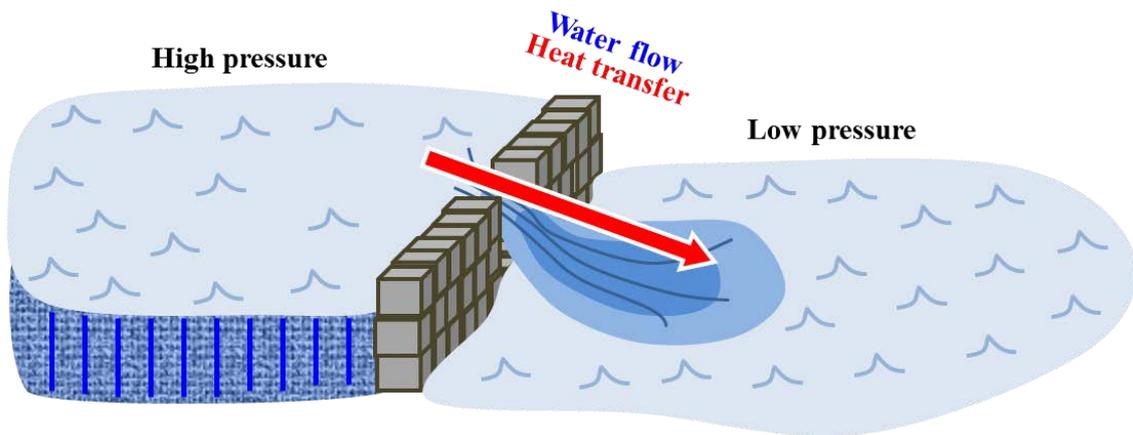


Fig.2.1.9 Flow is work

温度も圧力も、ともに熱エネルギーに関する指標です。しかし温度に比べて圧力の方が、仕事という言葉との親和性が高いように感じられます。

それは、圧力の場合、例えば「爆発でブツ飛ぶ」といったように、圧力を受けた物体のマクロな運動という形で日常的に確認しやすいからです。温度の場合は、接触面など温度差のあるとこ

ろで、繰り返し、繰り返し、マイクロの小さなジャブを打ち続けるような形の顕微鏡的な仕事になるため、肉眼的には確認し難く、圧力と比べると仕事との親和性が悪くなるのだろうと考えられます。この親和性の悪さは、仕事の大きさを「力×移動距離」で評価することから来ています。温度差のあるところでは目に見えない小さな「力×移動距離」が無数に存在していると考えようによいでしょう。小さく移動するとすぐに仕事エネルギーが熱エネルギーに変わり、ジャブで揺らした粒子が戻ってくるので肉眼的な物体の移動は起こらないのです。

「仕事と熱の違い」は、後でエントロピーとは何かを理解するときに役立ちます。

では、気体を使って中学理科と同じような実験をやってみましょう。

Fig.2.2.1 は実験の準備を示しています。同じ温度・同じ量の空気を入れた風船2個( A と B ) を断熱的で変形しない筒の中に入れます。はじめ、2 個の風船は等温・等圧であり、両者の間には断熱性の仕切りが固定されているものとします。このあと、風船 A を加熱すると、熱エネルギーの増大により風船 A の空気は高温・高圧になります。風船 B は変化していないので、風船 A と比べると、低温・低圧の状態が維持されます。

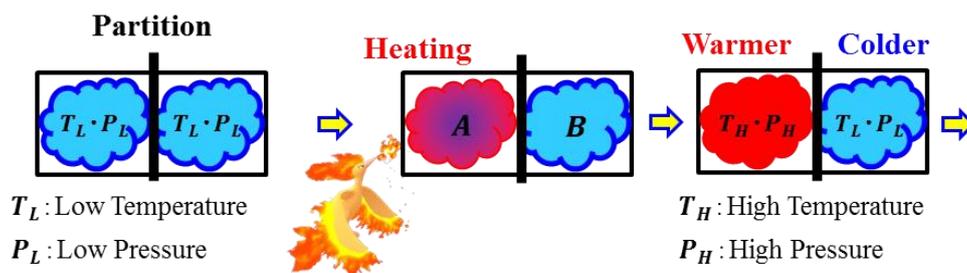


Fig.2.2.1 Preparing hot and cold air balloons in a fixed-size space

Fig.2.2.2 は、仕切りを取り除いた後に起こることを示しています。何が起こるかは、誰でも直感的に理解できることです。高圧の風船 A は膨張して低圧の風船 B を圧迫します。「風船 A の膨張」=「風船 B の圧縮」は、仕事(圧力差によって起こる熱転移)です。この仕事エネルギーの分だけ風船 A の熱エネルギーは減り、風船 B の熱エネルギーは増えます。

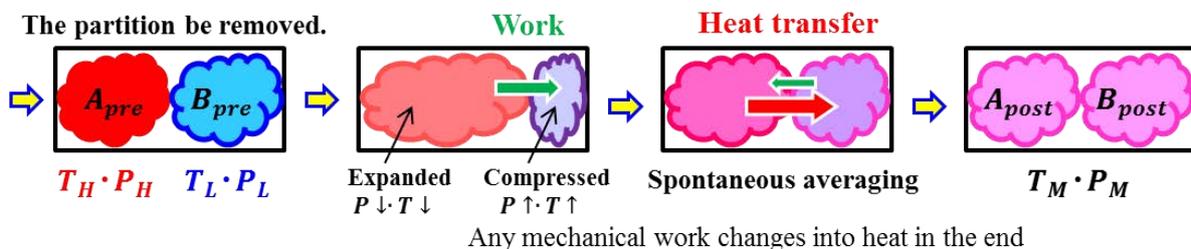


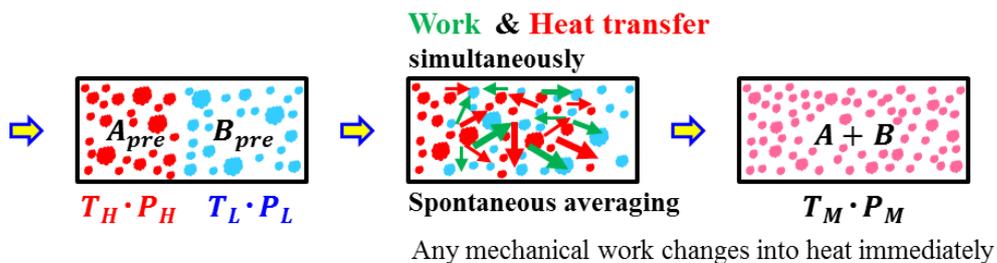
Fig.2.2.2 Contacting of hot and cold air balloons in a fixed-size space

同時に、高温の風船 A から低温の風船 B に向かって温度差によって起こる熱転移が始まりま

す。この熱転移（仕事エネルギー）の分だけ風船  $A$  の熱エネルギーは減り、風船  $B$  の熱エネルギーは増えます。温度差による熱転移は、圧力差による熱転移より緩徐に進むことが多いと思われれます。

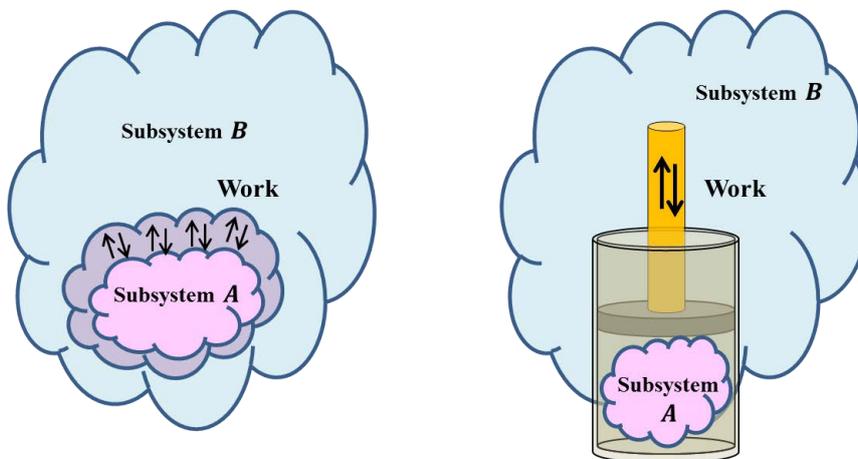
圧力差による熱転移（＝仕事）と温度差による熱転移（＝仕事）の進行に時間差があるため、風船  $A$  と風船  $B$  の大きさは図のような順で変化します。最初、高圧を受けて小さく圧縮された風船  $B$  は、逆に風船  $A$  を押し返して行きます。最終的には、風船  $A$  も風船  $B$  も、同じ圧力・温度となって大きさの変化は止まります。温度や圧力の平均化に向かうこれらの変化は、放置していても自発的に勝手に進む変化です。図では色分けしていますが、heat transfer も本質的には work です。

もし圧力差による熱転移と温度差による熱転移の進行に時間差が無ければ、風船の大きさは変化すること無く、一気に等温・等圧化が進むでしょう。Fig.2.2.3 は、高温高圧と低温低圧の空気を混合した場合を示しています。Fig.2.2.3 は、お湯と水を混ぜる中学理科の実験と同じことを空気でやっているだけのことなので、中で何が起こるかは直感的に理解できると思います。



**Fig.2.2.3** Mixing hot and cold air in a fixed-size space

一般的な熱力学の入門書では、Fig.2.3 のようなシステムで説明が行われます。



**Fig.2.3** System used to describe thermodynamics

小系 **A** としてシリンダー内の理想気体を想定し、小系 **B** としては周りの大気全体を想定します。シリンダーを暖めたり冷やしたりすることができます。ピストンは自由に動けるようにしたり、固定したりできます。外部からの力でピストンを押ししたり引いたりできます。ピストンを外に押し出したり、中に押し戻したりする動きで、仕事を肉眼的に捉えることができるようにしています。

クラウジウスは、このようなシステムで得られたデータの分析からエントロピーを発見しましたが、エントロピーの導入説明は、お湯と水を混ぜるという中学理科レベルの実験でも十分可能です。

### 3. クラウジウスによるエントロピー変化の発見 Entropy change ( $\Delta S$ ) found by Rudolf Clausius

Fig.3.1.1 は、Fig.2.2.2 の実験の途中経過を省いて「Before & After」のみを描いたものです。高温・高圧の物体と低温・低圧の物体を接触させると、両物質系の内部で熱転移によるどのような現象が生じようとも、最終的に等温になることは日常的に経験することです。その逆に、等温の物体を環境から隔離された状態で放置していたら、勝手に高温と低温とに分かれてしまったというようなことは、まず起こりえません。

変化の進む向きが一方向的で、逆向きは起こらないことを「不可逆的」と呼びます。このような不可逆性は確率的な性質であり、逆向きに起こらない可能性が絶対的な意味で「0」ということではありません。

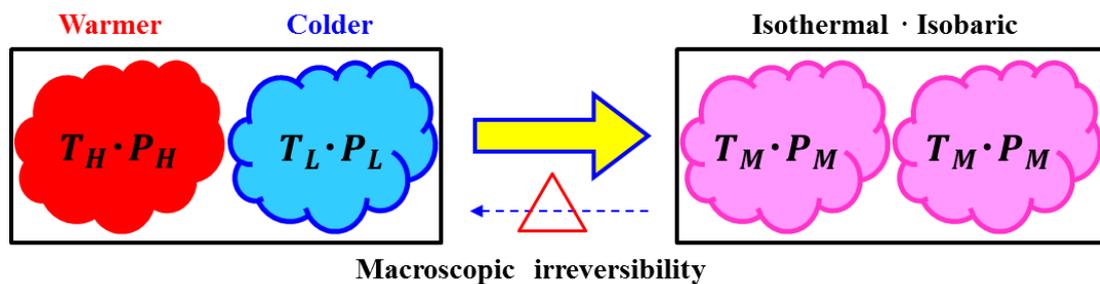


Fig.3.1.1 Before & After of temperature difference

温度差や圧力差のあるところで仕事（熱転移）が発生します。この仕事によって物質系の内部構造が変化します。私たちが森羅万象と呼んでいる世界の変化の多くは、このような仕事エネルギーによる構造変化です。「物質系の内部で熱転移によるどのような現象が生じようとも」とは、どのような仕事が起こり、どのような構造変化が生じたとしても、仕事エネルギーは最終的に熱エネルギーになるので、その物質系の「熱的な Before & After」は同じであるということを主張しています。「熱的な After」では、系の中は熱エネルギーが均等に分布し、温度差が無くなり、マクロ不可逆的な構造変化は途絶えてしまいます。

そのため、「熱的な After」の世界は Heat death（熱的死）とも呼ばれます。

したがって、「熱的な Before & After」だけを対象として考える場合、仕事のことは考慮する必要がなくなりますので、圧力の変化を省略すると Fig.3.1.2 のように描くことができます。なお、移動する熱量の大きさを  $\Delta Q > 0$  とし、正負の符号  $\pm$  で移動の向きを示しています。

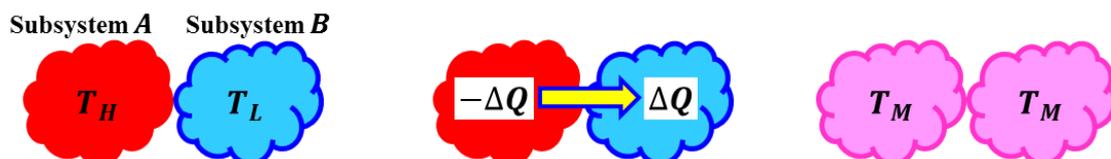


Fig.3.1.2 Before & After of temperature difference

熱力学者のクラウジウス (Rudolf Clausius) は、19 世紀中旬、次のようなことを考えました。

物質系には、熱量と温度で決まる「**エントロピー  $S$** 」という状態量があると考えられる。ある温度  $T_*$  のとき、系に熱量  $\Delta Q$  を与えると、系のエントロピーは  $\Delta S = (\Delta Q/T_*)$  だけ増える (式 3.1)。

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_*} \quad \dots \dots \text{(式 3.1)}$$

例えば、 $100\text{g} \cdot 10^\circ\text{C}$  の水が持つエントロピーの絶対量は不明であるけれど、 $10^\circ\text{C} \rightarrow 30^\circ\text{C}$  の温度変化時に要した加熱量のデータを用いれば、 $100\text{g} \cdot 10^\circ\text{C}$  の水から  $100\text{g} \cdot 30^\circ\text{C}$  の水へ変化したときのエントロピー変化は計算できるという意味です。

式 3.1 を見れば、水の比熱を一定と仮定した場合、 $100\text{g} \cdot 10^\circ\text{C}$  の水を  $11^\circ\text{C}$  にしたときのエントロピー変化より、 $100\text{g} \cdot 11^\circ\text{C}$  の水を  $12^\circ\text{C}$  にしたときのエントロピー変化は小さいということが推測できます (分母が大きくなるので)。温度変化に応じてエントロピー変化の度合いが異なるので、温度変化が大きい時は積分で計算する必要のあることがわかります。

ここで、計算が楽になるという便宜的理由で、**エントロピーの加法性** (系  $A$  のエントロピーと系  $B$  のエントロピーを加えると、系  $(A+B)$  のエントロピーになるということ) を仮定し、また (積分計算を避けるために) 最初の温度差があまり大きくない、あるいは系  $A$  と系  $B$  の温度が変化しない程度に熱量移動量  $\Delta Q$  が十分に小さい場合を考えて、Fig.3.1.2 の系全体のエントロピー変化を計算してみましょう。

加法性が仮定されており、系全体のエントロピー変化  $\Delta S_{\text{system}}$  は、小系  $A$  のエントロピー変化  $\Delta S_A$  と小系  $B$  のエントロピー変化  $\Delta S_B$  との合計となるので：

$$\Delta S_{\text{system}} = \frac{-\Delta Q}{T_H} + \frac{\Delta Q}{T_L} = \frac{(T_H - T_L)\Delta Q}{T_H T_L} > 0 \quad \dots \dots \text{(式 3.2)}$$

この式 3.2 は、どのような温度でも成立します。そこで、次のようなことが言えます。

物質系は (つまりエネルギーは)、エントロピー *entropy* という状態量を持っています。熱は常に高温から低温に向かって移動すること (=マクロ不可逆性) から推測できることですが、系の中で、ある小系から別の小系に何らかのエネルギー移動があるとき、系全体のエントロピーは必ず増大します。系全体のエントロピーが増大するような向きの変化は、系の中で勝手に進みます。閉じた系の中で、自発的な変化 (不可逆的な変化) が進むとき、系のエントロピーは増大し続け、その間は常に  $\Delta S > 0$  となります。……これを **熱力学第2法則** と呼びます。

系が「熱的な After」に到達すると、系のエントロピーは極大値となり、マクロ不可逆性は消失します。 $\Delta S > 0$  になったり  $\Delta S < 0$  になったりしながら、全体としては  $\Delta S = 0$  を保ちます。

ここで、エントロピーとは何か、いったい何を表しているのかを考えてみましょう。

先に、理想気体の状態方程式を  $PV = nT = Q$  と単純化して、 $T = Q/n$  と変形し、「温度  $T$ 」は、「物体を構成する粒子 1 個当たりの平均的な熱エネルギー」を意味しているらしい、ということ推測しました（注：解釈の参考にするための単純化なので計算には使えません）。

同じようにして、エントロピー変化の式を変形して考えることにしましょう。

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_*} = \frac{n\Delta T_*}{T_*} = \frac{\Delta T_*}{T_*} n \quad \dots \dots \text{(式 3.3)} \quad \boxed{\text{解釈の参考}}$$

解釈の参考とするために作ったこの式から、エントロピー変化は「変化が起こったときの温度」、「温度変化」、「粒子の個数（モル数  $n$ ）」に関係しているらしいということがわかります。

通常温度変化の範囲内では、粒子の個数は変化しませんが、式 3.3 は粒子の個数を温度に応じて変化させています。温度とは「粒子 1 個当たりの平均的な熱エネルギー」の指標です。そして熱エネルギーとは「粒子のバラバラな向きの運動」を反映したエネルギーです。式 3.3 は、粒子のバラバラな向きの運動が激しくなるほどエントロピーは大きくなるということの意味しています。エントロピーは粒子そのものの個数ではなく、何か別のものの個数であるようです。

参考までに、式 3.3 を  $dS = n \times (dT/T)$ 、 $\Delta S = \int dS$  として、温度変化  $T_1 \rightarrow T_2$  の範囲で積分すると

$$\int_{T_1}^{T_2} dS = n \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT, \quad S_{T_2} - S_{T_1} = n\{\log T_2 - \log T_1\} = n \log(T_2/T_1)$$

$$\Delta S_{(T_1 \rightarrow T_2)} = n \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad \dots \dots \text{(式 3.4)} \quad \boxed{\text{解釈の参考}}$$

となります。任意の温度でこの式が成立するのは、 $S_T = n \log T$  の場合であり、やはりエントロピーは「粒子数と温度」で決まるらしいということが確かめられます。

