日本フィボナッチ協会
第19回研究集会報告書

Fibonacci

2021年9月

日本フィボナッチ協会

フィボナッチ数に関心のある皆様

2021 年 8 月に行われる予定のフィボナッチ研究集会も，新型コロナの終息が見えない中，昨年に続き中止にしました。

1．研究集会での発表原稿を基にした冊子の代わりに投稿原稿を全員に配信してコメントを集め参考にして最終稿にする。一部紙媒体として保存。

2．休憩時間や懇親会での交流時間の代わりにニュースレターを通して近況報告を配信する。

頂いた原稿は一部修正がありましたが，昨年同様全員に配信し一部は紙媒体として保存。原稿の締め切りは 8 月 21 日，配信は 9 月 21 でしたが，少しずれ 10 月になりました。報告集は対面を前提としたもので，コロナ禍では大きく変わりましたが，冊子のタイトルは継続性を考え『第 19 回日本フィボナッチ研究集会報告』としました。 今まで大変な時期もありましたが皆様のサポートで乗り越えてきました。来年の状況は全く分かりませんが，収束の兆しが見えれば 1 月から 3 月に日程調整，4 月に会場と懇親会会場の申し込みを予定しています。

日本フィボナッチ協会代表　大関清太

目 次

第 19 回日本フィボナッチ研究集会原稿の目次

多角形線型連結有向グラフとフィボナッチ多項式

柏原 藍 [*]　　市川 裕子 [†]　　南出 大樹 [‡]

概要

2019 年，越高と井手はポリアセンの芳香族性を評価するために，化学的な数値である NICS(1) と数学的な数値であるグラフの固有値との相関を調べ，その関係式を推定した [Kos]．越高は，その論証において，6 角形 r 環線型連結有向グラフの正実固有値は $\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor$ 個であると予想したが，その証明は残さなかった．本稿では，偶数角形 r 環線型連結有向グラフの固有多項式とフィボナッチ多項式との関係を見出したことで，越高予想を拡張した形で解決した上に，その固有値の一般形が得られたことを報告する．

1　序論

近年，化学分野の研究にグラフ理論を応用するべく，グラフの特性量と化学的性質との関係が考察されている [Hos1][Hos2]．その一例として，磁場中に置かれた環状化合物の環の中心での遮蔽効果の大きさを示す NICS(nucleus-independent chemical shift) が挙げられる [NICS]．具体的には，越高と井手が，ポリアセンの各環における NICS(1) と，対応するグラフの固有値の絶対値の 2 乗を関係付けた (図 1)．特に，端環の NICS(1) と最小正実固有値の 2 乗は，環数の偶奇それぞれで，$y = 7.1384x + 1.4655\,(\mathrm{R}^2 = 0.9994)$，$y = 10.843x + 1.6219\,(\mathrm{R}^2 = 0.9997)$ と非常に良い線型性が得られている [Kos]．

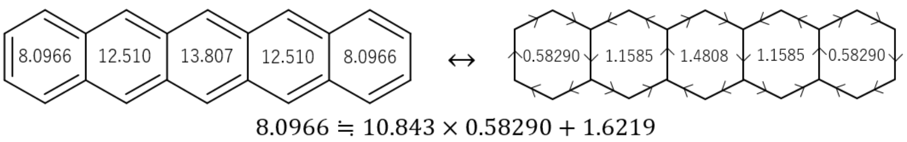


図 1　ペンタセンの NICS(1) と対応するグラフの固有値の絶対値の 2 乗

越高は，6 角形を直線状に連結させた有向グラフの固有値を求める過程において，環数が r である時，その固有値のうち正実数であるものは $\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor$ 個であると予想した．我々は，本研究において，越高の予想を $2n$ 角形 r 環に拡張し，次の結果を得た．

[*] 東京高専物質工学科　s18039@tokyo.kosen-ac.jp
[†] 東京高専一般教育科/KOSEN-KMUTT　yuko@tokyo-ct.ac.jp
[‡] 東京高専一般教育科/東工大　minamide@tokyo-ct.ac.jp

主結果. $2n$ 角形 r 環線型連結有向グラフ（定義 2.1）の固有多項式はフィボナッチ多項式 $F_r(x)$ と次の関係式を持ち，故に一般項が求まる.

$$\begin{aligned} P_{2n,r} &= (-i)^{r+1}\lambda^{(n-2)(r-1)}F_{r+2}(i\lambda^n) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor} (-1)^{2rn+k}\binom{r+1-k}{k}\lambda^{(2n-2)r+2-2nk} \end{aligned}$$

系. $2n$ 角形 r 環線型連結有向グラフの固有値は，重複度 $2(nr-r+1-n)\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ の 0 と，$1 \le k \le \lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ に対応する正実数 $4\cos^2\left(\frac{k}{r+2}\pi\right)$ の複素 $2n$ 乗根 $2n\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ 個である.

また，本研究で得られた固有値の一般形を越高と井手による関係式に代入することで，ポリアセンの端環における NICS(1) の予測値を具体的に表示することが可能となった.

- 奇数 r 個連結に対する端環の NICS(1)($\times -1$)/ppm の予測値

$$1.6219 + 17.212\cos^{\frac{2}{3}}\left(\frac{r+1}{2r+4}\pi\right)$$

- 偶数 r 個連結に対する端環の NICS(1)($\times -1$)/ppm の予測値

$$1.4655 + 11.332\cos^{\frac{2}{3}}\left(\frac{r}{2r+4}\pi\right)$$

2　線型連結有向グラフ

定義 2.1. $n, r \in \mathbb{N}$（$n \ge 2$）に対し，$2n$ 角形 r 環線型連結有向グラフ $\mathrm{G}_{2n,r}$ を次で定義する.

1. $2n$ 角形を直線上に r 個配置した連結グラフ
2. 隣り合う 2 環は 1 辺を共有する
3. 各環の辺は一周するように向き付けられている

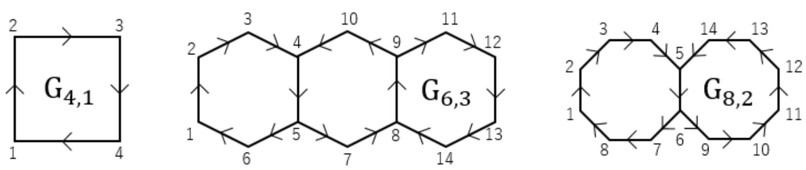


図 2　$\mathrm{G}_{2n,r}$ の例

定義 2.2. $\mathrm{G}_{2n,r}$ の隣接行列を $M_{2n,r}$ で表し，$M_{2n,r}$ の固有多項式を $P_{2n,r}$ と書く.

4 角形 3 環線型連結有向グラフの固有多項式は 8 次単位行列 E_8 を用いて次のように計算される.

$$P_{4,3} = \det(M_{4,3} - \lambda E_8) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^8 - 3\lambda^4 + 1$$

今後，行列における 0 の要素は全て空白で示す.

ここで，同一グラフにおける頂点の番号付けの入れ換えは，行列における基本変形に対応するため，固有多項式に影響が無いことを注意しておく．実際，$\mathrm{G}_{4,2}$ における頂点 1 と頂点 3 の番号付けを入れ換えたグラフを考える.

図 3　$G_{4,2}$ における頂点 1 と頂点 3 の入れ換え

この時，$\mathrm{G}'_{4,2}$ の隣接行列 $M'_{4,2}$ は第 1 行と第 3 行，第 1 列と第 3 列を入れ換えることで，$\mathrm{G}_{4,2}$ の隣接行列 $M_{4,2}$ と一致する.

$$\begin{aligned} \det M'_{4,2} &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & & & 1 & & \\ 1 & -\lambda & & & & \\ & 1 & -\lambda & & & \\ & & 1 & -\lambda & 1 & \\ & & & & -\lambda & 1 \\ 1 & & & & & -\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} & 1 & -\lambda & & & \\ 1 & -\lambda & & & & \\ -\lambda & & & 1 & & \\ & & 1 & -\lambda & 1 & \\ & & & & -\lambda & 1 \\ 1 & & & & & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ & -\lambda & 1 & & & \\ & & -\lambda & 1 & & \\ 1 & & & -\lambda & 1 & \\ & & & & -\lambda & 1 \\ & & 1 & & & -\lambda \end{bmatrix} = \det M_{4,2} \end{aligned}$$

補題 2.3. $n \geq 2$ を固定する．このとき，$P_{2n,r}$ は，r に関して次の漸化式を満たす.

$$P_{2n,1} = \lambda^{2n} - 1, \qquad P_{2n,2} = \lambda^{4n-2} - 2\lambda^{2n-2}, \qquad P_{2n,r+2} = \lambda^{2n-2} P_{2n,r+1} - \lambda^{2n-4} P_{2n,r}$$

証明. (i) $r = 1$ に関して

第 $2n$ 列における余因子展開を行うと，次のようになる．

$$P_{2n,1}=\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ 1 & & & & -\lambda \end{bmatrix}=\lambda^{2n}-1$$

(ii) $r=2$ に関して

$r=1$ の場合と同様に最終列における余因子展開を考える．

$$P_{2n,2}=\det\left[\begin{array}{c|cccc} M_{2n,1} & 1 & & & \\ \hline & -\lambda & 1 & & \\ & & -\lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & -\lambda \end{array}\right]=\lambda^{4n-2}-2\lambda^{2n-2}$$

(iii) 一般の漸化式に関して

(i)(ii) と同様に，最終列である第 $2n+2r(n-1)$ 列における余因子展開を考えると，

$$P_{2n,r+2}=\det\left[\begin{array}{c|cccc} M_{2n,r+1} & 1 & & & \\ \hline & -\lambda & 1 & & \\ & & -\lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & -\lambda \end{array}\right]=\lambda^{2n-2}P_{2n,r+1}-K_{2n,r+2}$$

と分解される．ここで，$K_{2n,r+2}$ は次のような行列の行列式である．

$$K_{2n,r+2}=\det\left[\begin{array}{c|cccc|ccccc} M_{2n,r} & 1 & & & & & & & & \\ \hline & -\lambda & 1 & & & & & & & \\ & & -\lambda & \ddots & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & & -\lambda & & & & & \\ \hline & & & & & -\lambda & 1 & & & \\ & & & & & & -\lambda & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & & & -\lambda & 1 \\ & & 1 & & & & & & & \end{array}\right]$$

前半部分は望む形であるから $K_{2n,r+2}$ を調べればよい．最終行で余因子展開した後に，最終列から順々に余因子展開を行うことで，$K_{2n,r+2} = \lambda^{2n-4}P_{2n,r}$ を得る．故に，題意が示された． □

定理 2.4. $P_{2n,r}$ はフィボナッチ多項式 $F_r(x)$ により次のように表される。

$$\begin{aligned} P_{2n,r} &= (-i)^{r+1}\lambda^{(n-2)(r-1)}F_{r+2}(i\lambda^n) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{r+1-k}{k} \lambda^{(2n-2)r+2-2nk} \end{aligned}$$

特に $P_{2n,r}$ の係数は，$F_{r+2}(X)$ の係数を最大次数を正として正負交互にしたものと一致している．

表 1　$2 \le n \le 5,\ 1 \le r \le 5$ に対する $P_{2n,r}$

$2n\backslash r$	1	2	3	4	5
4	λ^4-1	$\lambda^6-2\lambda^2$	$\lambda^8-3\lambda^4+1$	$\lambda^{10}-4\lambda^6+3\lambda^2$	$\lambda^{12}-5\lambda^8+6\lambda^4-1$
6	λ^6-1	$\lambda^{10}-2\lambda^4$	$\lambda^{14}-3\lambda^8+\lambda^2$	$\lambda^{18}-4\lambda^{12}+3\lambda^6$	$\lambda^{22}-5\lambda^{16}+6\lambda^{10}-\lambda^4$
8	λ^8-1	$\lambda^{14}-2\lambda^6$	$\lambda^{20}-3\lambda^{12}+\lambda^4$	$\lambda^{26}-4\lambda^{18}+3\lambda^{10}$	$\lambda^{32}-5\lambda^{24}+6\lambda^{16}-\lambda^8$
10	$\lambda^{10}-1$	$\lambda^{18}-2\lambda^8$	$\lambda^{26}-3\lambda^{16}+\lambda^6$	$\lambda^{34}-4\lambda^{24}+3\lambda^{14}$	$\lambda^{42}-5\lambda^{32}+6\lambda^{22}-\lambda^{12}$

表 2　フィボナッチ多項式 $F_r(x)$

$r=3$	4	5	6	7
x^2+1	x^3+2x	x^4+3x^2+1	x^5+4x^3+3x	$x^6+5x^4+6x^2+1$

証明．第 2 辺が補題 2.3 で得た漸化式を満たすことが示されれば充分である．

$r=1,2$ のときは，直接計算より，それぞれ

$$-F_3(i\lambda^n) = -\left\{(i\lambda^n)^2+1\right\} = \lambda^{2n}-1$$

$$i\lambda^{n-2}F_4(i\lambda^n) = i\lambda^{n-2}\left\{(i\lambda^n)^3+2(i\lambda^n)\right\} = \lambda^{4n-2}-2\lambda^{2n-2}$$

となり成立している．一般の漸化式に関しては，フィボナッチ多項式が

$$F_{r+2}(x) = xF_{r+1}(x)+F_r(x)$$

を満たすことに注意することで，

$$\begin{aligned} &(-i)^{r+3}\lambda^{(n-2)(r+1)}F_{r+4}(i\lambda^n) \\ &\qquad = (-i)^{r+3}\lambda^{(n-2)(r+1)}\left\{i\lambda^n F_{r+3}(i\lambda^n)+F_{r+2}(i\lambda^n)\right\} \\ &\qquad = (-i)^{r+2}\lambda^{(n-2)(r+1)}\lambda^n F_{r+3}(i\lambda^n) - (-i)^{r+1}\lambda^{(n-2)(r+1)}F_{r+2}(i\lambda^n) \\ &\qquad = \lambda^{2n-2}\left\{(-i)^{r+2}\lambda^{(n-2)r}F_{r+3}(i\lambda^n)\right\} - \lambda^{2n-4}\left\{(-i)^{r+1}\lambda^{(n-2)(r-1)}F_{r+2}(i\lambda^n)\right\} \end{aligned}$$

となり，成り立つ．また，最後の等式は，フィボナッチ多項式の一般項が

$$F_r(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \binom{r-1-k}{k} x^{r-1-2k}$$

であることから，直接計算によって容易に確かめられる． □

系 2.5. $2n$ 角形 r 環線型連結有向グラフ $\mathrm{G}_{2n,r}$ の固有値は，重複度 $2nr-2r+2-2n\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ の 0 と，$1 \leq k \leq r+1$ に関する正実数 $4\cos^2\left(\frac{k}{r+2}\pi\right)$ の複素 $2n$ 乗根 $2n\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ 個である．