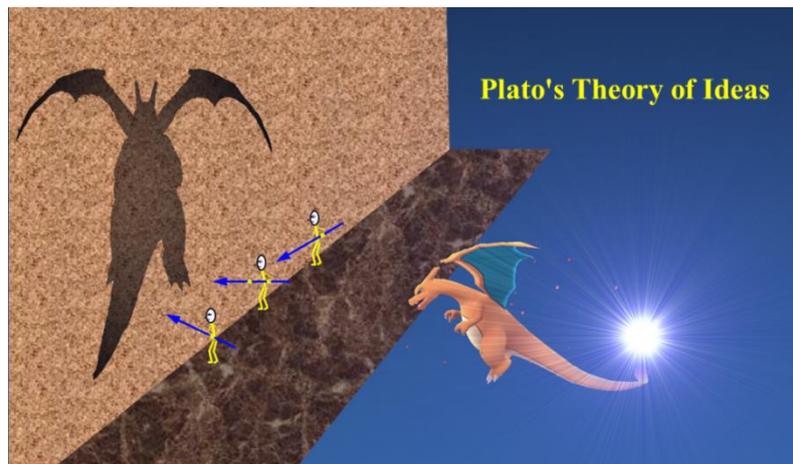
$$S_T = n \log T \quad \dots \dots \text{(式 3.5)} \quad \boxed{\text{解釈の参考}}$$

温度  $T$  が「粒子 1 個当たりの平均的な熱エネルギー」の指標ならば、「粒子数×温度」＝「全熱エネルギー」ということとなります。エネルギーの物理次元は  $[ML^2T^{-2}]$ （注意：物理次元の  $T$  は時間）です。温度  $T$  の物理次元は  $[ML^2T^{-2}N^{-1}]$  なので、エントロピー、つまり「粒子数×温度」の物理次元は、エネルギーの物理次元  $[ML^2T^{-2}]$  となります。

しかし、エントロピーはエネルギーそのものではありません。エントロピーについては、いろいろな解釈がありますが、ここでは「エネルギーの影説」に沿って説明していきます。

この解釈のルーツは、古代ギリシャの哲学者プラトンがイデア論を説明するために考えた「洞窟の比喩 Allegory of the Cave」です（Fig.3.2.1）。人間の普通の感覚によっては捉えることのできない真の実在をイデアと呼びます。イデアを直接見ることのできない人間は、洞窟の中で壁に映

ったアイデアの影を見えています。そして、いつも影しか見てないので、影を实在だと誤解して世界観を形成していきます。



**Fig.3.2.1 Plato's allegory of the Cave**

影はあくまで影であって、真の实在ではありませんが、普通の人間は、そのことに気づいていません (Fig.3.2.2)。自分が見ている影と、隣人が見ている影は違っている可能性があります。しかし人間たちは、影を实在だと信じ込んでいるので、各自の見ている影こそが真実だと主張し対立します。



**Fig.3.2.2 Shadows are different**

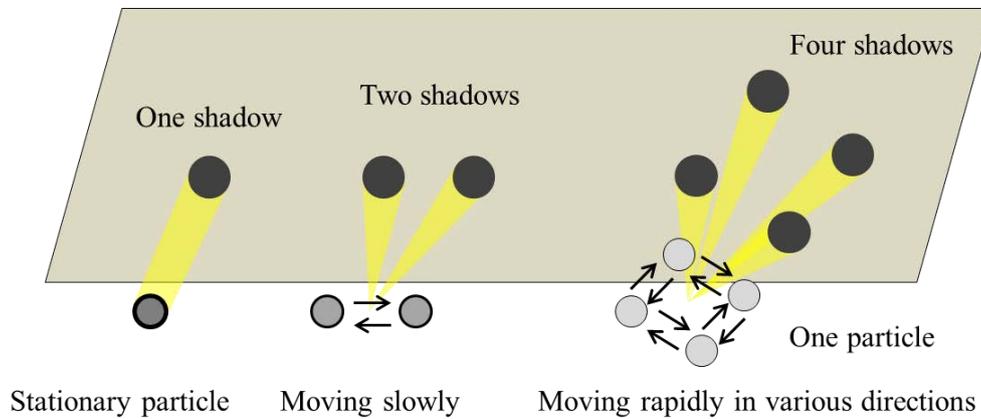
このアイデア論を参考にして、エントロピーは粒子の個数そのものではなく、「粒子の影の個数」を反映していると解釈することもできます。

ところで、電子のような量子はツブツブの固形物ではなく、流動的で軟らかい「場の振動体」であるという解釈があり、「場の振動体」が外部から力を受けたときは、全体がひとかたまりで動くので、ツブツブの固形物のように振る舞っているように見えるだけだ、と考えます。

したがって、「エントロピーとは、ひとかたまりで動くエネルギー体の量子的な影の個数である」と言った方が、粒子の影と呼ぶより汎用的かもしれません。量子は、その位置や動きが確率的にしか示せないので、「粒子の影の確率的な個数」と言い換えてよいかも知れません。

Fig.3.2.3 は、1 個の粒子の運動が激しくなるほど、またいろいろな方向に向かうほど（つまり

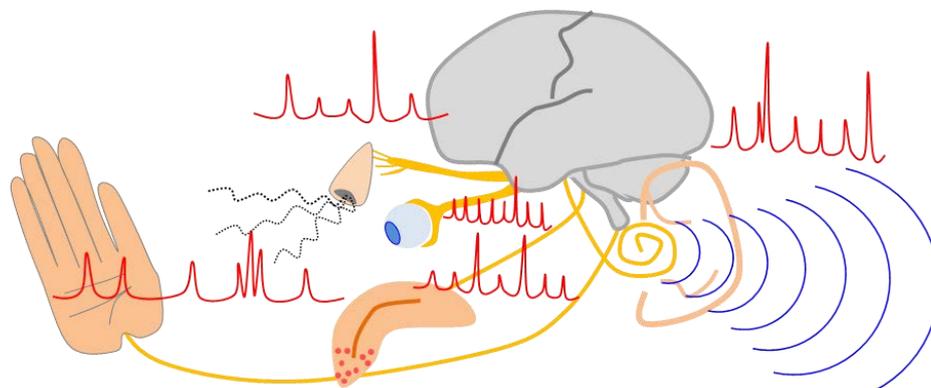
系の熱エネルギーが増えるほど)、粒子の影が増えていくことを模式的に描いたものです。影は残像のように洞窟の壁に残るので、数が増えていくと理解すればよいでしょう。おそらく影の面積が連続的に増えていくのではなく、1個、2個、3個のように影が量子的に増えるのだらうと思われれます。本当のことは誰も知らないのです、便利な理解の仕方を選べばよいと思われれます。



**Fig.3.2.3 Entropy is shadows of entities**

そして、この実在の影こそ、人間の感覚器（嗅覚、視覚、聴覚、味覚、触覚など）が捉えている外界の「情報」なのです (Fig.3.2.4)。感覚器はすべての「情報」を電気信号に変換して脳に伝えます。その電気信号を処理して、人間の世界観が形成されています。

そこで「エントロピー」 = 「情報」、 「エントロピーの大きさ」 = 「情報量」という理解の仕方が可能になります。



Changes in the external world are captured by sensory organs, converted into electrical signals, transmitted to the brain, and used to form a human world view.

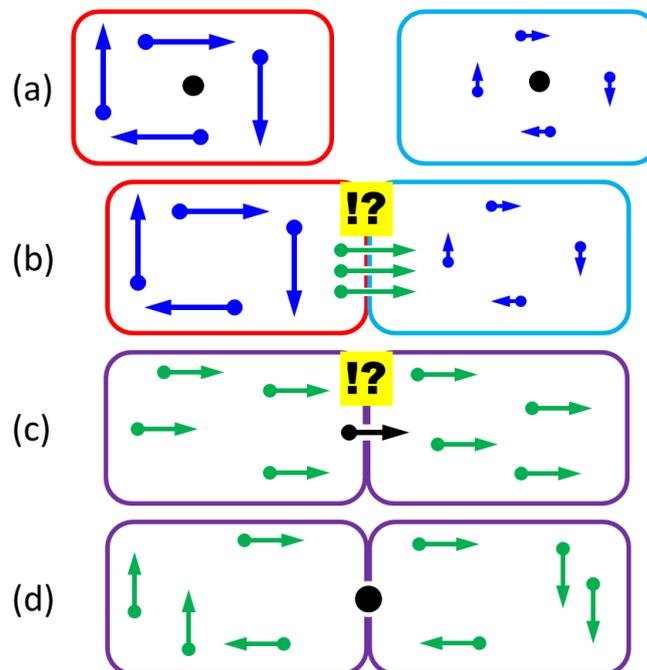
**Fig.3.2.4 Entropy (that is shadows of entities) makes “Information”**

エントロピーとは「エネルギーの影の多さ」であり、「情報の多さ」であり、エネルギーの動く向きや大きさが**デタラメ**であるほどエントロピーは大きくなると考えることができます。(注: バラをデタラメに変更しました。その理由はこれから説明します。)

ではここで、エネルギーの動く「向きや大きさがデタラメである」とはどういうことか、Fig.2.1.2

のイメージを修正しておきましょう。もし粒子の存在位置や動きの向きや速さが、Fig.2.1.2の丸印や矢印で示されているように、「確定的に決まったもの」であるならば、温度差によって熱転移が発生することの説明が難しくなり、また平均化が進むことにより熱が勝手に仕事に変わり、系全体（物体）が動き始めるといった奇跡のようなことが起こりかねないからです。

Fig.3.2.5(a)は高温の物体と低温の物体を表しています。粒子の位置を丸印で、動き（向きと大きさ）を矢印で示しています。図では直線的な動きのみを示し、回転などは省略しています。矢印のひとつひとつは「小さな仕事」ですが、みな向き（や大きさ）がバラバラなので「大きな仕事」はできない状態です。ベクトルは合成したり、分解したり、平均をとったりすることができます。各物体内の粒子の直線的運動の平均を黒の矢印で示しています。物体は動いていないのでベクトルの平均は黒点になっています。合成すれば「ゼロベクトル」になることを見やすいように、各物体内の矢印を4つ、大きさは等しく、向きは90度ごとに異なるように描いています。



**Fig.3.2.5 Averaging of vectors (2 dimensions)**

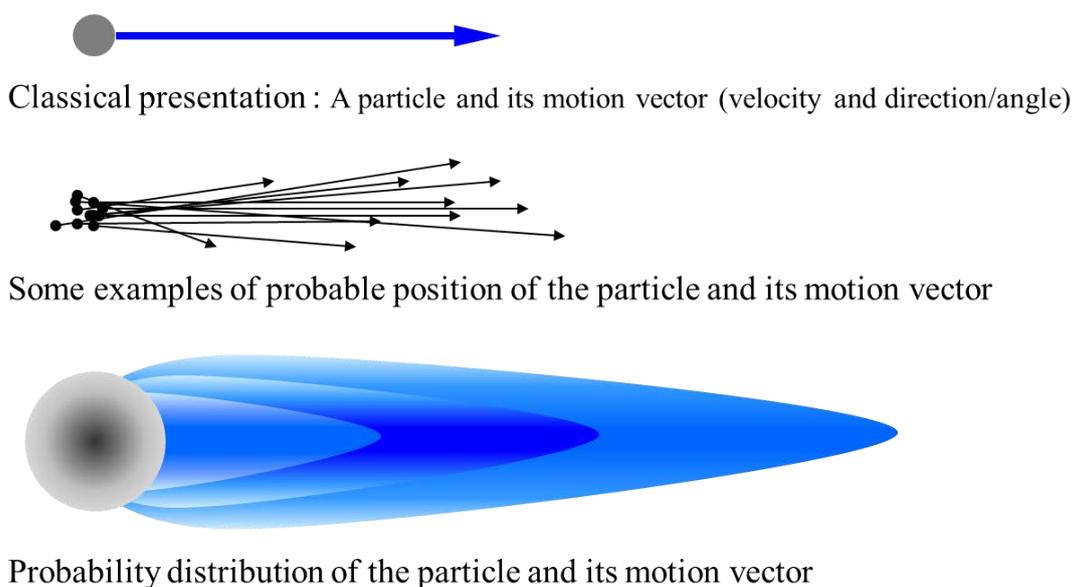
まず、両物体を接触させます（図(b)）。高温から低温に向かって熱転移という「大きな仕事」が発生するのですが、平均的な運動が「ゼロベクトル」では、この現象をどうやって説明すればよいのでしょうか。また、このとき図では右向きのベクトルが発生するので、「物体全体」が右向きに動き始めることとなります。実際には、そのようなことは起こり得ません。

また、温度差は物体全体に広がりながら（図(c)）、すべての熱転移（大きな仕事）は熱（バラバラの向きと大きさの小さな仕事の集まり＝烏合の衆）に変わります（図(d)）。その時の平均ベクトルは「ゼロベクトル」でなければいけないのですが、いったいどのようにして、(c)→(d)と移行するのでしょうか。物体全体が右向きに動き、「系の外界との摩擦」で右向きの仕事を熱に変えるしか方法はありません。

このように、Fig.2.1.2 の図示するままに理解すると不都合なことが多いので、粒子の位置や運動を、古典的な意味で確定的に考えるのは良くないことなのです。

本当は、粒子の向きも大きさも確率的にしか示すことができないものなのかもしれません。向きや大きさがバラバラでも確率的な非決定性が皆無で、すべて確定的に決まっていれば、熱転移も起こらず、エントロピーは大きくなりえないのかもしれませんが<sup>#7</sup>。

Fig.2.1.2 の粒子の存在や直線運動は、Fig.3.2.6 のように確率的に捉えた方が良いと考えられます。また、Fig.2.1.7 のように直線運動を波動運動として描く場合も、確率的分布の幅を与えなければいけません（何を描いているかわからなくなるので、ここでは図示しません）。



### Fig.3.2.6 Quantum mechanical picture of a particle and its movement

そこで、エントロピーとは「エネルギーの影の多さ」であり、「情報の多さ」であり、エネルギーの動く向きや大きさがデタラメなほど（＝「**確率的自由度が大きいほど**」）エントロピーは大きくなると思えることができます、と「バラバラ」を「デタラメ」に変えたわけです。デタラメという言葉には「確率的で予測できない」という意味が含まれています。バラバラは、単に散らばっている（ひとつひとつ異なっている）ことを意味しているだけで確率的な意味合いはあまり含まれていません。もちろん、言葉のニュアンスに頼るよりは「確率的」であることを明示するのが良いと思われます。

なお、このように理解しておくのは便宜的な解釈のひとつです。便宜的というのは、その考え

---

<sup>#7</sup> したがって、エントロピーは量子力学的な解釈や定義が不可欠です。Takashi Aurués “*Breaking Free From the Spell of Entropy (We must take a fundamental change in the basic concept of entropy.)*” The Annual Reports on the 14<sup>th</sup> Fibonacci Meeting of Japan (2016) 137-147 「エントロピー：その形式的呪縛からの解放（人間の非論理的な判断の物質的根拠に関する論理的かつ非論理的な説明の試み）」日本フィボナッチ協会第14回研究集会報告書 [Link1](#) [Link2](#)

方はおそらく「真理」ではないだろうが、そのような考え方で物理現象を解釈すると論理的に納得できることが多いので、便利であるという意味です。プラトンのイデア論は、私たちが真理かもしれないと信じている物理学的法則も、すべて「影」に関する便宜的解釈であって真理ではないと論じています。

新しい物質現象が見つかる度に、「自然現象が数式でうまく記述できるのは不思議だ」といったことが言われます。物質現象は自然現象であり、数学や論理は人間が創り出した人工的なものだという（西洋的な）考え方をすると、「自然対人間」という対立関係の中で、自然現象と数式の相性が良すぎることは不思議なことになります。

しかし、Fig.3.2.4 でわかるように、私たちが自然現象だと思っていることも、所詮は、感覚器が集めたものを電気信号に換え、脳の中で再構築したもの、つまり人工的なものに過ぎないので、「自然現象（だと思っていること：自然科学の対象となる現象）」も、「数学（論理）」も、同じ脳内の現象なので相性が良い（調和・整合性がとれている）のは当然のことなのでしょう。

さて、いろいろな種類の物質を一緒にしたとき、特別な親和性や疎排性が働かなければ、自発的に勝手に進む変化として、互いに混じり合っていきます。一般に多種類の物質がゴチャゴチャに混じり合った状態が高エントロピーの状態（エネルギーの影が多種多様になる）だからです。純度の高い物質系より不純物が多い物質系の方がエントロピーは高くなります。

エントロピーとはどのようなものかが何となく理解できたところで、Fig.2.1.2 を改めて見直すと、仕事というのは低エントロピーであり、熱は高エントロピーであることがわかります。役に立つのは仕事であり、熱は役に立ちません。ここでの「役に立つ」というのは、「既存の構造に変化をもたらすような何らかの作用を及ぼすことができる」という意味です。構造の変化は、受け手によって有益なこともあれば、有害なこともあります。

石炭を燃やして高温状態のガスを作り出し、大気（低温）との温度差で仕事を引き出して（例えば、蒸気機関を動かして）、役目の終わったガスを捨てる場合を考えてみましょう。石炭（CH 供給源）や酸素（O 供給源）は低エントロピーであり、燃やせば役に立つので「資源」と呼ばれます。二酸化炭素や水蒸気（CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O）、また捨てられる熱（高温と低温の中間の温度になっている）は、もう同じ装置で同じ目的には使えないので「排ガス、廃熱」と呼ばれ「ゴミ扱い」を受けます（別の装置を使えば、廃熱から更に仕事を引き出すことが可能です）。

#### 4. 中学理科の実験でエントロピー変化を計算する Calculation of entropy change for mixing water at two different temperatures

さて、式 3.1 は (小) 系の温度変化がほとんどない時に、(小) 系全体のエントロピー変化を計算する式でした。また、式 3.2 は、Fig.3.1.2 に示す小系 **A** と小系 **B** の温度差があまり大きくない、あるいは小系 **A** と小系 **B** の温度が変化しない程度に熱量移動量  $\Delta Q$  が十分に小さい場合の (つまり積分計算を避けることができる条件下での)、系全体のエントロピー変化を計算する式でした。

そこで、中学理科の実験に戻り、対象とする温度範囲内では比熱がほぼ一定であるという条件下で、温度が大きく変化していく場合 (式 3.1 や式 3.2 が使えない場合) のエントロピー変化を計算してみます。高校の数学III程度の積分計算を使います。

Fig.4.1.1 は、最初に紹介した中学理科の実験で起こる変化を 10 段階に等区分したものです。高温の小系 **A** から低温の小系 **B** に  $2000 \text{ cal}$  の熱量が移動して両者が等温になりますので、各段階で  $200 \text{ cal}$  ずつ熱が移動することになります。比熱は、どの温度範囲でも一定:  $1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$  であると仮定しているので、 $200 \text{ cal}$  の熱移動により  $200 \text{ g}$  の小系 **A** の温度は  $-1^\circ\text{C}$ 、 $100 \text{ g}$  の小系 **B** の温度は  $+2^\circ\text{C}$  変化します。