証明．0 の重複度は，定理 2.4 で求めた $P_{2n,r}$ の最小次数から $2nr-2r+2-2n\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ であることが分かる．また，0 以外の固有値に関しては，最大次数 $2nr-2r+2$ との差である $2n\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ 個の解を直接求めることで証明とする．まず，フィボナッチ多項式 $F_{r+2}(x)$ の根は，[HB] より

$$x = 2i\cos\frac{k}{r+2}\pi \qquad\qquad 1 \leq k \leq r+1$$

であることが知られている．これより，$\lambda^n = -ix = 2\cos\frac{k}{r+2}\pi$ を満たす λ を決定すればよい．ここで，$-ix = 0 \iff \frac{k}{r+2} = \frac{1}{2}$ であることに注意すると，λ^n として取りうる値の内 0 でないものは，正負それぞれ $\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ 種類である．以上から，$\mathrm{G}_{n,r}$ の固有値は，実数 $2\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ とその n 乗根であることが示された． □

3 鎖状連結有向グラフ

本稿における結果は，定義 2.1 を

1. n 角形を r 個配置した連結グラフ
2. 隣り合う 2 環は 1 辺を共有する
3. どの 3 環も 1 頂点や 1 辺を共有しない
4. 辺の数が $n+(n-1)r$，頂点の数が $n+(n-2)r$
5. 各環の辺は一周するように向き付けられている

と加筆修正することで，4 以上の自然数 n に関するグラフ「n 角形 r 環鎖状連結有向グラフ」へと拡張される．本章では，これまでに得られている n 角形 r 環鎖状連結有向グラフ $\mathrm{G}_{n,r}$ とその固有多項式 $P_{n,r}$ に関する類似の結果を紹介する．詳細は [KM] を参照されたい．

命題 3.1. $\mathrm{G}_{n,r}$ は，定義の条件下において結合の仕方に依らず，その固有多項式は不変である．

定理 3.2. $P_{n,r}$ は，r 頂点経路無向グラフ P_r の固有多項式 $P_{\mathrm{P}_r} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}(-1)^r\binom{r-k}{k}x^{r-2k}$ を用

いて，次のように表される．

$$
\begin{aligned}
P_{n,r} &= (-1)^{rn}\ \lambda^{(r-1)\left(\frac{n}{2}-2\right)}\, P_{\mathrm{P}_{r+1}}\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor} (-1)^{rn+k} \binom{r+1-k}{k} \lambda^{(n-2)r+2-nk}
\end{aligned}
$$

ここで，r 頂点経路無向グラフ P_r の固有多項式に関する議論は，[Hos2] による．

系 3.3. $n \geq 4$ とする $P_{n,r}$ の固有値は，重複度 $nr-2r+2-n\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ の 0 と，$1 \leq k \leq r+1$ に関する正実数 $4\cos^2\left(\frac{k}{r+2}\pi\right)$ の複素 n 乗根 $n\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ 個である．よって，複素平面上に $\mathrm{G}_{n,r}$ の固有値を配置すると，1 頂点を正の実数軸，中心を原点に取る正 n 角形が $\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor$ 個出現する．

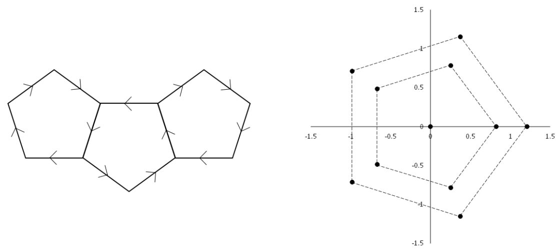


図 4　5 角形 3 環鎖状連結有向グラフと複素平面への固有値配置

謝辞

本研究を行うにあたり，東京工業高等専門学校物質工学科の井手智仁准教授には，問題背景をご教授頂いた上に，実験機材の提供もして下さいました．ここに感謝の意を申し上げさせて頂きます．

参考文献

[NICS] P. von R. Schleyer, C. Maerker, A. Dransfeld, H. Jiao, N. J. R. van E. Hommes『Nucleus-Independent Chemical Shifts: A Simpleand Efficient Aromaticity Probe』, J. Am. Chem. Soc. 118(1996)p6317-6318

[HB] V. E. Hoggatt, Jr, M. Bicknell『Roots of Fibonacci Polynomials』, Fibonacci Quarterly 11 (1973) p271-274.

[Hos1] 細矢治夫『トポロジカル・インデックス–フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学–』，日本評論社 (2012)

[Hos2] 細矢治夫，はじめての構造化学 –構造化学のなぜに答える–，オーム社 (2013)

[KM] A. Kashihara, H. Minamide『Eigenvalues of Connected n-gonal Digraphs』，preprint.

[Kos] 越高陸『代数的グラフ理論の π 共役化合物への応用』，東京工業高等専門学校物質工学科卒業研究論文 (2019)

乗数 h 付きオイラー双子型メルセンヌ超完全数

梶田 光

2021 年 9 月 12 日

1 はじめに

最近, 飯高先生のウルトラオイラー完全数 [1] からオイラー双子型メルセンヌ超完全数を定義した.
これは $2^e+m+1, 2^e+m-1 \in \mathrm{prime}$ と表される双子素数をもとに定義されている.
今回扱う乗数 h 付きオイラー双子型メルセンヌ超完全数はこれに乗数をつけたもの, つまり
$h\cdot 2^e+m+1, h\cdot 2^e+m-1 \in \mathrm{prime}$ をもとに定義する.
具体的には, $a=h\cdot 2^e+m+1 \in \mathrm{prime}, A=2^e, B=h\cdot 2^e+m-1 \in \mathrm{prime}$ とおくと,
$\varphi(A)=2^e$ より $a=2h\varphi(A)+m+1$
$\varphi(B)=h\cdot 2^e+m-2$ より $hA=\varphi(B)-m+2$
$\varphi(a)=h\cdot 2^e+m$ より $B=\varphi(a)-1$
が成り立つ.(ただし a, B, h は奇素数とする.)

$$\begin{cases} a=2h\varphi(A)+m+1 \\ hA=\varphi(B)-m+2 \\ B=\varphi(a)-1 \end{cases} \tag{1}$$

これを乗数 h, 平行移動 m のオイラー双子型メルセンヌ超完全数とする.

2 m : even の場合

2.1 定理

定義したとき, a は奇素数だったため, m は偶数である.
そのためそこから得られた方程式では, m : even のときはもとの定義に戻ると考えられる.

定理 1. m : even のとき, オイラー双子型メルセンヌ超完全数の解は $a=h\cdot 2^e+m+1, A=2^e, B=h\cdot 2^e+m-1$ である.

Proof. まず, $B=1$ とすると $\varphi(a)=2$ より $a=4,6$ となるがこれは $a=2h\varphi(A)+m+1:\mathrm{odd}$ であることに矛盾.
次に, $B=2$ とすると $\varphi(a)=3$ となるが $\varphi(a)=1,\mathrm{even}$ より矛盾.
よって, $B>2$, つまり $\varphi(B):\mathrm{even}$ より $A:\mathrm{even}=2^eL(e>0, L:\mathrm{odd})$ と書くことができる.
これを定義式に代入すると

$a = h \cdot 2^e \varphi(L) + m + 1, h \cdot 2^e L = \varphi(B) - m + 2$ が得られる.

$h \cdot 2^e \varphi(L), h \cdot 2^e L$ を合わせて引くと $h \cdot 2^e \mathrm{co}\varphi(L) = \varphi(B) - a + 3$ となる.

また $B = \varphi(a) - 1$, つまり $0 = B - \varphi(a) + 1$ よりこれを上式と比較すると

$h \cdot 2^e \mathrm{co}\varphi(L) = -\mathrm{co}\varphi(B) - \mathrm{co}\varphi(a) + 2$, つまり $h \cdot 2^e \mathrm{co}\varphi(L) + \mathrm{co}\varphi(B) + \mathrm{co}\varphi(a) = 2$ となる.

$h > 2$ より $\mathrm{co}\varphi(B) = \mathrm{co}\varphi(a) = 1, \mathrm{co}\varphi(L) = 0$ となる.

よって $A = 2^e$, また $a, B \in \mathrm{prime}$ がわかる.

$a = 2h\varphi(A) + m + 1$ から $a = h \cdot 2^e + m + 1$, $B = \varphi(a) - 1$=$a - 2$ より $B = h \cdot 2^e + m - 1$ である.

以上より $m : \mathrm{even}$ のとき, オイラー双子型メルセンヌ超完全数の解は

$a = h \cdot 2^e + m + 1, A = 2^e, B = h \cdot 2^e + m - 1$ である. □

2.2 例

比較的同じ m に対しての解が多かったものを示す.($h = 3$ とする.)

a	A	B
$m = -6$		
7	2^2	5
19	2^3	17
43	2^4	41
98299	2^{15}	98297
844424930131963	2^{48}	844424930131961
$m = 6$		
13	2^1	11
19	2^2	17
31	2^3	29
103	2^5	101
199	2^6	197
1572871	2^{19}	1572869
12582919	2^{22}	12582917
$m = 768$		
1153	2^7	1151
49921	2^{14}	49919
N_3	2^{319}	N_4

$N_3 = 320398055388136512359253255925432817190405678353497915492056241173332958867096082503444313040563\,3,$

$N_4 = 3203980553881365123592532559254328171904056783534979154920562411733329588670960825034443130405631.$

3　m : odd の場合

m : odd のとき, $2h\varphi(A)$: even, $m+1$: even より a : even $= 2^e L(e > 0, L : \text{odd})$ と書ける.
これを定義式に代入すると $2^e L = 2h\varphi(A) + m + 1, hA = \varphi(B) - m + 2$, $B = 2^{e-1}\varphi(L) - 1$
$2B = 2^e\varphi(L) - 2$, つまり $2^e\varphi(L) = 2B + 2$ であるからこれを $2^e L = 2h\varphi(A) + m + 1$ と比較すると
$2^e \mathrm{co}\varphi(L) = 2h\varphi(A) - 2B + m - 1$ となる.
また, $hA = \varphi(B) - m + 2$, つまり $0 = 2hA - 2\varphi(B) + 2m - 4$ よりこれを $2^e\mathrm{co}\varphi(L) = 2h\varphi(A) - 2B + m - 1$ と
比較すると
$2^e\mathrm{co}\varphi(L) = -2h\mathrm{co}\varphi(A) - 2\mathrm{co}\varphi(B) - m + 3$ が得られる.
これを変形すると $2^e\mathrm{co}\varphi(L) + 2h\mathrm{co}\varphi(A) + 2\mathrm{co}\varphi(B) = -m + 3$ ...(2) となる.(以降この式を用いる.)
$\mathrm{co}\varphi(n) \geq 0$ より, $m > 3$ のとき, 解が存在しないことが直ちにわかる.
オイラー II 型メルセンヌ超完全数のときのように, 個別の解について考えるのではなく, 出てきた解の一般的な性質について考える.

3.1　A-G-G 型解

A-G-G 型解とは, $a = 2^e p, A = q, B = r(e > 0, p, q, r \in \text{odd prime})$ と表される解のことである.
以下にその例を示す.

a	A	B
$m = -9$		
$2^2 \cdot 7$	7	11
$2^2 \cdot 13$	11	23
$2^2 \cdot 31$	23	59
$2^2 \cdot 43$	31	83
$2^2 \cdot 67$	47	131
$2^2 \cdot 97$	67	191
$m = -21$		
$2^4 \cdot 7$	23	47
$2^4 \cdot 61$	167	479
$2^4 \cdot 181$	487	1439
$2^4 \cdot 277$	743	2207
$2^4 \cdot 307$	823	2447
$2^4 \cdot 367$	983	2927
$2^4 \cdot 397$	1063	3167
$2^4 \cdot 601$	1607	4799
$2^4 \cdot 691$	1847	5519

定理 2. オイラー双子型メルセンヌ超完全数の *A-G-G* 型解は $a = 2^e p, A = q, B = r(p, q, r \in \text{odd prime})$ とするとき, $m = -2^e - 2h + 1$, $q = \dfrac{2^e p + 2h - m - 1}{2h}$, $r = hq + m - 1$ である.

Proof. (2) において, $\text{co}\varphi(L) = \text{co}\varphi(p) = \text{co}\varphi(A) = \text{co}\varphi(q) = \text{co}\varphi(B) = \text{co}\varphi(r) = 1$ より,
$2^e + 2h + 2 = -m + 3$, つまり $m = -2^e - 2h + 1$ となる.
定義式から $2^e p = a = 2h\varphi(A) + m + 1 = 2hq - 2h + m + 1$, $hq = r - 1 - m + 2 = r - m + 1$
整理すると $q = \dfrac{2^e p + 2h - m - 1}{2h}$, $r = hq + m - 1$ である. □

3.2 C-C-1 型解

C-C-1 型解とは, $a = 2^e, A = 2^f, B = 1(e, f > 0)$ と表される解のことである. 以下にその例を示す.

a	A	B
$m = -3$		
2^2	2^1	1
$m = -9$		
2^2	2^2	1
$m = -21$		
2^2	2^3	1
$m = -45$		
2^2	2^4	1

定理 3. オイラー双子型メルセンヌ超完全数の *C-C-1* 型解は $a = 2^e, A = 2^f, B = 1$ とするとき, $a = 4, m = 3 - h \cdot 2^f$ である.

Proof. (2) において, $\text{co}\varphi(L) = \text{co}\varphi(B) = 0, \text{co}\varphi(A) = 2^{f-1}$ より,
$h \cdot 2^f = -m + 3$, つまり $m = 3 - h \cdot 2^f$ となる.
また, $B = \varphi(a) = 1$ より $a = 4, 6$ となるが $a = 2^e$ より $a = 4 = 2^2$ である.

□

参考文献

[1] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (V)』, 現代数学社 ,2018.

[2] 飯高茂, オイラー関数と完全数の新しい展開, 日本数学教育学会　高専・大学部会誌　第 22 号　 2016.3.

[3] 飯高茂, 梶田光, 乗数付きオイラー型完全数 (小学生の発見した定理), 日本数学教育学会　高専・大学部会誌第 26 号 2020.3.

双子型ウルトラ超完全数

学習院大学名誉教授

飯高 茂

2021 年 9 月 13 日

1　梶田氏の研究に触発されて

梶田氏は, 論文 (オイラー双子型メルセンヌ超完全数 梶田光: 本報告書に所載) で双子素数を用いたオイラー双子型メルセンヌ超完全数を定義しそこでいくつかの基本定理を定式化しかつそれらを証明した.

私は齢 79 になったが彼 (当時 中学 1 年生) の結果に感動し, オイラー関数ではなくいわゆる因子関数 (ユークリッド関数) $\sigma(a)$ を用いて類似の概念を構成することを試みたところ興味深い結果がえられた.