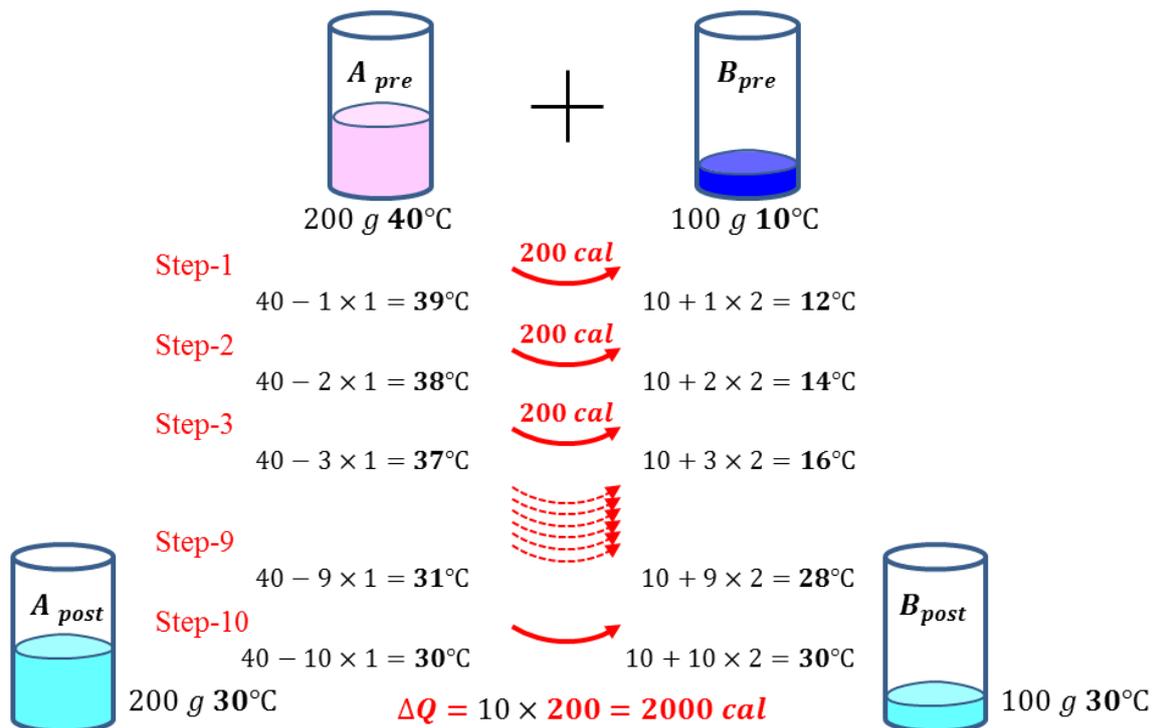


Fig.4.1.1 Mixing (Contacting of) hot and cold water

Fig.4.1.2 は、Fig.4.1.1 を Fig.3.1.2 に基づいて少し一般化し、全変化過程を  $n$  段階に等区分したものです。

小系 **A** と小系 **B** は同じ物質で構成されており、物質のモル比は、小系 **A**/小系 **B** =  $\alpha/\beta$  としています。計算上重要なのが両者の比率であって、絶対的な物質質量でないときは、 $\alpha + \beta = 1$  として、小系 **A**/小系 **B** =  $\alpha/(1 - \alpha)$  としたほうが、計算式がきれいになることがあります。

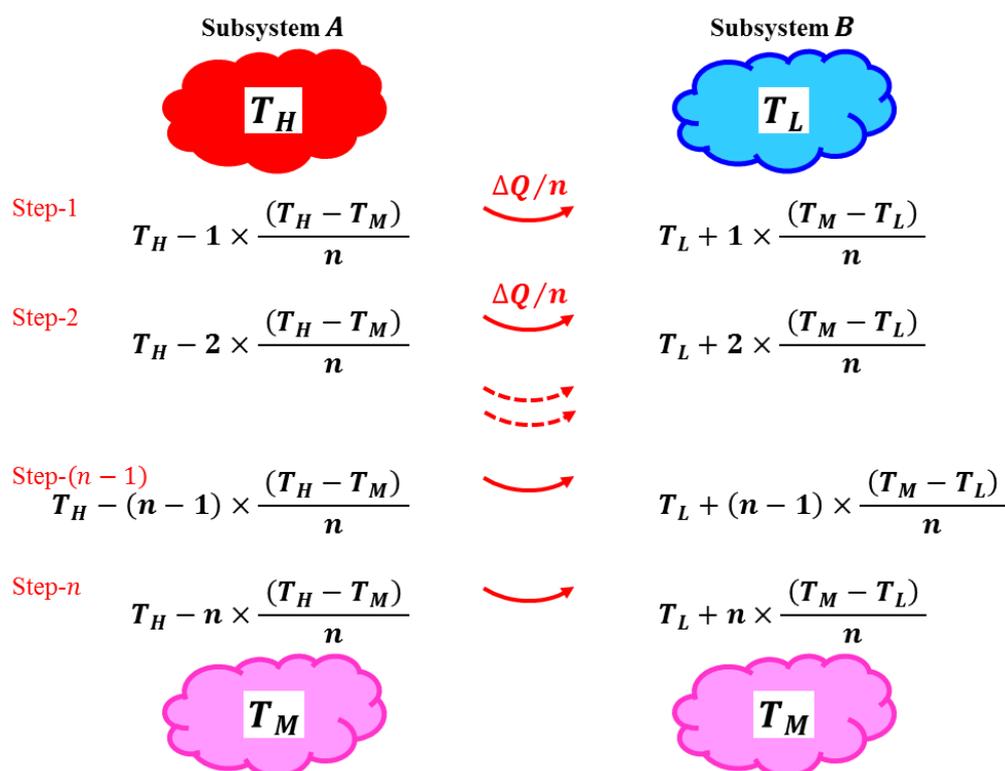
対象とする温度範囲内では一定であると仮定されている比熱は、計算が楽になるように「**1**」としておきます（数式上での表示も省略）。

小系 **A**（最初の温度： $T_H$ ）と小系 **B**（最初の温度： $T_L$ ）が最終的に到達する等温  $T_M$  は、水の場合と同じように計算して次式を得ます（Table 4）。

$$T_M = \frac{\alpha T_H + \beta T_L}{\alpha + \beta}$$

全経過を通じて総計  $\Delta Q$  の熱量が小系 **A** から小系 **B** に移動するものとします。 $\Delta Q$  の値は、 $\Delta Q = \alpha(T_H - T_M) = \beta(T_M - T_L)$  で求めることができますが、エントロピーと熱量との関係を追うために  $\Delta Q$  のままで計算します。

さて、 $n$  等分された各段階で、小系 **A** は熱量  $\Delta Q/n$  を失って温度は  $(T_H - T_M)/n$  低下し、小系 **B** は同じ熱量  $\Delta Q/n$  を得て温度は  $(T_M - T_L)/n$  上昇していきます。



Assuming that the specific heat capacity is constant over all temperature ranges and the mole ratio between **A** and **B** is  $\alpha:\beta$ . Then,  $T_M = \frac{\alpha T_H + \beta T_L}{\alpha + \beta}$

**Fig.4.1.2** Contacting of warmer and colder

Table 4 Contacting of warmer and colder

Specific heat capacity : 1 cal/(g · °C)	$A_{pre}$	$B_{pre}$	$A + B$	$A_{post}$	$B_{post}$
Weight (g)	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$\alpha$	$\beta$
Temperature (°C)	$T_H$	$T_L$	$T_M$	$T_M$	$T_M$
Heat energy (cal) (zero calorie at 0°C)	$\alpha \times T_H$	$\beta \times T_L$	$(\alpha + \beta) \times T_M$	$\alpha \times T_M$	$\beta \times T_M$
Heat transfer (cal)				$pre - \Delta Q$	$pre + \Delta Q$
Conservation of energy	$\alpha \times T_H + \beta \times T_L$		$(\alpha + \beta) \times T_M$	$\alpha \times T_M + \beta \times T_M$ $= (\alpha + \beta) \times T_M$	

ここで、 $n$  は十分に大きいため、ひとつひとつの段階は「変化前後の温度差がほとんど無い場合」に相当すると考えられます。したがって、式 3.1 を用いてエントロピー変化を計算することができます。

では先に、式 3.1 を用いて小系  $A$  のエントロピー変化を計算します。

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_*} \quad \dots \dots \text{(式 3.1) 再掲}$$

小系  $A$  は第 1 段階で、温度  $T_H$  のときに熱量  $\Delta Q/n$  を失うので、そのときのエントロピー変化は次式で計算できます。なお、 $\Delta S$  や  $\Delta Q$  の記号は、値の正負をもって移動の向きを意味させることも可能ですが、ここでは両者ともに正の数として扱うことにします。また、 $\Delta Q$  は、正負の符号  $\pm$  を付けることで移動の向きを明示することにします。高温側の小系  $A$  は熱を失い、エントロピーが減少するので負の記号を付けて表します。

$$-\Delta S_{A1} = \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H}$$

小系  $A$  の温度は第 1 段階で  $T_H - (T_H - T_M)/n$  に低下するので、第 2 段階のエントロピー変化は次式で計算できます。

$$-\Delta S_{A2} = \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H - \frac{1}{n}(T_H - T_M)}$$

小系 **A** の第 1 段階から第  $n$  段階までのエントロピー変化を合計すると次式になります。

$$\begin{aligned}
 -\Delta S_A &= -\Delta S_{A1} - \Delta S_{A2} - \Delta S_{A3} \cdots - \Delta S_{An} \\
 &= \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H} + \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H - \frac{1}{n}(T_H - T_M)} + \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H - \frac{2}{n}(T_H - T_M)} + \cdots \\
 &\quad + \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H - \frac{n-1}{n}(T_H - T_M)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H - \frac{k}{n}(T_H - T_M)}
 \end{aligned}$$

ここで、 $n$  が無限大に近づくと仮定すると区分求積法により積分形に変更できます。

$$\begin{aligned}
 -\Delta S_A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{-\Delta Q}{n}\right)}{T_H - \frac{k}{n}(T_H - T_M)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-\Delta Q}{T_H - \frac{k}{n}(T_H - T_M)} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 \frac{-\Delta Q}{T_H - (T_H - T_M)x} dx = \frac{-\Delta Q}{-(T_H - T_M)} \times [\log|T_H - (T_H - T_M)x|]_0^1 \\
 &= \frac{\Delta Q}{(T_H - T_M)} (\log|T_M| - \log|T_H|) = \frac{\Delta Q}{(T_H - T_M)} \log \frac{T_M}{T_H}
 \end{aligned}$$

置換積分を用いて得られる公式： $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log|ax+b| + C$  を用いています。

ここで  $\Delta Q = \alpha(T_H - T_M)$  を用いると、 $-\Delta S_A = \alpha \log(T_M/T_H)$  となり、 $\alpha > 0, T_M < T_H$  なので、確かに  $-\Delta S_A < 0$  となっていることがわかります。

$$-\Delta S_A = \frac{\Delta Q}{(T_H - T_M)} \log \frac{T_M}{T_H} = \alpha \log \frac{T_M}{T_H} \quad \dots \dots \text{(式 4.1)}$$

解釈の参考のために作った式 3.4 と同じような形になりました。

$$\Delta S_{(T_1 \rightarrow T_2)} = n \log \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \quad \dots \text{(式 3.4)} \quad \boxed{\text{解釈の参考}} \quad \text{再掲}$$

同様にして、低温側である小系 **B** のエントロピー変化を計算します。

$$\begin{aligned}\Delta S_B &= \Delta S_{B1} + \Delta S_{B2} + \Delta S_{B3} + \cdots + \Delta S_{Bn} \\ &= \frac{\left(\frac{\Delta Q}{n}\right)}{T_L} + \frac{\left(\frac{\Delta Q}{n}\right)}{T_L + \frac{1}{n}(T_M - T_L)} + \frac{\left(\frac{\Delta Q}{n}\right)}{T_L + \frac{2}{n}(T_M - T_L)} + \cdots \\ &\quad + \frac{\left(\frac{\Delta Q}{n}\right)}{T_L + \frac{n-1}{n}(T_M - T_L)}\end{aligned}$$

$$\Delta S_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\Delta Q}{n}\right)}{T_L + \frac{k}{n}(T_M - T_L)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta Q}{T_L + \frac{k}{n}(T_M - T_L)} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{\Delta Q}{T_L + (T_M - T_L)x} dx = \frac{\Delta Q}{(T_M - T_L)} \times [\log|T_L + (T_M - T_L)x|]_0^1$$

$$= \frac{\Delta Q}{(T_M - T_L)} (\log|T_M| - \log|T_L|) = \frac{\Delta Q}{(T_M - T_L)} \log \frac{T_M}{T_L}$$

$$\Delta S_B = \frac{\Delta Q}{(T_M - T_L)} \log \frac{T_M}{T_L} = \beta \log \frac{T_M}{T_L} \quad \dots \dots \dots \text{(式 4.2)}$$

最後は、 $\Delta Q = \beta(T_M - T_L)$  を用いています。 $\beta > 0, T_M > T_L$  なので、確かに  $\Delta S_B > 0$  となっていることがわかります。

エントロピーの加法性が仮定されているので、系全体のエントロピー変化は式 4.1 と式 4.2 を加えることで求めることができます。

$$\begin{aligned}\Delta S_{(A+B)} &= -\Delta S_A + \Delta S_B \\ &= \frac{\Delta Q}{(T_H - T_M)} \log \frac{T_M}{T_H} + \frac{\Delta Q}{(T_M - T_L)} \log \frac{T_M}{T_L} \quad \dots \dots \dots \text{(式 4.3)}\end{aligned}$$

$$= \alpha \log \frac{T_M}{T_H} + \beta \log \frac{T_M}{T_L} \quad \dots \dots \dots \text{(式 4.4)}$$

さて、 $-\Delta S_A < 0$ 、 $\Delta S_B > 0$  ですが、系全体のエントロピー変化  $\Delta S_{(A+B)}$  の正負を調べます。熱力学第2法則という一般性のある法則により系全体のエントロピー変化が正となることはわかっていますが、中学理科の実験でも  $\Delta S_{(A+B)} > 0$  であることを確認しておきます。

Fig.4.1.3 は、Fig.4.1.2 における  $n$  等分の  $n$  を無限大にして、一般的な極小量を表す記号で描き直したものです。各段階で、微小な熱量  $dQ$  が移動し、高温側小系 **A** の温度は  $-dT_H$  ずつ下がり、低温側小系 **B** の温度は  $+dT_L$  ずつ上がるように表記を簡略化しています。

Fig.4.1.3 では、各段階の微小なエントロピー変化  $dS_*$  も図の中に加えています。小系 **A** のエントロピーは、熱移動の第 1 段階で  $-dS_{H1}$  減り、熱移動の第 2 段階で  $-dS_{H2}$  減ると表記しています。小系 **B** のエントロピーは、熱移動の第 1 段階で  $dS_{L1}$  増え、熱移動の第 2 段階で  $dS_{L2}$  増えると表記しています。第 1 段階での系全体のエントロピー変化は  $dS_1 = -dS_{H1} + dS_{L1}$  と表記します。

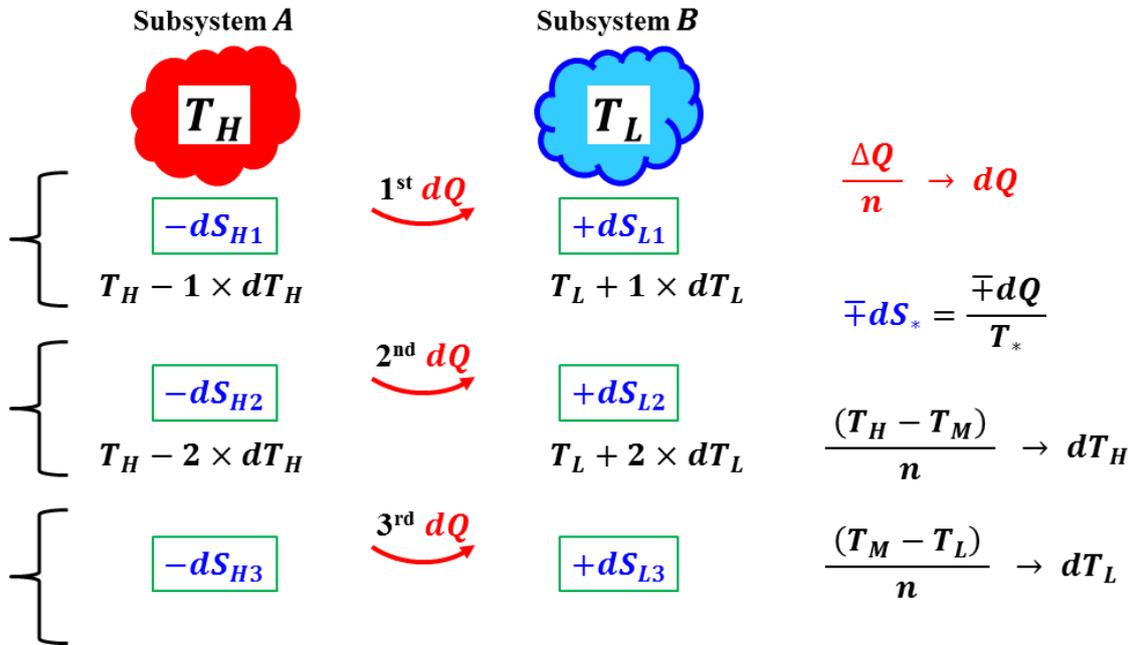


Fig.4.1.3 Contacting of warmer and colder

第 1 段階から第  $n$  段階までの各段階に対して式 3.2 が成立することが確認されます。

$$\Delta S_{system} = \frac{-\Delta Q}{T_H} + \frac{\Delta Q}{T_L} = \frac{(T_H - T_L)\Delta Q}{T_H T_L} > 0 \quad \dots \text{(式 3.2) 再掲}$$

例えば、第 3 段階でも、確かに式 3.2 の成立が確認されます。

$$\begin{aligned} dS_3 &= -dS_{H3} + dS_{L3} = \frac{-dQ}{T_H - 2 \times dT_H} + \frac{dQ}{T_L + 2 \times dT_L} \\ &= \frac{\{(T_H - 2 \times dT_H) - (T_L + 2 \times dT_L)\} \times dQ}{(T_H - 2 \times dT_H) \times (T_L + 2 \times dT_L)} \\ &= \frac{\{\text{Warmer} - \text{Colder}\} \times (dQ > 0)}{(\text{Warmer} > 0) \times (\text{Colder} > 0)} > 0 \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n$  段階 としても全段階で「 $dS_* > 0$ 」は保たれるので、

$$\Delta S_{(A+B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} dS_{k+1} > 0$$

ところで、ここでは正負の符号  $\pm$  で移動の向きを明示するために、 $\Delta S$  や  $\Delta Q$  をともに正の数として扱っていますが、 $\Delta S$  や  $\Delta Q$  の値自身の正負をもって移動の向きを意味させることも可能です。そこで、小系 **A** のエントロピー変化の計算を  $(-1) \times (-\Delta S_A)$ 、 $(-1) \times (-\Delta Q)$  とし、これまでの計算式を補正すると、式 4.3 は

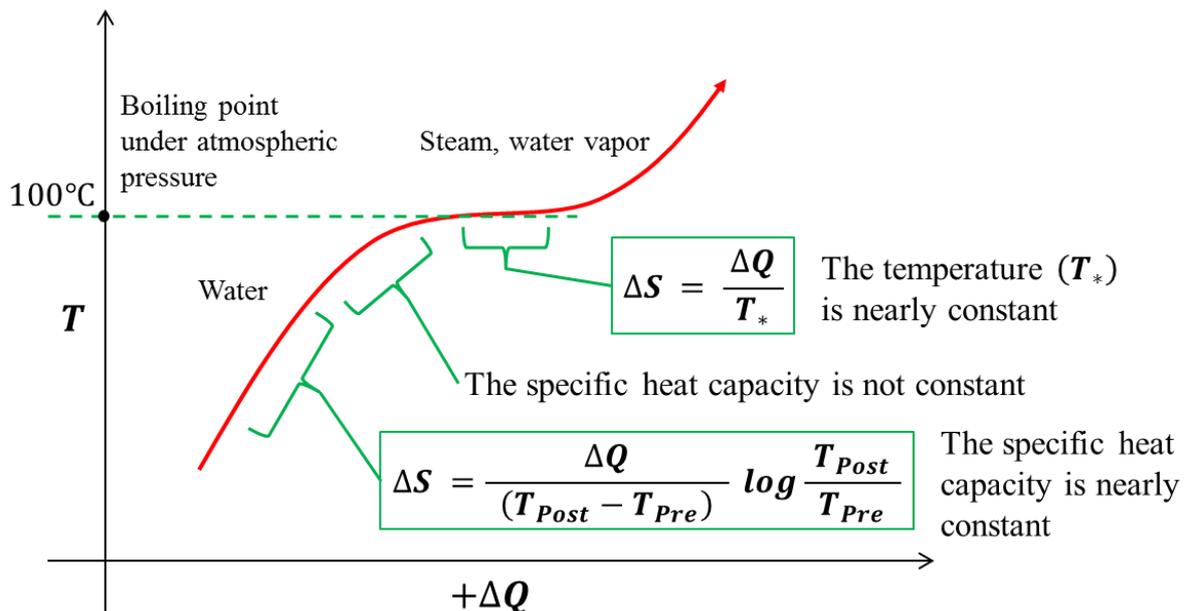
$$\Delta S_{(A+B)} = \Delta S_A + \Delta S_B = \frac{\Delta Q}{(T_M - T_H)} \log \frac{T_M}{T_H} + \frac{\Delta Q}{(T_M - T_L)} \log \frac{T_M}{T_L}$$

となります。ここでは、 $(-1) \times (-\Delta Q)$  の  $(-1)$  を分母に掛けて温度の順序関係を変更し、小系 **B** の計算式と揃えています。

そうすると、エントロピーの計算式は次のように簡略化できます。

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{(T_{Post} - T_{Pre})} \log \frac{T_{Post}}{T_{Pre}} \quad \dots \dots \text{(式 4.5)}$$

Fig.4.2 は、水を例として、エントロピーの計算式の使える範囲を図示しています。式 3.1 を直接使用できるのは、沸点近くのように、それなりの熱量が加えられても温度変化がほとんどないような部分です。式 3.1 を積分で変形した式 4.5 は、比熱を定数として扱える部分で使用できます。しかし、比熱が大きく変化する部分では、高校数学Ⅲのレベルを超える別の計算式を用意する必要があります。



**Fig.4.2 Applicable scope of equations**

Fig.4.2 は、式 3.1 ~ 式 4.5 までの計算が受けた制約についての全体像を与えるものです。温度がほぼ一定という条件が無ければ式 3.1 は使えません。比熱がほぼ一定という条件が無ければ式 4.5 は使えません。

では、ここで熱力学第2法則に頼らないで、中学理科の実験において  $\Delta S > 0$  となっていることの数学的証明を試みます。

式 4.3 に戻ります。ここでは  $\Delta S > 0$ 、 $\Delta Q > 0$  であり、正負の符号  $\pm$  で移動の向きを示しています。

$$\begin{aligned} \Delta S_{(A+B)} &= -\Delta S_A + \Delta S_B \\ &= \frac{\Delta Q}{(T_H - T_M)} \log \frac{T_M}{T_H} + \frac{\Delta Q}{(T_M - T_L)} \log \frac{T_M}{T_L} \quad \dots \text{(式 4.3) 再掲} \end{aligned}$$

この式を変形し  $\Delta S_{(A+B)} > 0$  を示すのが目標です。

$$\Delta S_{(A+B)} = \frac{\Delta Q}{(T_H - T_M)(T_M - T_L)} \left\{ (T_M - T_L) \log \frac{T_M}{T_H} + (T_H - T_M) \log \frac{T_M}{T_L} \right\}$$

$\Delta Q > 0$ 、 $T_H > T_M > T_L > 0$  であり、上式前半部は  $\Delta Q / ((T_H - T_M)(T_M - T_L)) > 0$  なので、後半部の  $\{ \}$  の中が正であることを証明すればよいことになります。

$$\begin{aligned} &\left\{ (T_M - T_L) \log \frac{T_M}{T_H} + (T_H - T_M) \log \frac{T_M}{T_L} \right\} \\ &= T_M \log \frac{T_M}{T_H} - T_L \log \frac{T_M}{T_H} + T_H \log \frac{T_M}{T_L} - T_M \log \frac{T_M}{T_L} \\ &= T_M \log T_M - T_M \log T_H - T_L \log T_M + T_L \log T_H + T_H \log T_M - T_H \log T_L \\ &\quad - T_M \log T_M + T_M \log T_L \\ &= -T_M \log T_H - T_L \log T_M + T_L \log T_H + T_H \log T_M - T_H \log T_L + T_M \log T_L \\ &= T_H \log \frac{T_M}{T_L} + T_M \log \frac{T_L}{T_H} + T_L \log \frac{T_H}{T_M} = \log \frac{T_M^{T_H} T_L^{T_M} T_H^{T_L}}{T_L^{T_H} T_H^{T_M} T_M^{T_L}} \\ &= \log \frac{T_H^{T_L} T_L^{T_M} T_M^{T_H}}{T_H^{T_M} T_M^{T_L} T_L^{T_H}} > 0 \text{ を証明するためには、} \end{aligned}$$

$$\frac{T_H^{T_L} T_L^{T_M} T_M^{T_H}}{T_H^{T_M} T_M^{T_L} T_L^{T_H}} > 1 \text{ を示せばよいのです。}$$

これは簡単な作業に思え、4日かけて合計で10時間くらい取り組みましたが、尾立には解決できませんでした。そこで「エレガントな証明は数学者にお任せ」と、共著者に協力を求めました。

## 5. エレガントな数学的証明を求めて Mathematical extension and proof

ここで Fig.5.1 に基づいて記号を変更すると

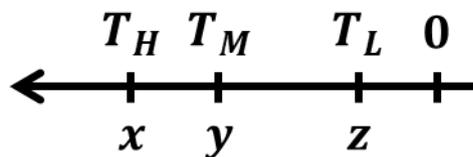


Fig.5.1 Symbols substitution

次の不等式を証明せよという数学の問題に置き換えることができます。

$$x > y > z > 0$$

$$x^z y^x z^y > x^y y^z z^x$$

Fig.5.2 Inequality problem

では、共著者による不等式の証明や不等式の一般化等を紹介します。欧州滞在中に救援要請を受けて問題を解き、写メールで送った者もいれば、通勤電車の中で解いた者もいます。編集にあたり、個性や試行錯誤、証明の発展過程を残すように努めました。数学的表現は、最初に解いた後も、簡潔に錬磨されたものに改良されていきましたが、ここでは初期のものを掲載します。

### ■ 大関清太による証明

$x > y > z > 0, y = ax + (1 - a)z$ , ただし  $0 < a < 1$  のとき

$$x^z y^x z^y > x^y y^z z^x$$

を証明せよ.

証明::

$$\frac{x^z y^x z^y}{x^y y^z z^x} > 1$$

を示す. 両辺の対数をとる.

$$z \log x + x \log y + y \log z - y \log x - z \log y - x \log z > 0$$

左辺

$$\begin{aligned} &= (z - y) \log x + (x - z) \log y + (y - x) \log z \\ &= a(z - x) \log x - (z - x) \log y + (1 - a)(z - x) \log z \\ &= (z - x) \{ a \log x - \log y + (1 - a) \log z \} \end{aligned}$$

$z - x < 0$  だから

$$a \log x - \log y + (1 - a) \log z < 0$$

が示したい.

$$\log x^a - \log y + \log z^{1-a} < 0 \Leftrightarrow \log x^a \cdot z^{1-a} < \log y$$

$$y > x^a \cdot z^{1-a} \Leftrightarrow \frac{y}{z} > \left(\frac{x}{z}\right)^a$$

左辺 =  $\frac{ax+(1-a)z}{z} = a\left(\frac{x}{z}\right) + (1-a)$ . ここで  $\frac{x}{z} = t$  と置く,  $t > 1$  求める式は

$$at + (1-a) > t^a$$

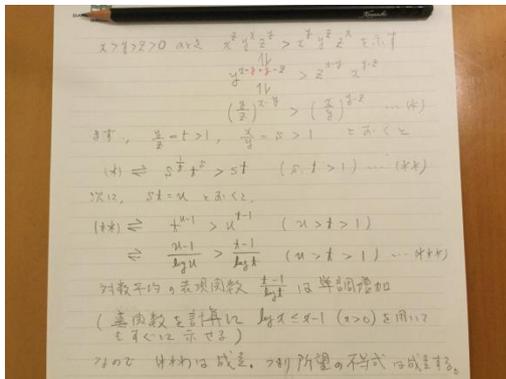
$$s = t^a - at + (a-1)$$

を  $t > 1, 0 < a < 1$  で考える.

$$s' = at^{a-1} - a = a(t^{a-1} - 1)$$

$t > 1$  で  $s' < 0$  で  $s_{t=1} = 0$  だから  $s < 0$ .

### ■ 古市茂による証明



$x > y > z > 0$  のとき  $x^z y^x z^y > x^y y^z z^x$  を示す

1↓

$$y^{x-y+y-z} > x^{y-z} z^{x-y}$$

1↓

$$\left(\frac{y}{z}\right)^{x-y} > \left(\frac{x}{y}\right)^{y-z} \dots \dots \dots (*)$$

まず,  $\frac{y}{z} = t > 1, \frac{x}{y} = s > 1$  とおくと

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{s^t} t^s > st \quad (s, t > 1) \dots \dots \dots (**)$$

次に,  $st = u$  とおくと,

$$(**) \Leftrightarrow t^{u-1} > u^{t-1} \quad (u > t > 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u-1}{\log u} > \frac{t-1}{\log t} \quad (u > t > 1) \dots \dots \dots (***)$$

対数平均の表現関数  $\frac{t-1}{\log t}$  は単調増加 (導関数を計算して  $\log x \leq x - 1$  ( $x > 0$ ) を用いてもすぐに示せる) なので (\*\*\*) は成立. つまり所望の不等式は成立する.

■ 岡本清美による証明

◎ 第1不等式 (注: 第2不等式:  $x > y > z > u > 0$ ,  $x^u y^x z^y u^z > x^y y^z z^u u^x$ )  
証明すべきことは

$x > y > z > 0$  であるとき

$$x^z y^x z^y > x^y y^z z^x \quad (1)$$

両辺の対数を取って移項した

$$f \equiv z \log x + x \log y + y \log z - y \log x - z \log y - x \log z \quad (2)$$

で  $f > 0$  を示せばよい.

(2) 式を  $y$  で規格化して

$$\tilde{f} \equiv f/y \quad (3)$$

$$\tilde{x} \equiv x/y, \tilde{x} > 1 \quad (4)$$

$$\tilde{z} \equiv z/y, 0 < \tilde{z} < 1 \quad (5)$$

と書くことにして

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \tilde{z} \log(y\tilde{x}) + \tilde{x} \log y + \log(y\tilde{z}) - \log(y\tilde{x}) - \tilde{z} \log y - \tilde{x} \log(y\tilde{z}) \\ &= (\tilde{z} - 1) \log \tilde{x} + (1 - \tilde{x}) \log \tilde{z} \end{aligned} \quad (6)$$

である.

$$\tilde{x} = 1 + \alpha, \alpha > 0 \quad (7)$$

$$\tilde{z} = 1 - \beta, 0 < \beta < 1 \quad (8)$$

として

$$\tilde{f} = -\beta \log(1 + \alpha) - \alpha \log(1 - \beta) \quad (9)$$

第1項が負, 第2項が正である (いずれも負号含む). 両辺を  $\alpha\beta > 0$  で割って

$$\frac{\tilde{f}}{\alpha\beta} = -\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} - \frac{\log(1-\beta)}{\beta} \quad (10)$$

(10) 式の第1項 (負号含む) の意味は, 図1の赤破線の傾きの符号を変えたものである. 同様に, 第2項 (負号含む) の意味は, 図1の青破線の傾き (符号そのまま) である.  $\log$  のグラフの単調増加と上に凸の性質から,

$$0 < \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} < -\frac{\log(1-\beta)}{\beta} \quad (11)$$

であるので (つまり, [赤破線の傾き] < [青破線の傾き]): これは図より明らかであるが, Lagrangeの平均値の定理を使って示してもよい, (10) 式の  $\tilde{f}/\alpha\beta$  は

$$\frac{\tilde{f}}{\alpha\beta} > 0 \quad (12)$$

である. したがって  $\tilde{f} > 0$  であり,  $f > 0$  が示された.

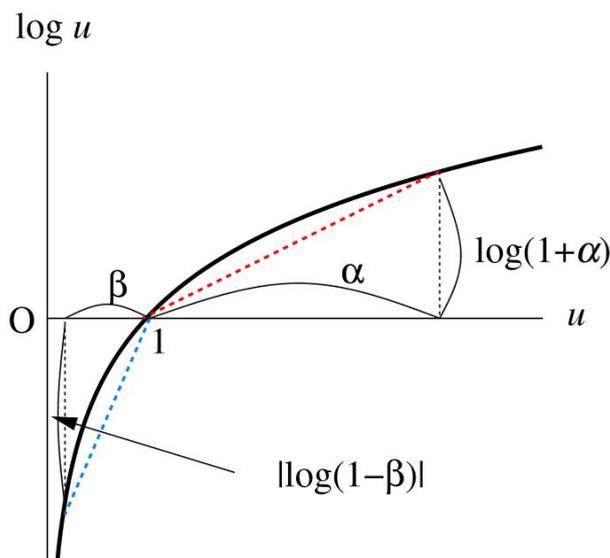


図 1 :

◎ 改良 1

(6)式の  $\tilde{f}$  を

$$\tilde{f} = (1 - \tilde{z})(\tilde{x} - 1) \left\{ \frac{\log \tilde{x}}{1 - \tilde{x}} - \frac{\log \tilde{z}}{1 - \tilde{z}} \right\} \quad (13)$$

と書き直して図 2 の  $F(\mathbf{w})$  の性質を使えば直ちに証明できる。(7)~(12)式は試行錯誤の過程が残っていて、大分回り道をしている。ここら辺を改良して  $\mathbf{x}$  による規格化に変更してみる(改良 2)。

◎ 改良 2

(2) 式を  $\mathbf{x}$  で規格化して

$$\hat{f} \equiv f/x \quad (14)$$

$$\hat{y} \equiv y/x \quad (15)$$

$$\hat{z} \equiv z/x \quad (16)$$

$$0 < \hat{z} < \hat{y} < 1 \quad (17)$$

と書くことにして

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \hat{z} \log x + \log(x\hat{y}) + \hat{y} \log(x\hat{z}) - \hat{y} \log x - \hat{z} \log(x\hat{y}) - \log(x\hat{z}) \\ &= (\hat{y} - 1) \log \hat{z} + (1 - \hat{z}) \log \hat{y} \\ &= (1 - \hat{y})(1 - \hat{z}) \left\{ \frac{\log \hat{y}}{1 - \hat{y}} - \frac{\log \hat{z}}{1 - \hat{z}} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

である。関数  $F(\mathbf{w}) \equiv \frac{\log(w)}{1-w}$  は単調増加だから上の式の  $\{ \}$  は正である(図 2)。

したがって  $\hat{f} > 0$  であり、 $f > 0$  が示せた。

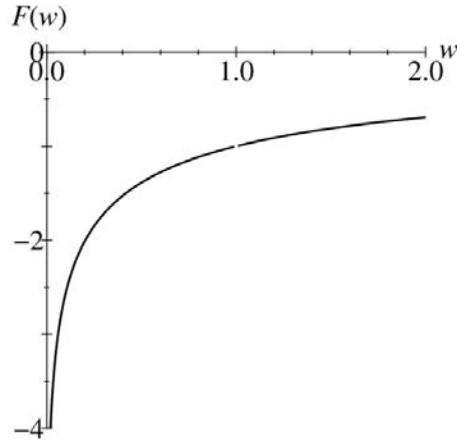


図 2 :

◎ 第 2 不等式問題 (3 元から 4 元への拡張)

$x > y > z > u > 0$  であるとき,

$$x^u y^x z^y u^z > x^y y^z z^u u^x \quad (19)$$

となるか調べよ.

両辺の対数を取って移項した

$$g = u \log x + x \log y + y \log z + z \log u - y \log x - z \log y - u \log z - x \log u \quad (20)$$

で  $g > 0$  となるかどうか調べればよい.

(20) 式を  $x$  で規格化して

$$\hat{g} \equiv g/x \quad (21)$$

$$\hat{y} \equiv y/x \quad (22)$$

$$\hat{z} \equiv z/x \quad (23)$$

$$\hat{u} \equiv u/x \quad (24)$$

$$0 < \hat{u} < \hat{z} < \hat{y} < 1 \quad (25)$$

とすると

$$\begin{aligned} \hat{g} &= \hat{u} \log x + \log(x\hat{y}) + \hat{y} \log(x\hat{z}) + \hat{z} \log(x\hat{u}) - \hat{y} \log x - \hat{z} \log(x\hat{y}) - \hat{u} \log(x\hat{z}) - \log \hat{u} \\ &= \{(\hat{y} - 1) \log \hat{z} + (1 - \hat{z}) \log \hat{y}\} + \{(\hat{z} - 1) \log \hat{u} + (1 - \hat{u}) \log \hat{z}\} \\ &= (1 - \hat{y})(1 - \hat{z}) \left\{ \frac{\log \hat{y}}{1 - \hat{y}} - \frac{\log \hat{z}}{1 - \hat{z}} \right\} + (1 - \hat{z})(1 - \hat{u}) \left\{ \frac{\log \hat{z}}{1 - \hat{z}} - \frac{\log \hat{u}}{1 - \hat{u}} \right\} \\ &= (1 - \hat{y})(1 - \hat{z}) \{F(\hat{y}) - F(\hat{z})\} + (1 - \hat{z})(1 - \hat{u}) \{F(\hat{z}) - F(\hat{u})\} \end{aligned} \quad (26)$$

である. 関数  $F(w) \equiv (\log w)/(1-w)$  の単調増加性により (26) 式の 2 つの  $\{ \}$  は共に正である. したがって  $\hat{g} > 0$ , すなわち  $g > 0$  であり, この問題は肯定的に解決された.