2　双子型ウルトラ超完全数の導入

平行移動のパラメータである整数 m をひとまず固定する.

$a = 2^e$,$A = 2^{e+1}-1+m$,$B = A-2 = 2^{e+1}-3+m$ とおくとき, $A, B = A-2$ はともに素数と仮定する (ふたご素数). よって, $\sigma(A) = A+1 = 2^{e+1}+m$,$\sigma(B) = B+1 = 2^{e+1}-2+m$ $2^{e+1}-1 = \sigma(a)$ によって,$B = 2^{e+1}-3+m = \sigma(a)-2+m$.

$A = 2^{e+1}-1+m = \sigma(a)+m$, $B = 2^{e+1}-3+m = \sigma(A)-3$, $\sigma(B) = 2^{e+1}-2+m = 2a+m-2$ が得られる.

以上で使われた $a = 2^e$,$A, B = A-2$ はともに素数という仮定を忘れて, 上記の結果得られた等式を利用して次の定義をする.

定義 1. 整数 m に関して

$$\begin{cases} A = \sigma(a)+m, \\ B = \sigma(A)-3, \\ \sigma(B) = 2a+m-2 \end{cases} \tag{1}$$

上の式 を満たす自然数 a, A, b のあるとき, a を双子型ウルトラ超完全数, A をそのパートナー,B をシャドウという.

一言でいえば梶田氏の定義した オイラー双子型メルセンヌ超完全数ではオイラー関数を用いているところを $\sigma(a)$ で置き換えたのである.

一般的に言って完全数の研究とは, 自然数において 2 つの特徴的な数, (1) 2 べき;$2, 4, 8, \cdots, 2^n$, (2). 奇素数;$3, 5, 7, \cdots,$ の関係を因子関数を通して調べることである.

その原型は $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数となるとき, $A = 2^e q$ はどんな数になるか. これを研究することである.

$a = 2^e$, $q = \sigma(a) + m$ とおくと,$\sigma(q) = q + 1 = 2a + m$ をみたす.

定義 2. $A = \sigma(a) + m$ とおく. その上 $\sigma(A) = 2a + m$ をみたすとき, a を超完全数, A をそのパートナーという.

梶田氏の着眼点は (1) 2 べき に対して (2) 双子素数 を用いてみたらオイラー関数を通して調べるとどうなるかということである. これは大胆なる発想である.

その結果, 梶田氏のえたいくつかの基本定理は鮮やかで, 際だった美しさをもっている.

双子型ウルトラ超完全数の場合予想定理はできるが証明は到底できない.

3 最初の補題

新しい定義に慣れるため簡単なところから始める.

補題 1. a を双子型ウルトラ超完全数とする. すなわち $A = \sigma(a)+m, B = \sigma(A)-3, \sigma(B) = 2a + m - 2$ を満たすとき, *a:2* べきとすると A, B はともに素数.

Proof

$a = 2^\varepsilon$ とおくと,$A = \sigma(a) + m = 2^{\varepsilon+1} - 1 + m$ によれば

$$\begin{aligned}
\sigma(B) &= 2a + m - 2 \\
&= 2^{\varepsilon+1} - 2 + m \\
&\geq B + 1 \\
&= \sigma(A) - 2 \\
&\geq A - 1 \\
&= 2^{\varepsilon+1} - 2 + m \\
&= 2a + m - 2 \\
&= \sigma(B)
\end{aligned}$$

それゆえ $\sigma(B) = B + 1, \sigma(A) = A + 1, B + 1 = A - 1$. よって, $B = A - 2, A$:素数 (双子素数). □

補題 2. *A:*素数のとき, $\sigma(B) - (B + 1) = (2a - \sigma(a) - 1)$.

とくに B:素数. ならば a:2 べき.(概完全数予想を使う)

4 ウルトラ超完全数の通常解

a:2 べき, A:素数, B:素数をみたすとき, $a = 2^\varepsilon$,$A = p, B = q$ とおけば

$$A = \sigma(a) + m = p = 2^{\varepsilon+1} - 1 + m, B = q = \sigma(A) - 3 = p - 2$$

これにより (p, q):双子素数. $p = 2^{\varepsilon+1} - 1 + m$ は平行移動 m のメルセンヌ素数.
このような解を双子型ウルトラ超完全数の通常解という.

表 1: 双子型ウルトラ超完全数の通常解

e	$p = 2^{e+1} - 1 + m$	$q = p - 2$
$m = -2$		
2	5	3
3	13	11
5	61	59
9	1021	1019
11	4093	4091
19	1048573	1048571
$m = 0$	0	
2	7	5
4	31	29
$m = 4$	2^2	
1	7	5
3	19	17
15	65539	65537
$m = 6$	$2 * 3$	
2	13	11
$m = 10$	$2 * 5$	
1	13	11
5	73	71
9	1033	1031
17	262153	262151
$m = 12$	$2^2 * 3$	
2	19	17
4	43	41
6	139	137
8	523	521
22	8388619	8388617

$p = 2^{e+1} - 1 + m$ を平行移動のパラメータ m のメルセンヌ素数といい, m を決めると無限にあるかもしれない. その上 $p - 2$ が素数という条件をつけるので有限個に違いない.

しかし証明はできるかどうかはわからない.

5　諸例

表 2: 双子型ウルトラ超完全数,$m=0$

A		a		B	
7	7	4	2^2	5	5
31	31	16	2^4	29	29
57	$3*19$	49	7^2	77	$7*11$

第 1 ブロックでは $m=0, A=p, B=q=p-2$: ともに素数 . $a=2^e$ とおくと, $A=\sigma(a)=2^{e+1}-1=p$ はメルセンヌ素数.$q=2^{e+1}-5$ も素数なので, $p=7,31$. 上の 2 例が通常解.

$m=0$ の場合は解がこれらの 3 例しかないのかもしれない. 証明はできない.

表 3: 双子型ウルトラ超完全数,$m=-2$

A		a		B	
5	5	4	2^2	3	3
13	13	8	2^3	11	11
61	61	32	2^5	59	59
1021	1021	512	2^9	1019	1019
4093	4093	2048	2^{11}	4091	4091
1048573	1048573	524288	2^{19}	1048571	1048571
397	397	242	$2*11^2$	395	$5*79$
13063	13063	6728	2^3*29^2	13061	$37*353$
563767	$199*2833$	374978	$2*433^2$	566797	$7*11*17*433$
28	2^2*7	29	29	53	53

第 1 ブロックでは $A=p, B=q$ が双子素数,$a=2^e$, $p=2^{e+1}-3, q=2^{e+1}-5$: これらを満たす素数は無限にあることはありえない. これが通常解であり, 美しい姿をしている.

この解は梶田論文でも $m=-4$ の場合として扱かわれている. 解が多いので注目しているが彼は私の発見した場合よりさらに大きな解を 2 つ見いだしている. さすがである.

一般の m のときも $p=2^{e+1}-1+m, q=p-2$ がともに素数の場合が通常解になる.

$m=-8$ の場合の解は注目に値する.

表 4: 双子型ウルトラ超完全数,$m=-8$

$a=q$		$A=2p$		$B=3r$	
17	17	10	$2*5$	15	$3*5$
29	29	22	$2*11$	33	$3*11$
41	41	34	$2*17$	51	$3*17$
53	53	46	$2*23$	69	$3*23$
89	89	82	$2*41$	123	$3*41$
101	101	94	$2*47$	141	$3*47$
113	113	106	$2*53$	159	$3*53$
149	149	142	$2*71$	213	$3*71$
173	173	166	$2*83$	249	$3*83$
233	233	226	$2*113$	339	$3*113$
269	269	262	$2*131$	393	$3*131$
281	281	274	$2*137$	411	$3*137$
353	353	346	$2*173$	519	$3*173$
389	389	382	$2*191$	573	$3*191$
401	401	394	$2*197$	591	$3*197$
81	3^4	113	113	111	$3*37$
8	2^3	7	7	5	5
221	$13*17$	244	2^2*61	431	431
131	131	124	2^2*31	221	$13*17$

第 1 ブロックは $a=q, A=2p, B=3r$ と素数 p,q,r で書ける場合が大多数.

素数が 3 列に並びそれに係数 1,2, 3 がついている. 私はオリンピックの表彰台をみるような錯覚を覚えた.(東京 2020,2021 年)

$q=2p+7, q=2r+7, p=r$ であり, これらはスーパー双子素数. A,a,B は BGB 型の解と言うのは梶田式, トリプル B 型解 とも言う.

次の結果が成立するかもしれない.

定理 1. $A=2\alpha, B=3\gamma$ と仮定すると, α,γ および a は素数になる.

現在, まだ証明はできていない. そこで条件 α,γ は順に 2 と 3 の倍数ではないことを付加すると, 証明できた.

Proof

定義式 $A=\sigma(a)+m, B=\sigma(A)-3, \sigma(B)=2a+m-2$ を次のように整理する.

$m=-8, A=2\alpha, B=3\gamma$ とし $2\not|\alpha, 3\not|\gamma$ を仮定する.

定義式によって $2\alpha=A=\sigma(a)-8=3\sigma(\alpha)-8$.

$B=3\gamma=\sigma(A)-3=3\sigma(\alpha)-3$ ゆえに $3\gamma=3\sigma(\alpha)-3$. 3 で割ると

$$\gamma = \sigma(\alpha) - 1.$$

$\sigma(B) = \sigma(3\gamma) = 4\sigma(\gamma) = 2a - 10$ によって $4\sigma(\gamma) = 2a - 10.$
かくて,

$$2\sigma(\gamma) = a - 5.$$

$2\gamma = 2\sigma(\alpha) - 2$ を上の式から引くと,

$$2\mathrm{co}\sigma(\gamma) = -3 + a - 2\sigma(\alpha).$$

$2\alpha = \sigma(a) - 8$　を上の式から引くと

$$2\mathrm{co}\sigma(\gamma) - 2\alpha = -3 + a - 2\sigma(\alpha) - \sigma(a) + 8 = 5 - \mathrm{co}\sigma(a) - 2\sigma(\alpha).$$

これより,

$$2\mathrm{co}\sigma(\gamma) + \mathrm{co}\sigma(a) + 2\mathrm{co}\sigma(\alpha) = 5.$$

かくして $\mathrm{co}\sigma(\gamma), \mathrm{co}\sigma(a), \mathrm{co}\sigma(\alpha)$ のどれもが 1. ゆえに $\alpha = p, \beta = q, 3\gamma = r$ とおくとこれらは素数.
$A = 2p, a = q, B = 3r$ と素数 p, q, r で書ける.

□

$A = 2p, a = q, B = 3r$ と素数 p, q, r で書ける解からは, $6 = 2 \times 3$ が出る.
第 3 ブロックは 解 $A = 7, a = 2^3, B = 5$ が通常解.

表 5: 双子型ウルトラ超完全数,$m=-58$

$a=q$		$A=28p$		$B=r$	
4621	4621	4564	$2^2*7*163$	9181	9181
6301	6301	6244	$2^2*7*223$	12541	12541
8821	8821	8764	$2^2*7*313$	17581	17581
9829	9829	9772	$2^2*7*349$	19597	19597
14029	14029	13972	$2^2*7*499$	27997	27997
18061	18061	18004	$2^2*7*643$	36061	36061
21589	21589	21532	$2^2*7*769$	43117	43117
23269	23269	23212	$2^2*7*829$	46477	46477
24109	24109	24052	$2^2*7*859$	48157	48157
32	2^5	5	5	3	3
46	$2*23$	14	$2*7$	21	$3*7$
1429	1429	1372	2^2*7^3	2797	2797

第 1 ブロックは $A=28p, a=q, B=r$ と素数 p,q,r で書ける場合が大多数.(ここで第二完全数 28 が出た)

$q=28p+57, r=56p+53, p=r$ であり, スーパーふたご素数. A,a,B は BGG 型の解. 係数が 28,1,1 のトリプル B 型解ともいう.

定理 2. $A=28\alpha,(28,\alpha)$: 互いに素と仮定すると, $\alpha=p, B=r$ および $a=q$ は素数になる. $q=28p+57, r=2q-61$ を満たし, (p,q,r) はウルトラ三つ子素数.

ここにトリプル B 型解が出た. 係数は 28,1,1 となり第二完全数.

実はここにトリプル B 型解が出るのは $m=-8,-58$ の場合しか無い. これは証明可能.

Proof

定義式 $A=\sigma(a)+m, B=\sigma(A)-3, \sigma(B)=2a+m-2$ に $A=28\alpha$ を代入する. 28 は第二完全数なので $\sigma(28)=56$ に注意.

$A=28\alpha=\sigma(a)-58, B=\sigma(A)-3=56\sigma(\alpha)-3, \sigma(B)=2a-60$ を次のように整理する.

$$B=56\sigma(\alpha)-3$$

$$-\sigma(B)=-2a+60$$

$$56\alpha=2\sigma(a)-58*2$$

上の 3 式を加える.

$$-\sigma(B)+56\alpha=56\sigma(\alpha)-3-2a+60+2\sigma(a)-58*2$$

を得るので $\mathrm{co}\sigma(x)=\sigma(x)-x$ を用いて整理する.

$$-\mathrm{co}\sigma(B)-56\mathrm{co}\sigma(\alpha)=-3+60+2\mathrm{co}\sigma(a)-58*2$$

ゆえに,

$$3-60+58*2=59=2\mathrm{co}\sigma(a)+\mathrm{co}\sigma(B)+56\mathrm{co}\sigma(\alpha)$$

この解は $\mathrm{co}\sigma(a)=\mathrm{co}\sigma(B)=\mathrm{co}\sigma(\alpha)=1$ なので, $\alpha=p, B=q$ および $a=q$ は素数.

$A=28\alpha=28p=\sigma(a)-58=q-57, B=r=\sigma(A)-3=56(p+1)-3=56p+53$ によって, $q=28p+57, r=2q-61$.

□

表 6: 双子型ウルトラ超完全数,$m=4$

a		A		B	
$m=4$	2^2				
2	2	7	7	5	5
8	2^3	19	19	17	17
32768	2^{15}	65539	65539	65537	65537
263	263	268	2^2*67	473	$11*43$
341	$11*31$	388	2^2*97	683	683
899	$29*31$	964	2^2*241	1691	$19*89$

表 7: 双子型ウルトラ超完全数,$m=6$

$m=6$	$2*3$				
a		A		B	
4	2^2	13	13	11	11
49	7^2	63	3^2*7	101	101

表 8: 双子型ウルトラ超完全数,$m = 10$

$m = 10$	$2 * 5$				
a		A		B	
a		A		B	
2	2	13	13	11	11
32	2^5	73	73	71	71
512	2^9	1033	1033	1031	1031
131072	2^{17}	262153	262153		
1033	1033	512	2^9	1031	1031

6 m:奇数

解が少ない上に面白い結果がない.