((26)式 2 行目に移るとき,  $\log \hat{z}$  を足して引いた. これによって  $(\hat{y}, \hat{z})$  のペアと  $(\hat{z}, \hat{u})$  のペアのそれぞれで  $F(w)$  を用いた議論が使える形に持ち込んでいる.)

◎  $n$  元の場合への一般化

$x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0$  のとき ( $n \geq 3$ )

$$\prod_{j=1}^n x_j^{x_{j-1}} > \prod_{j=1}^n x_j^{x_{j+1}} \quad (27)$$

ただし,  $x_0 \equiv x_n, x_{n+1} \equiv x_1$  とする.

第 2 不等式問題 (3 元→4 元) の証明と全く平行にできる. 両辺の対数を取って移項した

$$h = \sum_{j=1}^n (x_{j-1} \log x_j - x_{j+1} \log x_j) \quad (28)$$

で  $h > 0$  となるかどうか調べればよい.

$x_1$  で規格化して  $\hat{x}_j \equiv x_j/x_1, \hat{h} \equiv h/x_1$  として

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \sum_{j=1}^n (\hat{x}_{j-1} \log \hat{x}_j - \hat{x}_{j+1} \log \hat{x}_j) \\ &= \sum_{j=2}^{n-1} ((\hat{x}_j - 1) \log \hat{x}_j + (1 - \hat{x}_{j+1}) \log \hat{x}_j) \\ &= \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \hat{x}_j)(1 - \hat{x}_{j+1}) \left\{ \frac{\log \hat{x}_j}{1 - \hat{x}_j} - \frac{\log \hat{x}_{j+1}}{1 - \hat{x}_{j+1}} \right\} \\ &= \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \hat{x}_j)(1 - \hat{x}_{j+1}) \{F(\hat{x}_j) - F(\hat{x}_{j+1})\} \end{aligned} \quad (29)$$

関数  $F(w) \equiv (\log w)/(1-w)$  の単調増加性により (29) 式の  $\{ \}$  は正である. したがって  $\hat{h} > 0$ , すなわち  $h > 0$  である.

■ 大塚秀幸による拡張例のひとつ

$f(a, b, t) = (1-t)a + tb$  のとき

$$x^{f(z,y,t)} y^{f(x,z,t)} z^{f(y,x,t)} > x^{f(z,y,s)} y^{f(x,z,s)} z^{f(y,x,s)}$$

(for  $0 \leq t < s \leq 1$ )

上の不等式で  $t = 0, s = 1$  の場合,  $x^z y^x z^y > x^y y^z z^x$  となります.

◎ 3元から多元不等式への拡張の証明

$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > 0$  ( $n \geq 4$ ) に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\prod_{i=1}^n x_i^{x_{i-1}} > \prod_{i=1}^n x_i^{x_{i+1}}$$

ただし,  $x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1$  と約束する.

(証明)  $y^{x-1} > x^{y-1}$  ( $x > y > 1$ ) (☆) を利用する. (この不等式の証明は省略)

$x_i = a_i x_n$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とする. ここで,  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n = 1$  に注意する.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n x_i^{x_{i-1}-x_{i+1}} &= x_1^{x_0-x_2} x_n^{x_{n-1}-x_{n+1}} \prod_{i=2}^{n-1} x_i^{x_{i-1}-x_{i+1}} \\ &= x_1^{x_n-x_2} x_n^{x_{n-1}-x_1} \prod_{i=2}^{n-1} x_i^{x_{i-1}-x_{i+1}} \\ &= (a_1 x_n)^{x_n-a_2 x_n} x_n^{a_{n-1} x_n - a_1 x_n} \prod_{i=2}^{n-1} (a_i x_n)^{a_{i-1} x_n - a_{i+1} x_n} \\ &= \left( a_1^{1-a_2} \prod_{i=2}^{n-1} a_i^{a_{i-1}-a_{i+1}} \right)^{x_n} = \left( a_1^{1-a_2} \prod_{i=2}^{n-1} a_i^{a_{i-1}-1} a_i^{1-a_{i+1}} \right)^{x_n} \\ &= \left( \prod_{i=1}^{n-2} a_{i+1}^{a_i-1} a_i^{1-a_{i+1}} \right)^{x_n} = \left( \prod_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i+1}^{a_i-1}}{a_i^{a_{i+1}-1}} \right)^{x_n} > 1 \end{aligned}$$

((☆) より)

よって, 目的の不等式は証明された. ■

■ 中川幸一による一般化された証明

定義 1  $q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1$  に対して, 不等式

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$$

が成り立つとき,  $f(x)$  を上に凸という.

定義 1 は、以下のように容易に一般化することができる

定義 2  $q_1, q_2, \dots, q_n > 0, q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$  に対して、不等式

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \dots + q_nf(x_n)$$

が成り立つとき、 $f(x)$  を上に凸という。

これを变形すると

補題 2  $f(x)$  が上に凸 ( $f''(x) \leq 0$ ) ならば  $x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0$  について

$$(x_2 - x_n)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + \dots + (x_n - x_{n-2})f(x_{n-1}) + (x_1 - x_{n-1})f(x_n) \leq 0$$

証明

$$\begin{aligned} & (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_4 - x_2)f(x_3) + \dots + (x_{n-1} - x_{n-3})f(x_{n-2}) + (x_n - x_{n-2})f(x_{n-1}) \\ \leq & f((x_3 - x_1)x_2 + (x_4 - x_2)x_3 + \dots + (x_{n-1} - x_{n-3})x_{n-2} + (x_n - x_{n-2})x_{n-1}) \\ = & f(-x_1x_2 + x_nx_{n-1}) \\ = & f(x_nx_1 - x_2x_1 + x_{n-1}x_n - x_1x_n) \\ = & f((x_n - x_2)x_1 + (x_{n-1} - x_1)x_n) \\ \leq & (x_n - x_2)f(x_1) + (x_{n-1} - x_1)f(x_n) \\ \leq & -(x_2 - x_n)f(x_1) - (x_1 - x_{n-1})f(x_n) \end{aligned}$$

より題意を満たす。

$f(x) = \log x$  とおき 補題 1 を使うと

$$\begin{aligned} & (x_2 - x_n) \log x_1 + (x_3 - x_1) \log x_2 + \dots + (x_n - x_{n-2}) \log x_{n-1} + (x_1 - x_{n-1}) \log x_n \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (x_n - x_2) \log x_1 + (x_1 - x_3) \log x_2 + \dots + (x_{n-2} - x_n) \log x_{n-1} + (x_{n-1} - x_1) \log x_n \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x_1^{x_n - x_2} x_2^{x_1 - x_3} \dots x_{n-1}^{x_{n-2} - x_n} x_n^{x_{n-1} - x_1} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & x_1^{x_n} x_2^{x_1} \dots x_{n-1}^{x_{n-2}} x_n^{x_{n-1}} \geq x_1^{x_2} x_2^{x_3} \dots x_{n-1}^{x_n} x_n^{x_1} \end{aligned}$$

- Arkady Alt (USA) による証明（共著者ではありませんが縁があって解答を送ってくれました）

One exponential inequality.

Prove that for any  $x > y > z > 0$  holds inequality  $x^z y^x z^y > x^y y^z z^x$ .

Solution by Arkady Alt , San Jose , California, USA.

Note that  $x^z y^x z^y > x^y y^z z^x \Leftrightarrow z \ln x + x \ln y + y \ln z > y \ln x + z \ln y + x \ln z$ .

We have  $z \ln x + x \ln y + y \ln z - (y \ln x + z \ln y + x \ln z) = x(\ln y - \ln z) - y(\ln x - \ln z) + z(\ln x - \ln y) = x(\ln y - \ln z) - y(\ln x - \ln y + \ln y - \ln z) + z(\ln x - \ln y) = x(\ln y - \ln z) - y(\ln x - \ln y) - y(\ln y - \ln z) + z(\ln x - \ln y) = (x - y)(\ln y - \ln z) - (y - z)(\ln x - \ln y) = (x - y)(y - z) \left( \frac{\ln y - \ln z}{y - z} - \frac{\ln x - \ln y}{x - y} \right)$ .

Since by Mean Value Theorem there are  $a \in (y, x)$  and  $b \in (z, y)$  such that  $\frac{\ln y - \ln z}{y - z} = \frac{1}{b}$  and  $\frac{\ln x - \ln y}{x - y} = \frac{1}{a}$  then  $\frac{\ln y - \ln z}{y - z} - \frac{\ln x - \ln y}{x - y} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0$  (because  $0 < b < a$  ).

- インターネット上に掲載された問題の紹介

この不等式は、熱力学の初歩的な思考実験で導出されるので、19世紀中旬（つまりクラウドジウスがエントロピーについての発表を行った以降）に、熱力学計算を行う物理学者か化学者により得られていた（が、数学的関心を示されなかったのではないかと推測されます。しかし、とてもシンプルな構造の不等式なので、それ以前に数学者（あるいは指数計算を教わったばかりの学生）が、純粋に数学的試行錯誤（遊び）でこの不等式を得ていた可能性もあります。

インターネット上では、証明問題としての投稿（2011年）が確認されています（2017年現在）。探せば、他の投稿も見つかるかもしれません。

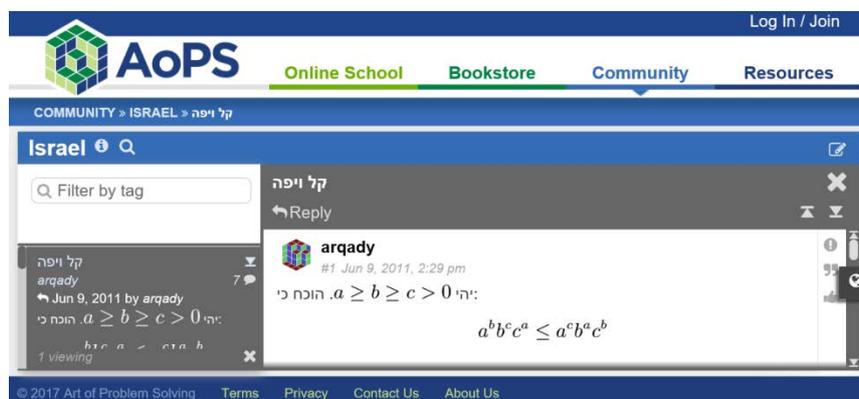


Fig.5.3 2011 <https://artofproblemsolving.com/community/c416h410723p2302066>

$$a^{b-c} b^{c-a} c^{a-b} = a^{b-c} b^{c-a} c^{a-b} \cdot 1^1 \leq \sum_{\text{巡回}} ((b-c)a) + 1 = \sum_{\text{巡回}} (ba-ca) + 1 = \sum_{\text{巡回}} (ba-ba) + 1 = 1$$

# The Golden Ratios Which Imply Maximum Entropy in Nuclear Physics #1

Sep.26, 2017

Yoshiaki NAKAGAWA

Key words: *nuclear valley of stability, magic number, mass ratio of nuclear fission products, golden ratio in nature, Fibonacci numbers in nature, thermodynamic maximum entropy, minimum entropy, quantum mechanical entropy*

In 2016, Takashi Aureus reported that thermodynamic entropy is quantum mechanical and different from mathematical information entropy <sup>[1]</sup>. It clearly means two things.

One is there will be the definition of entropy by quantum mechanics. Another is there should be the appearance of Fibonacci numbers or other numbers and the golden ratios in quantum mechanics or in nuclear physics.

Unfortunately there is no room for the concept of entropy in quantum mechanics and nuclear physics, because energy transfers are easy to observe in experiments. So there is no definition over entropy by quantum mechanics.

There are, however, the appearance of number and golden ratios in nuclear physics. I would like to show three examples; the magic number, mathematical trend of stable nuclei and mass ratios of nuclear fission products, as the appearance of the number and the golden ratios in nuclear physics.

The phenomenon is well-known facts in nuclear physics.

(1) The magic numbers (2, 8, 20, 28, 50, 82, and 126) resembles Fibonacci sequence.

The pair of nucleon has the lower potential energy than single nucleon. So only as magic number “2” has the clear reason of stability. Real magic numbers are;

$$8 : 20 : 28 : 50 : 82 : 126 \quad \doteq \quad 1 : 2 : 3 : 5 : 8 : 13$$

The magic numbers is almost ten times the Fibonacci numbers. There are some drifts or errors in the sequence. It is just reflect of the nature of quantum mechanics which has probability theory basis.

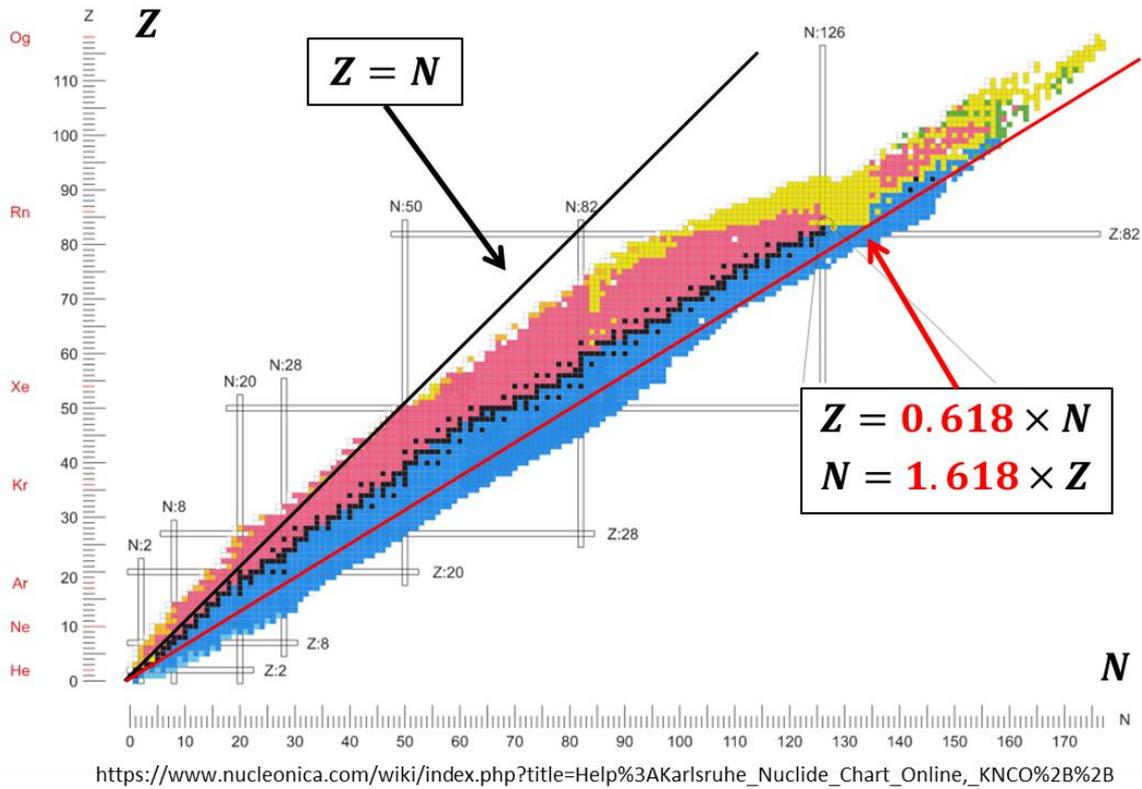
(2) The tangent of the angle of inclination of stable nuclei in the nuclear chart is about 0.618. It is shown in the nuclear chart below.

---

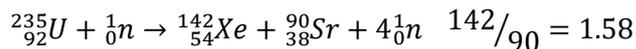
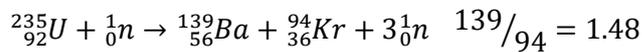
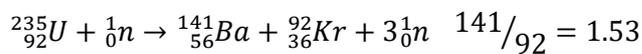
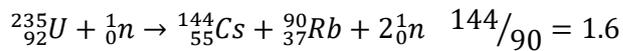
#1 2017.08.25 日本フィボナッチ協会 第15回研究集会 (協賛: 東京理科大学理数教育研究センター)

本稿 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/MagicNumbers20170926.pdf> [Link](#)

会場配布資料 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/MagicNumbers20170825.pdf> [Link](#)



(3) Mass ratios of nuclear fission products (major two fragments) are about 1.6.



Many of colleagues may be skeptical about my observations due to the drift or difference. My answer is that quantum mechanics have the characteristic in understanding the statistics deviation. It somehow implies that we should make reconsideration over the nature of probability, statistics and entropy.

I had known since around 40 years ago about the magic numbers and the nuclear chart.

I just understand that nuclear force and electromagnetic force make some kind of equilibrium in stable nuclei on some conditions. The quantum mechanical entropy is the way to formulate the equilibrium condition in stable nuclei. It may bring a new aspect to the theory between the strong interaction and electromagnetic interaction.