表 9: 双子型ウルトラ超完全数,m:奇数

A		a		B	
$m = -13$	-13				
8	2^3	2	2	0	0
14	$2 * 7$	11	11	9	3^2
209	$11 * 19$	227	227	225	$3^2 * 5^2$
$m = -5$	-5				
4	2^2	2	2	0	0
$m = -1$	-1				
2	2	2	2	0	0
$m = 1$	1				
1432	$2^3 * 179$	2701	$37 * 73$	2809	53^2
$m = 5$	5				
5	5	11	11	9	3^2
59	59	65	$5 * 13$	81	3^4

7 平行移動の双子素数

$A, B = A + 2d$ がともに素数のとき 平行移動 $2d$ の双子素数という.

$a = 2^e$,$A = 2^{e+1} - 1 + m$,$B = A - 2 + 2d + 2 = 2^{e+1} - 3 + 2d + 2 + m$ とおくとき, $A, B = A + 2d$ はともに素数と仮定する (ふたご素数).

$d = -1$ の場合はすでに扱った. B は弟型.

$d = 1$ の場合は 兄型. という. 実はこの場合はトリプル B 型解が増えるという利点がある.

平行移動のパラメータである整数 m をひとまず固定する.

$a = 2^e$,$A = 2^{e+1} - 1 + m$,$B = A + 2d = 2^{e+1} - 1 + 2d + m$ とおくとき, $A, B = A + 2d$ はともに素数と仮定する (平行移動 $2d$ のふたご素数). よって, $\sigma(A) = A + 1 = 2^{e+1} + m, B = A + 2d = 2^{e+1} - 1 + 2d + m = \sigma(a) + 2d + m = \sigma(A) + 2d.$

$\sigma(B) = B + 1 = 2^{e+1} + 2d + m = 2a + 2d + m$

$\sigma(A) = 2^{e+1} + m$ によって,$B = 2^{e+1} - 1 + 2d + m = \sigma(A) - 1 + 2d$ が得られる.

以上で使われた $a = 2^e$,$A, B = A + 2d$ はともに素数という仮定を忘れ, 上記の結果得られた等式を利用して次の定義をする.

定義 3.

$$\begin{cases} A = \sigma(a) + m, \\ B = \sigma(A) + 2d - 1, \\ \sigma(B) = 2a + m + 2d \end{cases} \tag{2}$$

上の式 を満たす自然数 a, A, B のあるとき, a を平行移動 d の双子型 平行移動 m のウルトラ超完全数, A をそのパートナー,B をシャドウという.

$d = 1$ のとき 双子兄型超完全数という.

8 双子兄型超完全数

表 10: 双子兄型ウルトラ超完全数 ; 第 2 完全数対応

$a=q$		$A=18p$		$B=r$	
$m=-58=-2-2*28$	$-2*29$				
197	197	140	2^2*7*5	337	337
1093	1093	1036	2^2*7*37	2129	2129
1373	1373	1316	2^2*7*47	2689	2689
1709	1709	1652	2^2*7*59	3361	3361
2269	2269	2212	2^2*7*79	4481	4481
7253	7253	7196	$2^2*7*257$	14449	14449
7589	7589	7532	$2^2*7*269$	15121	15121
10949	10949	10892	$2^2*7*389$	21841	21841
13469	13469	13412	$2^2*7*479$	26881	26881
32	2^5	5	5	7	7
128	2^7	197	197	199	199
1429	1429	1372	2^2*7^3	2801	2801
959	$7*137$	1046	$2*523$	1573	11^2*13

表 11: 双子兄型ウルトラ超完全数, $m = -28$

a		A		B	
35	$7*5$	20	2^2*5	43	43
77	$7*11$	68	2^2*17	127	127
119	$7*17$	116	2^2*29	211	211
203	$7*29$	212	2^2*53	379	379
329	$7*47$	356	2^2*89	631	631
497	$7*71$	548	2^2*137	967	967
1379	$7*197$	1556	2^2*389	2731	2731
1799	$7*257$	2036	2^2*509	3571	3571
1967	$7*281$	2228	2^2*557	3907	3907
2177	$7*311$	2468	2^2*617	4327	4327
16	2^4	3	3	5	5
128	2^7	227	227	229	229
499	499	472	2^3*59	901	$17*53$
157	157	130	$2*5*13$	253	$11*23$
1381	1381	1354	$2*677$	2035	$5*11*37$

表 12: 双子兄型ウルトラ超完全数,$m=-18$

a		A		B	
15	$3*5$	6	$2*3$	13	13
39	$3*13$	38	$2*19$	61	61
57	$3*19$	62	$2*31$	97	97
129	$3*43$	158	$2*79$	241	241
219	$3*73$	278	$2*139$	421	421
237	$3*79$	302	$2*151$	457	457
309	$3*103$	398	$2*199$	601	601
669	$3*223$	878	$2*439$	1321	1321
939	$3*313$	1238	$2*619$	1861	1861
1119	$3*373$	1478	$2*739$	2221	2221
27	3^3	22	$2*11$	37	37

表 13: 双子兄型ウルトラ超完全数, 第 1 完全数対応

a		A		B	
$m=-14=-2-2*6$					
16	2^4	17	17	19	19
37	37	24	2^3*3	61	61
43	43	30	$2*3*5$	73	73
127	127	114	$2*3*19$	241	241
631	631	618	$2*3*103$	1249	1249
907	907	894	$2*3*149$	1801	1801
1051	1051	1038	$2*3*173$	2089	2089
1087	1087	1074	$2*3*179$	2161	2161
2287	2287	2274	$2*3*379$	4561	4561
2647	2647	2634	$2*3*439$	5281	5281
2791	2791	2778	$2*3*463$	5569	5569
3067	3067	3054	$2*3*509$	6121	6121
3571	3571	3558	$2*3*593$	7129	7129
3691	3691	3678	$2*3*613$	7369	7369

表 14: 双子兄型ウルトラ超完全数 , 第 3 完全数対応

a		A		B	
$m=-2-2*496$					
15377	15377	14384	$2^4*29*31$	29761	29761
27281	27281	26288	$2^4*31*53$	53569	53569
55057	55057	54064	$2^4*31*109$	109121	109121
57041	57041	56048	$2^4*31*113$	113089	113089
218737	218737	217744	$2^4*31*439$	436481	436481
223697	223697	222704	$2^4*31*449$	446401	446401
438961	438961	437968	$2^4*31*883$	876929	876929
560977	560977	559984	$2^4*31*1129$	1120961	1120961
709777	709777	708784	$2^4*31*1429$	1418561	1418561
1063921	1063921	1062928	$2^4*31*2143$	2126849	2126849
1093681	1093681	1092688	$2^4*31*2203$	2186369	2186369
1158161	1158161	1157168	$2^4*31*2333$	2315329	2315329
1161137	1161137	1160144	$2^4*31*2339$	2321281	2321281
1190897	1190897	1189904	$2^4*31*2399$	2380801	2380801
512	2^9	29	29	31	31

表 15: 双子冗型ウルトラ超完全数, 第 4 完全数対応

a		A		B	
$m=-2-2*8128$					
251969	251969	235712	$2^6*127*29$	487681	487681
121921	121921	105664	$2^6*13*127$	227581	227581
1146049	1146049	1129792	$2^6*127*139$	2275837	2275837
1633729	1633729	1617472	$2^6*127*199$	3251197	3251197
32768	2^{15}	49277	49277	49279	49279
16778	$2*8389$	8912	2^4*557	17299	17299
129209	129209	112952	$2^3*7*2017$	242161	242161
29675	5^2*1187	20570	$2*5*11^2*17$	43093	43093
150425	$5^2*11*547$	187598	$2*97*967$	284593	284593

9　双子兄型ウルトラ超完全数

$d=1$ のとき, 定義式は

定義 4.

$$\begin{cases} A=\sigma(a)+m, \\ B=\sigma(A)+1, \\ \sigma(B)=2a+m+2 \end{cases} \tag{3}$$

を満たすとき, a を双子兄型ウルトラ超完全数, A をパートナー,B をシャドウという.