## Abstract in Japanese:

エントロピーが、量子力学的なものであるとするならば、原子核について観測されている現象の中に、フィボナッチ数列などの特徴的な数列の出現あるいは黄金比というマキシマム・エントロピーの出現を示す現象が観測されるはずである。筆者は、このような現象の例として、魔法数の解釈、ハイゼンベルクの谷の傾きおよび核分裂反応の娘核の質量比の観測結果を提示したい。

数学的な美しさを基準とした場合、余りにラフな即ち偏差とふらつきのある観測結果に無理やり、黄金比を押し付けたという評価がありうるものと考えられる。工学的な教育を受けた筆者には、一定のまとまりの存在を無視することはできないことであり、偏差は主たる作用とは異なる副となる作用が優越する機序または領域の存在を示すものであり、極めて日常的でありその意味で宇宙的な真実であると思われる。

一つの理論で、すべてが説明できるほど宇宙は単純なものではないはずである。核力と電磁気力が作用する原子核内の現象に、電磁気力が優越する領域と核力が優越する領域が存在しても良いはずである。

今後は、エントロピーの量子力学的定義と確率、統計の本質を中心に研究を進めたい。

---

<sup>1</sup> Takashi Aurués “*Breaking Free From the Spell of Entropy (We must take a fundamental change in the basic concept of entropy.)*” (in Japanese) The Annual Reports on the 14<sup>th</sup> Fibonacci Meeting of Japan (2016) 137-147 「エントロピー：その形式的呪縛からの解放（人間の非論理的な判断の物質的根拠に関する論理的かつ非論理的な説明の試み）」日本フィボナッチ協会第14回研究集会報告書 [Link1](#) [Link2](#)

## 自己紹介

前山和喜（発表者）

- ・ 関西大学大学院総合情報学研究科知識情報学専攻
- ・ コンピューティング史, 計算科学史
- ・ 数学, 計算, 計算機, コンピュータなどのアーカイブやミュージアムを作る研究をしている

落合竜也

- ・ 工学院大学大学院工学研究科情報学専攻
- ・ 連分数による無理数の近似計算
- ・ 黄色い服を着ている学生

一般化されたフィボナッチ計算盤について

フィボナッチ, トリボナッチから, Nボナッチへ

前山 和喜（関西大学大学院総合情報学研究科修士1年）★  
落合 竜也（工学院大学大学院工学研究科修士1年）

## 1. フィボナッチ計算盤について

### フィボナッチ2進法

- ・ 任意の自然数Nをゼッケンドルフ表現した時に使用する項数番目のビットを「1」  
使用しないビットは「0」とし  
フィボナッチ数列の2番目の1の項を2進数の最下位ビットと対応付けて2進法に表す記数法
- ・ フィボナッチ符号などとも呼ばれる

ex) 

34	21	13	8	5	3	2	1	
49=	1	0	1	0	0	0	1	0

3

## 1. フィボナッチ計算盤について

### フィボナッチ2進法

- ・ 「隣り合うビットに1が並ぶことを禁止する」というルールを付けることで一意に書きあらわすことができる（**ゼッケンドルフの定理**）
- ・ **位取りを持たないため、筆算を書いて計算することが難しい**
- ・ 変換は大きい数から貪欲に決定できる

ex) 

34	21	13	8	5	3	2	1	
49=	1	0	1	0	0	0	1	0

4

## 1. フィボナッチ計算盤について

								34	34							
								42	21	21						
								39	26	13	13					
								40	24	16	8	8				
								40	25	15	10	5	5			
								39	24	15	9	6	3	3		
								42	26	16	10	6	4	2	2	
								34	21	13	8	5	3	2	1	1
34	21	13	8	5	3	2	1									

コマを用いてフィボナッチ2進法をコマがある=1, コマがない=0, として計算する

別冊日経サイエンス 数学ゲーム3に掲載されている

5

## 1. フィボナッチ計算盤について

								34	34							
								42	21	21						
								39	26	13	13					
								40	24	16	8	8				
								40	25	15	10	5	5			
								39	24	15	9	6	3	3		
								42	26	16	10	6	4	2	2	
								34	21	13	8	5	3	2	1	1
34	21	13	8	5	3	2	1									

・ 掛け算九九と同じように積を赤枠の内部に記している  
・ 赤枠の内部で計算を行う  
・ 水色・黄色の部分は、大きさを示すためのガイドの役割がある

6

## 1. フィボナッチ計算盤について

								34	34							
								42	21	21						
								39	26	13	13					
								40	24	16	8	8				
								40	25	15	10	5	5			
								39	24	15	9	6	3	3		
								42	26	16	10	6	4	2	2	
								34	21	13	8	5	3	2	1	1
34	21	13	8	5	3	2	1									

特徴

・ 横に2個並ぶコマは1マス左のコマと等しくなるので置き換えられる

・ 逆に1個のコマを右2マスのコマと置き換えられる

7

## 1. フィボナッチ計算盤について

								34	34							
								42	21	21						
								39	26	13	13					
								40	24	16	8	8				
								40	25	15	10	5	5			
								39	24	15	9	6	3	3		
								42	26	16	10	6	4	2	2	
								34	21	13	8	5	3	2	1	1
34	21	13	8	5	3	2	1									

特徴

・ 縦に2個並ぶコマは1マス上のコマと等しくなるので置き換えられる

・ 逆に1個のコマを下2マスのコマと置き換えられる

8

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
	39	24	15	9	6	3	3
	42	26	16	10	6	4	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤: 1001010  
+  
青: 101000

赤は28  
青は18  
なので和は  
46になれば良い

9

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
	39	24	15	9	6	3	3
	42	26	16	10	6	4	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤: 1001010  
+  
青: 101000

赤は28  
青は18  
なので和は  
46になれば良い

並んでいるので  
1マス左へ

10

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
	39	24	15	9	6	3	3
	42	26	16	10	6	4	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤: 1001010  
+  
青: 101000

赤は28  
青は18  
なので和は  
46になれば良い

青の1コマを右の2マス  
に置き換える

11

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
	39	24	15	9	6	3	3
	42	26	16	10	6	4	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤: 1001010  
+  
青: 101000

赤は28  
青は18  
なので和は  
46になれば良い

並んでいるので  
1マス左に置き換える

12

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
	39	24	15	9	6	3	3
	42	26	16	10	6	4	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤: 1001010  
+  
青: 101000

赤は28  
青は18  
なので和は  
46になれば良い

青の1コマを右のマスに  
2個に置き換える

13

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
	39	24	15	9	6	3	3
	42	26	16	10	6	4	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤: 1001010  
+  
青: 101000

赤は28  
青は18  
なので和は  
46になれば良い

並んでいるので  
1マス左に置き換える

14

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
	39	24	15	9	6	3	3
	42	26	16	10	6	4	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤: 1001010  
+  
青: 101000

結果  
10010101  
34+8+3+1=46

引き算はコマが  
重なったら取り除けば良い

となり和が  
求められている

15

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

						34	21	13	8	5	3	2	1	
28 =							1	0	0	1	0	1	0	
18 =	+							1	0	1	0	0	0	
46 =	=						1	1	0	2	0	1	0	
←	=						1	0	0	0	2	0	1	0
→	=						1	0	0	0	1	1	2	0
←	=						1	0	0	1	0	0	2	0
→	=						1	0	0	1	0	0	1	2
←	=						1	0	0	1	0	1	0	1

16

# 1. フィボナッチ計算盤について

足し算の場合

$$\begin{array}{r}
 F_8 \qquad \qquad + F_5 \qquad \qquad + F_3 \\
 + \qquad \qquad F_7 \qquad + F_5 \\
 \hline
 = F_8 + F_7 \qquad + 2F_5 \qquad + F_3 \\
 = F_9 \qquad \qquad + 2F_5 \qquad + F_3 \\
 = F_9 \qquad \qquad + F_5 + F_4 + 2F_3 \\
 = F_9 \qquad \qquad + F_6 \qquad + 2F_3 \\
 = F_9 \qquad \qquad + F_6 \qquad + F_3 + 2F_2 \\
 \hline
 = F_9 \qquad \qquad + F_6 \qquad + F_4 \qquad + F_2
 \end{array}$$

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34							
						42	21	21						
						39	26	13	13					
						40	24	16	8	8				
						40	25	15	10	5	5			
						39	24	15	9	6	3	3		
						42	26	16	10	6	4	2	2	
						34	21	13	8	5	3	2	1	1
						34	21	13	8	5	3	2	1	1

赤: 1001  
青: 1010

赤は6  
青は7  
なので積は  
42になれば良い

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34							
						42	21	21						
						39	26	13	13					
						40	24	16	8	8				
						40	25	15	10	5	5			
						39	24	15	9	6	3	3		
						42	26	16	10	6	4	2	2	
						34	21	13	8	5	3	2	1	1
						34	21	13	8	5	3	2	1	1

赤: 1001  
青: 1010

赤は6  
青は7  
なので積は  
42になれば良い

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34							
						42	21	21						
						39	26	13	13					
						40	24	16	8	8				
						40	25	15	10	5	5			
						39	24	15	9	6	3	3		
						42	26	16	10	6	4	2	2	
						34	21	13	8	5	3	2	1	1
						34	21	13	8	5	3	2	1	1

掛け算の筆算と同じことように1の所の置いている

この黒いコマの和が積になる

1001
x 1010
0000
1001
0000
1001
10010000

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34							
						42	21	21						
						39	26	13	13					
						40	24	16	8	8				
						40	25	15	10	5	5			
						39	24	15	9	6	3	3		
						42	26	16	10	6	4	2	2	
						34	21	13	8	5	3	2	1	1
						34	21	13	8	5	3	2	1	1

掛け算の筆算と同じことように1の所の置いている

最下行に積を表現したい

1001
x 1010
0000
1001
0000
1001
10010000

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34							
						42	21	21						
						39	26	13	13					
						40	24	16	8	8				
						40	25	15	10	5	5			
						39	24	15	9	6	3	3		
						42	26	16	10	6	4	2	2	
						34	21	13	8	5	3	2	1	1
						34	21	13	8	5	3	2	1	1

赤: 1001  
青: 1010

赤は6  
青は7  
なので積は  
42になれば良い

値が異なるため下すことができない

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34							
						42	21	21						
						39	26	13	13					
						40	24	16	8	8				
						40	25	15	10	5	5			
						39	24	15	9	6	3	3		
						42	26	16	10	6	4	2	2	
						34	21	13	8	5	3	2	1	1
						34	21	13	8	5	3	2	1	1

赤: 1001  
青: 1010

赤は6  
青は7  
なので積は  
42になれば良い

差分の4の位置にもコマを置けば良い

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34							
						42	21	21						
						39	26	13	13					
						40	24	16	8	8				
						40	25	15	10	5	5			
						39	24	15	9	6	3	3		
						42	26	16	10	6	4	2	2	
						34	21	13	8	5	3	2	1	1
						34	21	13	8	5	3	2	1	1

赤: 1001  
青: 1010

赤は6  
青は7  
なので積は  
42になれば良い

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
						3	3
						2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤：1001  
青：1010

赤は6  
青は7  
なので積は  
42になれば良い

ここから繰上げを行う

25

# 1. フィボナッチ計算盤について

掛け算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
						3	3
						2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

赤：1001  
青：1010

赤は6  
青は7  
なので積は  
42になれば良い

26

# 1. フィボナッチ計算盤について

斜めの下ろし方

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
						3	3
						2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

・赤色の範囲の中にあるコマを最下行（灰色部）降ろす時の差分は、常に右下2マスのマスにコマを置くことで差分を埋める事ができる

$40 = 34 + 6$

27

# 1. フィボナッチ計算盤について

斜めの下ろし方

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			39	24	16	8	8
		39	25	15	10	5	5
						3	3
						2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

・赤色の範囲の中にあるコマを最下行（灰色部）降ろす時の差分は、常に右下2マスのマスにコマを置くことで差分を埋める事ができる

$39 = 34 + 5$

28

# 1. フィボナッチ計算盤について

斜めの下ろし方

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			24	16	8	8	8
		40	24	15	10	5	5
						3	3
						2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

・赤色の範囲の中にあるコマを最下行（灰色部）降ろす時の差分は、常に右下2マスのマスにコマを置くことで差分を埋める事ができる

$24 = 21 + 3$

29

# 1. フィボナッチ計算盤について

割り算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
						3	3
						2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

黒：10100000  
青：1001

割り算は、上から赤いコマと同じ列にコマを揃えて引き算をすることでできる

30

# 1. フィボナッチ計算盤について

割り算の場合

						34	34
					42	21	21
				39	26	13	13
			40	24	16	8	8
		40	25	15	10	5	5
						3	3
						2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

黒：10100000  
青：1001

・マイナスのコマがでてしまう  
・どこまで下ろしたら良いかが分からない

マイナスのコマ

31

# 1. フィボナッチ計算盤について

- <現状>
- ・掛け算は上手く計算できる
  - ・コマを動かす事でフィボナッチ数に関する等式を色々と得る事ができる（2章で話す）
  - ・一般化しても、掛け算までならできる（3章で話す）
- <課題>
- ・割り算をするためのコマの動かし方が分からない
  - ・もっと何かの役に立てたい
- 32

## 2. 等式を得る

フィボナッチ計算盤上で  
コマを動かす事



フィボナッチ数を使った  
恒等式の式変形をしている

33

## 2. 等式を得る

			25	24	16	8	8
			40	15	10	5	5
		39	15		4		3
	21	16	10	6	4	2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

- ・このコマの移動も数式で表す事ができる
- ・愚直にこの移動を数式として表すと

$$F_m F_n = F_{m+n-2} + F_{m-2} F_{n-2} \text{ となる}$$

34

## 2. 等式を得る

この斜めの移動は、以下の式が成立するので使える

$$F_m F_n = F_{m+n-2} + F_{m-2} F_{n-2}$$

- ・バーバラ・ハリスが証明している
- ・これにより掛け算まではできる

			25	24	16	8	8
			40	15	10	5	5
		39	15		4		3
	21	16	10	6	4	2	2
34	21	13	8	5	3	2	1
34	21	13	8	5	3	2	1

- ・これを一般化することで割り算の時にコマを動かしやすい恒等式を導出することができる

35

## 2. 等式を得る

$$F_m F_n = F_{m+n-i} F_i + (-1)^i F_{m-i} F_{n-i}$$

(先ほどの式の場合  $i=2$ , フィボナッチ数列の2項目は1)

この式を一般化した場合のコマの動き

対角を超える場合は線対称に移動してこの公式を用いる

				715	168	73	169	104	65							
				712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8		
				720	445	275	170	105	65	4	24	5	15	10	5	5
			6	267	173	102	63	39	24	6	3	3				
		754	144	288	173	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2	
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		

36

## 2. 等式を得る

$$F_m F_n = F_{m+n-i} F_i + (-1)^i F_{m-i} F_{n-i}$$

(先ほどの式の場合  $i=2$ , フィボナッチ数列の2項目は1)

この式を一般化した場合のコマの動き

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13				
				712	440	272	168	104	64	マイナスイ	4	16	8	8			
				720	445	275	170	105	65	15	10	5	5				
				432	267	173	102	63	39	24	15	9	6	3	3		
				754	446	288	173	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610				233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1			

37

## 2. 等式を得る

$$F_m F_n = F_{m+n-i} F_i + (-1)^i F_{m-i} F_{n-i}$$

(先ほどの式の場合  $i=2$ , フィボナッチ数列の2項目は1)

この式を一般化した場合のコマの動き

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13				
				712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
				720	445	275	170	105	65	4	24	5	15	10	5	5	
				6	267	173	102	63	39	24	6	3	3				
				754	446	288	173	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610				233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1			

38

## 2. 等式を得る

$$F_m F_n = F_{m+n-i} F_i + (-1)^i F_{m-i} F_{n-i}$$

(先ほどの式の場合  $i=2$ , フィボナッチ数列の2項目は1)

この式を一般化した場合のコマの動き

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13				
				712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
				720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
				699	446	288	173	110	68	42	15	マイナスイ	3	3			
				754	466	299	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610				233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1			

39

## 2. 等式を得る

$$F_m F_n = F_{m+n-i} F_i + (-1)^i F_{m-i} F_{n-i}$$

(先ほどの式の場合  $i=2$ , フィボナッチ数列の2項目は1)

この式を一般化した場合のコマの動き

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13				
				712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
				720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
				699	446	288	173	110	68	42	15	9	6	3	3		
				754	466	299	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610				233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1			

40

## 2. 等式を得る

$F_m F_n = F_{m+n-i} F_i + (-1)^i F_{m-i} F_{n-i}$   
 (先ほどの式の場合  $i = 2$ , フィボナッチ数列の2項目は1)  
 この式を一般化した場合のコマの動き

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5
	699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

41

## 2. 等式を得る

- ・適当にコマを動かしても、それはフィボナッチに関する恒等式の式変形と同じ
- ・以下で2つの方法で、168を変形していく

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5
	699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

42

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5
	699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

43

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	105	63	39	24	15	9	6	3	3
	699	432	267	165	63	39	24	15	9	6	3	3	
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

44

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	105	63	39	24	15	9	6	3	3
	699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

45

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	105	63	39	24	15	9	6	3	3
	699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

46

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	105	63	39	24	15	9	6	3	3
	699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

47

## 2. 等式を得る

$$F_m F_n = F_m F_{n-1} + F_m F_{n-2}$$

$$= F_m F_{n-1} + F_{m-1} F_{n-2} + F_{m-2} F_{n-2}$$

$$= F_m F_{n-1} + F_{m-1} F_{n-2} + F_{m-2} F_{n-3} + F_{m-3} F_{n-4} \dots$$

$$F_m F_n = \sum_{i=1} F_{m-i} F_{n-1-i} + C$$

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8
		720	445	275	105	63	39	24	15	9	6	3	3
	699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3
	754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

48

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく  
新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

49

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく  
新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

51

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく  
新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

53

$$\begin{aligned}
 F_m F_n &= F_m F_{n-1} + F_m F_{n-2} \\
 &= F_m F_{n-2} F_m F_{n-3} + F_m F_{n-2} \\
 &= 2F_m F_{n-2} + F_m F_{n-3} \\
 &= 2F_m F_{n-2} + F_{m-1} F_{n-3} + F_{m-2} F_{n-3} \\
 &= 2F_m F_{n-2} + F_{m-2} F_{n-3} + F_{m-3} F_{n-3} + F_{m-2} F_{n-3} \\
 &= 2F_m F_{n-2} + 2F_{m-2} F_{n-3} + F_{m-3} F_{n-3} \\
 &= 2F_m F_{n-2} + 2F_{m-2} F_{n-3} + 2F_{m-3} F_{n-5} + 2F_{m-5} F_{n-6} \dots
 \end{aligned}$$

$$F_m F_n = \sum_{i=1}^m \{2F_{(m-3i)} F_{(n-3i)-2} + 2F_{(m-3i)-2} F_{(n-3i)-3}\} + C$$

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

55

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく  
新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

50

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく  
新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

52

## 2. 等式を得る

- ・四則演算に使えるような等式を見つけるだけでなく  
新たな等式を見つけることに役立つ
- ・フィボナッチの知られている等式を使いコマを動かす

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

54

## 2. 等式を得る

- ・このようにコマをルールに従って動かすことで  
新しいフィボナッチ数に関する等式を得ることが  
できる
- ・アマチュア数学者にとっては、発見的に  
数学を楽しむことができるので、とても面白い  
と思われる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	15	9	6	3	3	
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

55



### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3		
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	21	13	8	5	3	2	1	1			
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

65

### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13		
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8		
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5	
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3	
			754	466	288	178	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1		

66

### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3		
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	21	13	8	5	3	2	1	1			
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

67

### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3		
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

68

### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3		
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

69

### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3		
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

70

### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3		
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

71

この3つの形は再帰的に左下の方に降ろせる = 帰納法

### 3. 数式の正しさを示す

- ・ 黒いコマから動かし始め、青いコマの配置を作り出せば、数式の正しさを示すための大きなヒントが得られる

				715	168	73	169	104	65	29	26	13	13			
			712	440	272	168	104	64	40	24	16	8	8			
			720	445	275	170	105	65	40	25	15	10	5	5		
			699	432	267	165	102	63	39	24	9	6	3	3		
			754	466	288	178	110	68	42	26	16	10	6	4	2	2
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1		
610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1			

72

この2つのコマは簡単な数式変形で証明できる



## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例は5ポナッチ数列の計算盤

					165	720	1891	961	496	248	124	62	31	31								
					761	920	976	496	256	128	64	32	16	16								
					88	960	488	248	128	64	32	16	8	8								
					717	264	818	56	944	480	244	124	64	32	16	8	4	4				
					705	558	618	24	928	472	240	122	62	32	16	8	4	2	2			
6	9	3	0	3	5	2	5	1	7	9	1	2	4	6	2	3	6	1	2	0	1	1
6	9	3	0	3	5	2	5	1	7	9	1	2	4	6	2	3	6	1	2	0	1	1

81

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例はNポナッチ数列の計算盤

					924	096	2048	1024	512	256	128	64	32	32								
					96	2048	1024	512	256	128	64	32	16	16								
					48	1024	512	256	128	64	32	16	8	8								
					819	240	96	2048	1024	512				4								
					819	240	96	2048	1024	512	256			2								
8	1	9	2	4	0	9	6	2	0	4	8	1	0	2	4	5	1	2	5	6	1	1
8	1	9	2	4	0	9	6	2	0	4	8	1	0	2	4	5	1	2	5	6	1	1

83

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					761	944	1056	576	312	168	96	48	24	24									
					371	053	572	312	169	91	52	26	13	13									
					43	567	308	168	91	49	28	14	7	7									
					370	820	161	096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4					
					341	018	541	008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2				
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5

85

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	1944	1056	576	312	168	96	48	24	24									
					356	219	371	053	572	312	169	91	52	26	13	13							
					35	281	918	1043	567	168	91	49	28	14	7	7							
					370	820	161	096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4					
					341	018	541	008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2				
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5

87

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例はNポナッチ数列の計算盤

					924	096	2048	1024	512	256	128	64	32	32								
					96	2048	1024	512	256	128	64	32	16	16								
					48	1024	512	256	128	64	32	16	8	8								
					819	240	96	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	4				
					819	240	96	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	2			
8	1	9	2	4	0	9	6	2	0	4	8	1	0	2	4	5	1	2	5	6	1	1
8	1	9	2	4	0	9	6	2	0	4	8	1	0	2	4	5	1	2	5	6	1	1

82

## 4. 一般化する

- フィボナッチ計算盤は、斜めにコマを移動する方法が分かれば、足し算、引き算、掛け算まではできる
- 割り算は、位取りがあれば容易に出来るがフィボナッチ2進法などは、位取りがないため割り算をする事ができない
- トリボナッチ計算盤、4ポナッチ計算盤、・・・は一般的な方法で斜め移動をすることが出来る

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	1944	1056	576	312	168	96	48	24	24									
					356	219	371	053	572	312	169	91	52	26	13	13							
					35	281	918	1043	567	168	91	49	28	14	7	7							
					370	820	161	096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4					
					341	018	541	008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2				
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5

86

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	1944	1056	576	312	168	96	48	24	24									
					356	219	371	053	572	312	169	91	52	26	13	13							
					35	281	918	1043	567	168	91	49	28	14	7	7							
					370	820	161	096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4					
					341	018	541	008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2				
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5
3	1	3	6	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5	1	7	0	5

88

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					76	194	410	56	576	312	168	96	48	24	24				
					37	105	3	572	312	169	91	52	26	13	13				
					43	567					49	28	14	7	7				
					370	820	161	1096	596	324					4				
					341	185	410	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1				
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1					

階段状の6個の青いコマと赤いコマが等しくなる

89

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					76	194	410	56	576	312	168	96	48	24	24				
					37	105	3	572	312	169	91	52	26	13	13				
					43	567					49	28	14	7	7				
					370	820	161	1096	596	324					4				
					341	185	410	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1				
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1					

同じ形を作りだすことができる

91

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	19441	056	576	312	168	96	48	24	24				
					3562	1937	1053	572	312	169	91	52	26	13	13			
					3528	1918	1043	567	308	168	91	49	28	14	7	7		
					3708	2016	1096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4	
					3410	1854	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1			
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1				

93

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	19441	056	576	312	168	96	48	24	24				
					3562	1937	1053	572	312	169	91	52	26	13	13			
					3528	1918	1043	567	308	168	91	49	28	14	7	7		
					3708	2016	1096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4	
					3410	1854	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1			
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1				

95

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	19441	056	576	312	168	96	48	24	24				
					3562	1937	1053	572	312	169	91	52	26	13	13			
					3528	1918	1043	567	308	168	91	49	28	14	7	7		
					3708	2016	1096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4	
					3410	1854	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1			
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1				

90

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	19441	056	576	312	168	96	48	24	24				
					3562	1937	1053	572	312	169	91	52	26	13	13			
					3528	1918	1043	567	308	168	91	49	28	14	7	7		
					3708	2016	1096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4	
					3410	1854	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1			
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1				

92

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	19441	056	576	312	168	96	48	24	24				
					3562	1937	1053	572	312	169	91	52	26	13	13			
					3528	1918	1043	567	308	168	91	49	28	14	7	7		
					3708	2016	1096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4	
					3410	1854	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1			
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1				

94

#### 4. 一般化する

- ・ これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- ・ 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					3576	19441	056	576	312	168	96	48	24	24				
					3562	1937	1053	572	312	169	91	52	26	13	13			
					3528	1918	1043	567	308	168	91	49	28	14	7	7		
					3708	2016	1096	596	324	176	96	52	28	16	8	4	4	
					3410	1854	1008	548	298	162	88	48	26	14	8	4	2	2
313	61	705		504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1			
313	61	705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1				

96

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例はトリボナッチ数列の計算盤

					944	1056	576	312	168	96	48	24	24						
					053	572	312	169	91	52	26	13	13						
					67	●	●	●	49	28	14	7	7						
					24	●	●	52	28	16	8	4	4						
					3410	1854	1008	548	298	162	●	48	26	14	8	4	2	2	
					5136	1705	●	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1
					5136	1705	927	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	

例えば、この計算盤の状態を数式にすると次ページのような恒等式を導き出せる

97

## 4. 一般化する

$$\begin{aligned}
 T_m T_n &= T_m T_{n-1} + T_m T_{n-2} + T_m T_{n-3} \\
 &= 2T_m T_{n-2} + 2T_m T_{n-3} + T_m T_{n-4} \\
 &= T_m T_{n-2} + T_{m-1} T_{n-2} + T_{m-2} T_{n-2} + T_{m-3} T_{n-2} \\
 &\quad + T_m T_{n-3} + T_{m-1} T_{n-3} + T_{m-2} T_{n-3} + T_{m-3} T_{n-3} \\
 &\quad + T_m T_{n-4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{m+n-1} &= T_{m+n-5} T_3 + T_{m+n-6} T_3 + T_{m+n-7} T_3 \\
 &\quad + T_{m+n-5} T_2 + T_{m+n-6} T_2 \\
 &\quad + T_{m+n-5} T_1
 \end{aligned}$$

98

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例は4ボナッチ数列の計算盤

					325	1321	●	624	841	435	232	116	58	29	29				
					201	620	●	435	225	120	60	30	15	15					
					64	864	●	232	120	64	32	16	8	8					
					596	3092	1604	832	432	●	116	60	32	16	8	4	4		
					5744	2980	1546	802	416	216	●	58	30	16	8	4	2	2	
					5536	2872	●	773	401	208	108	56	29	15	8	4	2	1	1
					5536	2872	1490	773	401	208	108	56	29	15	8	4	2	1	

4ボナッチ以上も同様に斜めの移動をすることができる

99

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例は4ボナッチ数列の計算盤

					325	1321	●	624	841	435	232	116	58	29	29				
					201	620	840	435	225	120	60	30	15	15					
					64	864	●	232	120	64	32	16	8	8					
					596	3092	1604	832	432	●	116	60	32	16	8	4	4		
					5744	2980	1546	802	416	216	●	58	30	16	8	4	2	2	
					5536	2872	●	773	401	208	108	●	29	15	8	4	2	1	1
					5536	2872	1490	773	401	208	108	56	29	15	8	4	2	1	

4ボナッチ以上も同様に斜めの移動をすることができる

100

## 4. 一般化する

- これまでは、フィボナッチ数列を用いた計算盤で操作を行っていたが、これを違う数列にする
- 下の例は4ボナッチ数列の計算盤

					325	1321	●	624	841	435	232	116	58	29	29				
					201	620	840	435	225	120	60	30	15	15					
					64	864	●	232	120	64	32	16	8	8					
					596	3092	1604	832	432	●	116	60	32	16	8	4	4		
					5744	2980	1546	802	416	216	●	58	30	16	8	4	2	2	
					5536	2872	●	773	401	208	108	●	29	15	8	4	2	1	1
					5536	2872	1490	773	401	208	108	56	29	15	8	4	2	1	

4ボナッチ以上も同様に斜めの移動をすることができる

101

## 5. 最後に

<まとめ>

- 計算のしづらいフィボナッチ2進法の三則はフィボナッチ計算盤を用いることで行える
- フィボナッチ計算盤上でコマを規則に従って動かすことで、多くの恒等式を得ることが出来る
- 等式の正しさは、コマを動かすことで示せる
- フィボナッチをトリボナッチ、4ボナッチ、・・・Nボナッチと拡張していくことで、ネイピアの計算盤と同じ計算盤になる

102

## 5. 最後に

<まとめ>

- フィボナッチ計算盤は、数式変形とコマを動かすことが対応しているため直感的・発展的に計算を行うことが出来る

<今後の課題>

- 割り算をするためのコマの動かし方や恒等式を見つける
- フィボナッチ計算盤の普及と活用を考える
- リュカ数を用いた計算盤についても考察する

103

# Derivative of generating function of the general m-th order linear recurrence sequence 3

中川 幸一 \*

埼玉大学 理工学研究科

2017年8月25日

## 1 Lucas sequence の m 階線形回帰数列

### 1.1 一般項

$$x_{n+m} = \sum_{i=1}^m a_{m-i} x_{n+m-i}$$

という漸化式を考える. この特性方程式は,

$$x^m = \sum_{i=1}^m a_{m-i} x^{m-i}$$

で表され,  $m$  個の解を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  とする. (ただし, 重根は含まない.)

また, 初期条件が,  $x_0 = x_1 = \dots = x_{m-2} = 0, x_{m-1} = 1$  という数列と,  $x_i = \sigma_i$  という数列を考える. ただし,  $\sigma$  は対称式  $\sigma_k = \sum_{i=1}^m x_i^k$  を基本対称式  $s_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  で表したものの.

**定理 1 (Lucas sequence の m 階線形回帰数列の一般項)** 前半の数列を  $U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$ , 後半の数列を  $V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  と表すことにする. このとき一般項は

$$U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^n}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}$$

$$V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^n$$

と表せる.

---

\* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

## 1.2 生成関数

初期条件をはずした数列を  $G_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  とするとこの生成関数は

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n \\ &= G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \dots \\ &= \frac{G_0 + \sum_{l=1}^{m-1} \left( G_l - \sum_{k=1}^l a_{m-k} G_{l-k} \right) x^l}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^j} \end{aligned}$$

となる。よって以下を得る。

**定理 2 (Lucas sequence の  $m$  階線形回帰数列の生成関数)**

$$U(x) = \frac{x^{m-1}}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^j}, \quad V(x) = \frac{m - \sum_{l=1}^{m-1} (m-l) a_{m-l} x^l}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^j}$$

## 1.3 多項式

以前  $U_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  型,  $V_n(a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$  型の二変数の多項式を以下の様に拡張することを提唱した。

$$U_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2} y^m, \dots, a_0 y^{m(m-1)})$$

$$V_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2} y^m, \dots, a_0 y^{m(m-1)})$$

ここでは  $y = 1$  とした今まで通りの一変数の多項式を扱う。便宜上,

$$u_n(x) = U_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2}, \dots, a_0)$$

$$v_n(x) = V_n(a_{m-1} x^{m-1}, a_{m-2} x^{m-2}, \dots, a_0)$$

とする。

このとき先ほど述べた生成関数より

**定理 3 (Lucas sequence の多項式)**

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) y^n &= \frac{y^{m-1}}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^{m-j} y^j} \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) y^n &= \frac{m - \sum_{l=1}^{m-1} (m-l) a_{m-l} x^{m-l} y^l}{1 - \sum_{j=1}^m a_{m-j} x^{m-j} y^j} \end{aligned}$$

を得る。

## 2 リュカ型多項式の微分

### 2.1 リュカ型多項式の生成関数

先ほどの生成関数より以下の多項式の生成関数を得る.

$m$ 階	リュカ型多項式の生成関数
1	$\frac{1}{1-ya_0}$
2	$\frac{2-xya_1}{-a_0y^2-xa_1y+1}$
3	$\frac{-2ya_2x^2-y^2a_1x+3}{-a_0y^3-xa_1y^2-x^2a_2y+1}$
4	$\frac{-3ya_3x^3-2y^2a_2x^2-y^3a_1x+4}{-a_0y^4-xa_1y^3-x^2a_2y^2-x^3a_3y+1}$
5	$\frac{-4ya_4x^4-3y^2a_3x^3-2y^3a_2x^2-y^4a_1x+5}{-a_0y^5-xa_1y^4-x^2a_2y^3-x^3a_3y^2-x^4a_4y+1}$

これには非常に強い規則性があり次頁の事柄が容易に示される.

### 2.2 リュカ型多項式の微分

$m$ 階	リュカ型多項式の微分
2	$na_1u_n(x)$
3	$na_1u_n(x) + 2na_2xu_{n+1}(x)$
4	$na_1u_n(x) + 2na_2xu_{n+1}(x) + 3na_3x^2u_{n+2}(x)$
5	$na_1u_n(x) + 2na_2xu_{n+1}(x) + 3na_3x^2u_{n+2}(x) + 4na_4x^3u_{n+3}(x)$

定理 4 (リュカ型多項式の微分)  $m$  階線形回帰数列のリュカ型多項式  $v_n(x)$  の微分は  $m$  階線形回帰数列のフィボナッチ型多項式  $u_n(x)$  を用いて以下のことが演繹的に分かる.

$$v'_n(x) = \sum_{i=1}^{m-1} ina_i x^{i-1} u_{n+i-1}(x)$$

## 冪和に関するある等式

話題提供者:大関清太

kiyota.ozeki@gmail.com

### 概要

冪和に関する恒等式は色々知られています。  
 特定な項の多項式で表示する。

$$F_m^2 + F_{m-k}^2 = L_k F_{m-\frac{k}{2}}^2 + 2F_{\frac{k}{2}}^2 + (-1)^{m-\frac{k}{2}} 2F_{\frac{k}{2}}^2,$$

$$L_1 L_3 \sum_{k=1}^n F_{2k}^3 = F_{2n+1}^3 - 3F_{2n+1} + 2,$$

因子の積の形で表示する。

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} F_k^4 = \frac{(-1)^{n-1}}{3} F_n F_{n+1} F_{n-2} F_{n+3},$$

$F_n$  は次の漸化式で定義されるフィボナッチ数である。

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_1 = 1, F_2 = 1.$$

$F_n$  の一般項はビネーの公式で次のように表せる。

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

$\alpha, \beta$  は  $x^2 - x - 1 = 0$  の二つの解である。  $\alpha + \beta = 1, \alpha \cdot \beta = -1$ 。

$L_n$  は次の漸化式で定義されるルカ数である。

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, L_1 = 1, L_2 = 3.$$

$L_n$  の一般項はビネーの公式で次のように表せる。

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

定理 1 [?]

$$F_m^4 + F_{m-k}^4 = L_{2k} F_{m-\frac{k}{2}}^4 + 4(-1)^{m-\frac{k}{2}} F_{\frac{k}{2}} F_{\frac{3k}{2}} F_{m-\frac{k}{2}}^2 + 2F_{\frac{k}{2}}^4,$$

$$L_m^4 + L_{m-k}^4 = L_{2k} L_{m-\frac{k}{2}}^4 - 20(-1)^{m-\frac{k}{2}} F_{\frac{k}{2}} F_{\frac{3k}{2}} L_{m-\frac{k}{2}}^2 + 50F_{\frac{k}{2}}^4.$$

論文では  $L_m^8 + L_{m-k}^8$ , ただし  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , まだが求められている。

定理 2 [?]  $m$  はゼロでない整数, $n$  は任意の整数

$$25 \sum_{k=1}^n F_{mk}^4 = \frac{F_{2mn+m}(L_{2mn+m} + 4(-1)^{mn-1}L_m)}{F_{2m}} + 6n + 3.$$

定理 3 [?]  $n, k$  は任意の整数

$$\begin{aligned} F_n^4 + \left((-1)^{k+1}L_{2k} + 1\right)F_{n+k}^4 + \left((-1)^{k+1}L_{2k} + 1\right)F_{n+2k}^4 + F_{n+3k}^4 \\ = F_k L_{2k} F_{3k} F_{2n+3k}^2 + 10(-1)^k F_{k-1} F_k^4 F_{k+1}. \end{aligned}$$

補題 1

$$F_m F_{m-k} = F_{m-\frac{k}{2}}^2 + (-1)^{m-k+1} F_{\frac{k}{2}}^2,$$

$$L_m L_{m-k} = L_{m-\frac{k}{2}}^2 + (-1)^{m-k+1} L_k + (-1)^{m-\frac{k}{2}+1} 2$$

定理 4

$$F_m^{2n} + F_{m-k}^{2n} = \sum_{j=0}^n a_j(n, k) F_{m-\frac{k}{2}}^{2n-2j}$$

と表示でき, $a_j(n, k)$  は一連の漸化式で定義される. 同様にルカ数に関しても成り立つ.

補足:学部生だけを対象にした *Minnesota* 大学の紀要を珍しいと紹介したのですが, ネットで調べたら米国の他の大学でも学部生, 数学以外の専攻生などに門戸を開いている雑誌がありました.

## 参考文献

- [1] K. Adegoke *Sums of fourth powers of Fibonacci and Lucas numbers* arXiv:1706.00407v1, 28 May 2017,1-9
- [2] C. Arangala,B. Hrovat,and J.Kelner *Sums of Powers of Fibonacci and Lucas Numbers*. Minnesota J.Undergraduate Mathematics.Vol.2 No.1(2016) 1-12.
- [3] R.S. Melham *More on combinations of higher powers of Fibonacci numbers* The Fibonacci Quarterly,Vol.48.4(2010):307–311.

講演は間に合わなかったが研究集会報告への投稿です

浜田忠久（東京大学 院）      フィボナッチ数の素因数色彩

## フィボナッチ数の素因数色彩

浜田忠久\* (東京大学)

本稿では、筆者が提案した素因数色彩の概念について説明し、これまでに得られたいくつかの結果を述べた後、フィボナッチ数の素因数色彩について考察する。フィボナッチ数と関わりが薄い命題については、証明を簡略にし、または省略した。また、中村 (2002) 中の定理、公式は証明をつけずに用いた。

### 1 数の素因数色彩

素数を小さい順に  $P_1 (= 2)$ 、 $P_2 (= 3)$ 、 $P_3 (= 5)$ 、 $\dots$  とし、ある自然数  $n$  が

$$n = P_1^{e_1} * P_2^{e_2} * \dots * P_m^{e_m}$$

と素因数分解されるとき、 $n$  に

$$\{e_1, e_2, \dots, e_m, 0, \dots\} = \{\text{ord}_{P_1} n, \text{ord}_{P_2} n, \dots, \text{ord}_{P_m} n, 0, \dots\}$$

という数列を対応させ、その数列を「素因子指数列」と呼ぶことにする。ここで、 $\text{ord}_p n$  は  $n$  の  $p$  進付値であり、有理数や代数的数の場合に自然に拡張することもできるが、本稿では自然数の範囲で議論する。また、素因子指数列を計算する際に指標となる個々の素数  $P_i$  を指標素数と呼ぶことにする。

さて、1 を除く自然数の素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その数の「素因数色彩」と定義し (1 の素因数色彩は  $\{0\}$  (すべての項が 0 の数列) とする)、素因子指数列の最大値を、その数の素因数色彩の強さと定義する。素因数色彩は、その数に含まれる素因数の分布を表す数列といえる。

たとえば、上記の  $n$  の素因子指数列に対し、 $s(n) = \max e_i = \max \text{ord}_{P_i} n$  とおくと  $s(n)$  は  $n$  の素因数色彩の強さを表し、 $n$  の素因数色彩は、

$$\left\{ \frac{e_1}{s(n)}, \frac{e_2}{s(n)}, \dots \right\}$$

となる。なお、素因子指数列を、以下のように「素因数色彩の強さ」と「素因数色彩」の積の形に表すことができる。

$$\{e_1, e_2, \dots\} = s(n) \left\{ \frac{e_1}{s(n)}, \frac{e_2}{s(n)}, \dots \right\}$$

さて、ある数列の各項に対応する素因数色彩に極限が存在するとき、その極限の素因数色彩を極限色彩と呼ぶことにする。いくつか例を示す。

\*taratta@jca.or.jp

階乗数 階乗数  $n = m!$  を小さい順に並べてできる数列の素因子指数列、および素因数色彩は以下の数列に近づく。

$$\begin{aligned} & \left\{ m, \frac{m}{2}, \frac{m}{4}, \dots, \frac{m}{P_{\pi(m)} - 1}, 0, \dots \right\} \\ &= k_n \left\{ \frac{1}{P_1 - 1}, \frac{1}{P_2 - 1}, \dots, \frac{1}{P_{\pi(m)} - 1}, 0, \dots \right\} \\ & \quad (k_n = m, \pi(m) \text{ は } m \text{ 以下の素数の数}) \end{aligned}$$

したがって、階乗数の極限色彩は、

$$\left\{ \frac{1}{P_n - 1} \right\}$$

となる。

高度合成数 高度合成数<sup>1</sup> を小さい順に並べてできる数列の素因子指数列、および素因数色彩は以下の数列に近づく。なお、 $\log$  の底を 2 とする。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{k_n}{\log 2}, \frac{k_n}{\log 3}, \frac{k_n}{\log 5}, \dots, \frac{k_n}{\log P_m}, 0, \dots \right\} \\ &= k_n \left\{ \frac{1}{\log P_1}, \frac{1}{\log P_2}, \dots, \frac{1}{\log P_m}, 0, \dots \right\} \\ & \quad \left( k_n = \frac{\log n}{m}, m \text{ は } n \text{ の相異なる素因子の数} \right) \end{aligned}$$

したがって、高度合成数の極限色彩は、

$$\left\{ \frac{1}{\log n} \right\}$$

となる。

7 以下の自然数の階乗はすべて高度合成数であるが、8 以上の自然数の階乗でかつ高度合成数となるものはない。それは、階乗数の素因子 2 の指数とその階乗数の最大素因子を比較することによって証明できるが、階乗数と高度合成数がそれぞれ異なる極限色彩をもつことから説明できる。

素数階乗数 素数階乗数  $n\# = \prod_{i=1}^{\pi(n)} P_i$  に対応する素因子指数列および素因数色彩は以下の数列となる。

$$\overbrace{\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots\}}^{\pi(n)}$$

したがって、その極限色彩は、 $\{1\}$  である。

<sup>1</sup> ラマヌジャンが考案した概念で、自然数で、それ未満のどの自然数よりも約数の個数が多い数。

## 2 集合の素因数色彩

自然数の有限集合の素因子指数列を、その集合の各元の素因子指数列の項ごとの平均、と定義する。つまり、その集合から無作為に元を取り出したときの各素因子の指数の期待値からなる素因子指数列と考える。

そして、その素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その集合の素因数色彩と定義し、素因子指数列の最大値を、その集合の素因数色彩の強さと定義する。

つまり、自然数の有限集合  $A$  の各元  $n_i$  が  $P_1 (= 2)$ 、 $P_2 (= 3)$ 、 $P_3 (= 5)$ 、 $\dots$ 、の各素数に対して

$$n_i = P_1^{e_{i1}} \cdot P_2^{e_{i2}} \dots P_m^{e_{im}}$$

と素因数分解されるとき、 $A$  の素因子指数列は

$$\left\{ \frac{\sum e_{i1}}{|A|}, \frac{\sum e_{i2}}{|A|}, \dots \right\} = \left\{ \frac{\text{ord}_{P_1}(\prod n_i)}{|A|}, \frac{\text{ord}_{P_2}(\prod n_i)}{|A|}, \dots \right\}$$

となる。 $s(A) = \max_j \left( \frac{\sum e_{ij}}{|A|} \right) = \max_j \left( \frac{\text{ord}_{P_j} \prod e_{ij}}{|A|} \right)$  とおくと  $s(A)$  は  $A$  の素因数色彩の強さを表し、 $A$  の素因数色彩は、

$$\left\{ \frac{\sum e_{i1}}{s(A) |A|}, \frac{\sum e_{i2}}{s(A) |A|}, \dots \right\}$$

となる。なお、素因子指数列を、以下のように「素因数色彩の強さ」と「素因数色彩」の積の形に表すことができる。

$$\left\{ \frac{\sum e_{i1}}{|A|}, \frac{\sum e_{i2}}{|A|}, \dots \right\} = s(A) \left\{ \frac{\sum e_{i1}}{s(A) |A|}, \frac{\sum e_{i2}}{s(A) |A|}, \dots \right\}$$

自然数の無限集合に対しては、その集合の元を小さい順に並べ、最初の  $N$  個からなる有限集合の素因子指数列または素因数色彩について、 $N$  を限りなく大きくしていったときの素因子指数列または素因数色彩の極限が定まるとき、それらをその無限集合の素因子指数列または素因数色彩と定義する<sup>2</sup>。自然数の無限集合の素因子指数列または素因数色彩は、その無限集合の任意の元に対応する素因子指数列または素因数色彩の期待値と考えることができる。

以下、いくつかの例を示す。

<sup>2</sup>必ずしも極限が定まらなくても、各項が  $n$  の関数で近似できるとき、素因子指数列または素因数色彩を  $n$  の関数で表すという考え方もあり得る。

自然数全体の集合  $\mathbb{N}$   $N$  以下の自然数から  $n$  を無作為に採ったとき、 $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値は以下ようになる。

$$E[\text{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{N} \left[ \frac{N}{p^i} \right]$$

$N$  を限りなく大きくしていったときの  $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値の極限は、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{p-1}$$

したがって、任意の自然数  $n$  に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{P_1-1}, \frac{1}{P_2-1}, \dots \right\} \\ & = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \dots \right\} \end{aligned}$$

どれだけ大きい自然数をとっても、その数以下の自然数の素因子  $p$  の指数の期待値は高々  $\frac{1}{p-1}$  ということである。また、興味深いことに、素因数色彩が階乗数と同じ形である (実は当然のことであるが)。自然数の集合の素因数色彩を自然色彩と呼ぶことにする。

**偶数** 最初の  $N$  個の偶数から  $n = 2m$  ( $1 \leq m \leq N$ ) を無作為に採ったとき、 $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値は以下ようになる。

$p = 2$  の場合

$$E[\text{ord}_p n] = 1 + \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{[N]} \left[ \frac{N}{p^i} \right]$$

$p > 2$  の場合

$$E[\text{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{[N]} \left[ \frac{N}{p^i} \right]$$

$N$  を限りなく大きくしていったときの  $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値の極限は、

$p = 2$  の場合

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p n] = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} = 1 + \frac{1}{p-1} = 2$$

$p > 2$  の場合

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{p-1}$$

したがって、任意の偶数  $n = 2m$  に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となる。

$$\left\{ 2, \frac{1}{P_2-1}, \frac{1}{P_3-1}, \dots \right\}$$

$$= 2 \left\{ 1, \frac{1}{2(P_2-1)}, \frac{1}{2(P_3-1)}, \dots \right\}$$

**奇数** 最初の  $N$  個の奇数から  $n = 2m - 1$  ( $1 \leq m \leq N$ ) を無作為に採ったとき、 $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値は以下のようになる。

$p = 2$  の場合

$$E[\text{ord}_p n] = 0$$

$p > 2$  の場合

$$E[\text{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p(2N-1) \rfloor} \frac{1}{N} \left( \left\lfloor \frac{2N-1}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{p^i} \right\rfloor \right)$$

$N$  を限りなく大きくしていったときの  $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値の極限は、

$p = 2$  の場合

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p n] = 0$$

$p > 2$  の場合

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{p-1}$$

したがって、任意の奇数  $n = 2m - 1$  に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となる。

$$\left\{ 0, \frac{1}{P_2-1}, \frac{1}{P_3-1}, \dots \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 0, \frac{2}{P_2-1}, \frac{2}{P_3-1}, \dots \right\}$$

三角数 最初の  $N$  個の三角数から  $n = \frac{m(m+1)}{2}$  ( $1 \leq m \leq N$ ) を無作為に採ったとき、 $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値を求めてみる。

$p = 2$  の場合

$$E[\text{ord}_p n] = -1 + \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{N} \left[ \frac{N}{p^i} \right] + \sum_{i=1}^{[\log_p(N+1)]} \frac{1}{N} \left[ \frac{N+1}{p^i} \right]$$

$p > 2$  の場合

$$E[\text{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{N} \left[ \frac{N}{p^i} \right] + \sum_{i=1}^{[\log_p(N+1)]} \frac{1}{N} \left[ \frac{N+1}{p^i} \right]$$

$N$  を限りなく大きくしていったときの  $n$  の素因子  $p$  の指数の期待値の極限は、

$p = 2$  の場合

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p n] = -1 + 2 \cdot \frac{1}{p-1} = 1$$

$p > 2$  の場合

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p n] = 2 \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{2}{p-1}$$

したがって、任意の三角数  $n = \frac{m(m+1)}{2}$  に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となる。

$$\left\{ \frac{1}{P_1-1}, \frac{2}{P_2-1}, \frac{2}{P_3-1}, \dots \right\} = \left\{ 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

つまり、 $\mathbb{N}$  とほぼ同じ形であるが、2 の指数の期待値だけ、 $\mathbb{N}$  の場合の半分になっている。偶数と対称的である。

さらに四角数 (平方数)、五角数、一般の多角数<sup>3</sup>、 $n$  次元多胞体数などについても考察が可能である。

<sup>3</sup>  $n$  番目の  $p$  角数は  $\frac{(p-2)n^2 - (p-4)n}{2}$  と表せる。

### 3 フィボナッチ数の素因数色彩

最初の  $N$  個のフィボナッチ数

$$F(m) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right) \quad (1 \leq m \leq N)$$

から  $F(m)$  を無作為に採ったとき、 $F(m)$  の素因子  $p$  の指数の期待値を求めてみる。  
 まず、フィボナッチ数の強整除性により、 $m > 2$  のとき、 $m \mid n \iff F(m) \mid F(n)$  なの  
 で、自然数  $m$  のエントリー・ポイント<sup>4</sup> を  $a(m)$  と置くと、

$$E[\text{ord}_p F(m)] = \sum_{i=1, a(p^i) \leq N}^{\infty} \frac{1}{N} \left[ \frac{N}{a(p^i)} \right]$$

$$\therefore \lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p F(m)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a(p^i)}$$

が成り立つ。したがって、各  $p^i$  のエントリー・ポイントが決まれば、素因子指数列  
 を計算することができる。ここで、以下の命題が成り立つ<sup>5</sup>。

**命題 1.** 任意の奇素数  $p$  および  $0$  以上の整数  $n$  に対して

$$\text{ord}_p F(a(p) * p^n) - \text{ord}_p F(a(p)) = n$$

が成り立つ<sup>6</sup>。この式は  $p = 2, n = 0$  に対しても成り立つが、 $1$  以上の整数  $n$  に対しては

$$\text{ord}_2 F(a(2) * 2^n) - \text{ord}_2 F(a(2)) = n + 1 \quad \text{すなわち} \quad \text{ord}_2 F(a(2) * 2^n) = n + 2$$

が成り立つ。□

**証明.**  $m$  番目のフィボナッチ数は

$$F(m) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right)$$

と表され、 $m$  番目のリュカ数は

$$L(m) = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m$$

と表される。したがって、

$$\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m = \frac{L(m) + F(m) \sqrt{5}}{2} \tag{1}$$

<sup>4</sup>任意の自然数  $m$  に対して、 $m$  でわりきれないフィボナッチ数  $F(n)$  が存在するが、このような  $n$  のうちで最小の自然数を、 $m$  のエントリー・ポイントと言う。

<sup>5</sup>証明にあたり、水谷一氏から多大なる助言をいただいた。

<sup>6</sup> $p = 5$  の場合は  $a(5) = 5$  なので  $a(5) * 5^n = 5^{n+1}$  となり、注意が必要である。

が成り立つ。2次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  において、 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m$  は  $a_m + b_m \sqrt{5}$  ( $a_m, b_m \in \mathbb{Q}$ ) の形に一意に表されるが、式(1)は、その時の  $\sqrt{5}$  の係数  $b_m$  が  $\frac{F(m)}{2}$  に他ならないことを示す。

さて、 $F(m)$  が素数  $p$  の倍数となるとき、 $F(m) = k p^e$ ,  $(p, k) = 1$  ( $k, e$  は自然数) とおけることから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m &= \frac{L(m) + k p^e \sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m p} &= \left(\frac{L(m) + k p^e \sqrt{5}}{2}\right)^p \\ &= \frac{1}{2^p} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} L(m)^{p-i} (k p^e \sqrt{5})^i \\ &= \frac{1}{2^p} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2i} L(m)^{p-2i} (k p^e)^{2i} 5^i + \sqrt{5} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \binom{p}{2i+1} L(m)^{p-2i-1} (k p^e)^{2i+1} 5^i \right) \\ \therefore F(m p) &= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \binom{p}{2i+1} L(m)^{p-2i-1} (k p^e)^{2i+1} 5^i \quad (2) \end{aligned}$$

$(F(m), L(m)) = 1$  または  $2$  なので、 $p$  が奇素数のとき、 $p \nmid L(m)$  であるから、式(2)の  $p$  の指数に注目すると、

$$\text{ord}_p F(m p) = e + 1$$

よって  $p$  が奇素数の場合は証明された。

$p = 2$  の場合、任意の自然数  $n$  について

$$F(2n) = F(n) L(n)$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \text{ord}_2 F(2m) &= \text{ord}_2 F(m) + \text{ord}_2 L(m) \\ \therefore \text{ord}_2 F(2^e m) - \text{ord}_2 F(2^{e-1} m) &= \text{ord}_2 L(2^{e-1} m) \end{aligned}$$

である。また、

$$L(2m) = L(m)^2 + (-1)^{m-1} \cdot 2$$

より、 $L(m)$  が偶数であれば  $\text{ord}_2 L(2m) = 1$  であり、さらに  $\text{ord}_2 L(2^e m) = 1$  ( $e \geq 1$ ) すなわち

$$\text{ord}_2 F(2^e m) - \text{ord}_2 F(2^{e-1} m) = 1 \quad (e \geq 2)$$

である。

$a(2) = 3$ ,  $F(3) = 2$ ,  $L(3) = 4$  であるから、 $p = 2$  の場合についても証明された。 ■

ここで、フィボナッチ数全体の素因子指数列および素因数色彩を計算してみる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_2 F(m)] = \frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{12 \cdot 2^i} = \frac{5}{6}$$

奇素数  $p$  については、命題 1 より、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_p F(m)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a(p) \cdot p^i} = \frac{p}{a(p)(p-1)}$$

よって、

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_3 F(m)] &= \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{ord}_5 F(m)] &= \frac{5}{5 \cdot 4} = \frac{1}{4} \\ &\dots \end{aligned}$$

したがって、任意のフィボナッチ数  $F(m)$  に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{48}, \frac{11}{100}, \frac{13}{84}, \frac{17}{144}, \frac{19}{324}, \frac{23}{528}, \frac{29}{392}, \dots \right\} \\ &= \frac{5}{6} \left\{ 1, \frac{9}{20}, \frac{3}{10}, \frac{7}{40}, \frac{33}{250}, \frac{13}{70}, \frac{17}{120}, \frac{19}{270}, \frac{23}{440}, \frac{87}{980}, \dots \right\} \end{aligned}$$

表 1 にフィボナッチ数全体の素因子指数列および素因数色彩の近似値を示す。

表 1. フィボナッチ数全体の素因子指数列および素因数色彩 ( $p = 19$  まで)

$p$	2	3	5	7	11	13	17	19
素因子指数列	0.8333	0.375	0.25	0.1458	0.11	0.1548	0.1181	0.0586
素因数色彩	1	0.45	0.3	0.175	0.132	0.1857	0.1417	0.0704

なお、 $p > 5$  で、 $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$  (平方剰余) つまり  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  のとき、

$F(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$  であり、 $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$  (平方非剰余) つまり  $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  のとき、

$F(p+1) \equiv 0 \pmod{p}$  であるから、 $a(p)$  は  $p - \left(\frac{5}{p}\right)$  の約数ということがいえる。

また、 $p$  の大きさの割に  $a(p)$  が小さい数、つまりフィボナッチ数の素因数として早めに現れる数、13、17、89、233、1597 などの指標素数に対する値は自然色彩に比べて高くなることになる。これはフィボナッチ数全体の素因数色彩の特徴の一つといえる。

## 4 今後の方向性

$p < 100,000$  となるすべての素数について、エントリー・ポイントにおけるフィボナッチ数を素因数分解したときの  $p$  の指数が 1 であることを確認した。そこで、以下の命題が成り立つと予想する。

予想 1. 任意の素数  $p$  について  $\text{ord}_p F(a(p)) = 1$  □

この予想が成り立つなら、命題 1 は次のように言い換えることができる。

予想 2. 任意の奇素数  $p$  および 0 以上の整数  $n$  に対して

$$\text{ord}_p F(a(p) * p^n) = n + 1$$

が成り立つ。この式は  $p = 2, n = 0$  に対しても成り立つが、1 以上の整数  $n$  に対しては

$$\text{ord}_2 F(a(2) * 2^n) = n + 2$$

が成り立つ。 □

現時点ではこれらの予想は真偽を明言できないが、今後明らかにしたいと考える。

なお、本稿は主にフィボナッチ数を扱ったが、同様の議論が、リュカ数、一般フィボナッチ数列、一般リュカ数列、ワイソフ配列などについても行える。また、素因数色彩の理論は研究を開始したばかりであり、さらなる探究を行い、その結果をフィボナッチ数の研究に適用していきたいと考えている。

## 謝辞

本稿をまとめるにあたり、多くの方々にご助力いただきましたことを、心より感謝申し上げます。特に、水谷一氏から、命題 1 の証明のアイデアについて、有意義な助言をいただきました。また、素因数色彩の理論の構築にあたり、飯高茂先生には講座における発表の機会をいただき、日本数学協会、数理ゼミナール他の皆様からも貴重なコメントをいただきました。ありがとうございました。

## 参考文献

中村滋 (2002). 『フィボナッチ数の小宇宙 (マイクロコスモス) — フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割』日本評論社.

(当文献では、自然数  $m$  のエントリー・ポイントを  $d(m)$  と表記しているが、本稿では  $m$  の約数の数  $d(m)$  との混同を避けるため、 $a(m)$  と表記した。)