ここに解 $a=\alpha p, A=\beta q, B=\gamma r$ と書ける素数の 3 つ組 (p,q,r) ,(α,β,γ) は互いに素な自然数, が複数個あるとする. ここで $(p \nmid \alpha, q \nmid \beta, r \nmid \gamma)$

$A=\beta q=\sigma(a)+m=\sigma(\alpha)(p+1)+m$ ここで,$X=p\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha)$ とおくと, $\beta q=X+m$. これより, $m=\beta q-X$

$B=\gamma r=\sigma(A)+1=\sigma(\beta)q+\sigma(\beta)+1=Y+1$, ただし $Y=\sigma(\beta)q+\sigma(\beta)$

$$\gamma r=Y+1$$

$\sigma(B)=\sigma(\gamma)r+\sigma(\gamma)=2a+m+2=2\alpha p+m+2=Z$, ただし　$Z=\sigma(\gamma)r+\sigma(\gamma)$
ゆえに,$m=\beta q-X$ を代入して

$$Z=2\alpha p+m+2=2\alpha p+2+\beta q-X$$

$$\gamma r=Y+1=\sigma(\beta)q+\sigma(\beta)+1$$

と組み合わせて q を消去する.

$X=p\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha)$ によって,
式 $Z=2\alpha p+2+\beta q-X=2\alpha p+2+\beta q-(p\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha))$.
ゆえに,

$$Z=2\alpha p+2+\beta q-(p\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha))=p(2\alpha-\sigma(\alpha))+2+\beta q-\sigma(\alpha).$$

$Z=\sigma(\gamma)r+\sigma(\gamma)$ だったので,

$$\sigma(\gamma)r+\sigma(\gamma)=p(2\alpha-\sigma(\alpha))+2+\beta q-\sigma(\alpha).$$

$\gamma r=Y+1=\sigma(\beta)q+\sigma(\beta)+1$ を用いて,r を消去する.
γ を上の式に乗じて

$$\sigma(\gamma)\quad\gamma r+\sigma(\gamma)\gamma=p\gamma(2\alpha-\sigma(\alpha))+2\gamma+\beta\gamma q-\gamma\sigma(\alpha).$$

$\gamma r=\sigma(\beta)q+\sigma(\beta)+1$ を代入すれば

$$\sigma(\gamma)(\sigma(\beta)q+\sigma(\beta)+1)+\sigma(\gamma)\gamma=p\gamma(2\alpha-\sigma(\alpha))+2\gamma+\beta\gamma q-\gamma\sigma(\alpha).$$

$m=\beta q-X$ によって, を q 消去する.

$$\sigma(\gamma)(\sigma(\beta)*\frac{m+X}{\beta}+\sigma(\beta)+1)+\sigma(\gamma)\gamma=p\gamma(2\alpha-\sigma(\alpha))+2\gamma+\beta\gamma\frac{m+X}{\beta}-\gamma\sigma(\alpha).$$

$$\sigma(\gamma)\sigma(\beta)(m+X)+\beta\sigma(\beta)+\beta)+\sigma(\gamma)\gamma\beta=$$
$$p\beta\gamma(2\alpha-\sigma(\alpha))+2\beta\gamma+\beta\gamma(m+X)-\beta\gamma\sigma(\alpha).$$

$X=p\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha)$ を代入して, $m=\Gamma p+\Delta$ の形に整理すると m は p に関係しないので $\Gamma=0$. X,p のみの項を考えて

$$\sigma(\gamma)(\sigma(\beta)X=p\beta\gamma(2\alpha-\sigma(\alpha))+\beta\gamma X$$

$X=p\sigma(\alpha)$ の形で代入し p の係数を求める.

$$\sigma(\gamma)\sigma(\beta)p\sigma(\alpha)=p\beta\gamma(2\alpha-\sigma(\alpha))+p\beta\gamma\sigma(\alpha)$$

$$\sigma(\gamma)\sigma(\beta)\sigma(\alpha)=\beta\gamma(2\alpha-\sigma(\alpha))+\beta\gamma\sigma(\alpha)=\alpha\beta\gamma.$$

$\Phi=\gamma\beta\alpha$ とおくと $\sigma(\gamma)\sigma(\beta)\sigma(\alpha)=\sigma(\Phi)$.
ゆえに $2\Phi=$ $\sigma(\Phi)$
Φ は完全数になる. 完全数仮説 (奇数完全数は存在しない) を使うと, $\Phi=2^{\nu}\Theta,\Theta=2^{\nu+1}-1$: 素数.
$\alpha\beta\gamma=2^{\nu}\Theta$ によって, α,β,γ は互いに素なので, これらは
$\alpha=1,\beta=2^{\nu},\gamma=\Theta$ などの可能性に絞られる.

参考文献

[1] 飯高茂 , (雑誌連載) 数学の研究をはじめよう , 現代数学社 ,2013 ～ .

[2] 飯高茂 , 『数学の研究をはじめよう (I),(II)』, 現代数学社 ,2016.

[3] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (III),(IV)』, 現代数学社 ,2017.

[4] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (V)』, 現代数学社 ,2018.

[5] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (VI)』, 現代数学社 ,2019.

[6] 飯高茂, オイラー関数と完全数の新しい展開, 日本数学教育学会 高専・大学部会誌 第 22 号 2016.3.

[7] 飯高茂, 完全数の水平展開 , 日本数学教育学会 高専・大学部会誌 第 23 号 2017.3 .

[8] 飯高茂, スーパー完全数の新展, 日本数学教育学会 高専・大学部会誌 第 24 号 2018.3.

[9] 飯高茂, 梶田光, 乗数付きオイラー型完全数 (小学生の発見した定理), 日本数学教育学会 高専・大学部会誌 第 26 号 2020.3.

[10] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[11] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[12] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1

[13] 中村 滋, 素数物語: アイディアの饗宴 (岩波科学ライブラリー) 2019.

Markov トリプルの同値条件と Diophantine equation $a^2+b^2+c^2=abcf(a,b,c)$

渋川元樹 * (神戸大理)
講演動画 † ：https://www.youtube.com/watch?v=ARcZ5JcKq-M

概 要

Rademacher, Hirzebruch-Zagier らによる Markov トリプルの同値条件及びその応用から得られる Diophantine equation $a^2+b^2+c^2=abcf(a,b,c)$ の非可解性について述べる.

1 Markov triples and Rademacher, Hirzebruch-Zagier

以下 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を非負整数全体, $\mathbb{Z}$ を整数環とする. Markov トリプル (a,b,c) は Markov 方程式

$$a^2+b^2+c^2=3abc. \tag{1}$$

の正の整数解と定義する. よく知られているように (a,b,c) が Markov トリプルとすると, a,b,c は対ごとに素, すなわち

$$\gcd(b,c)=\gcd(c,a)=\gcd(a,b)=1$$

である. ゆえに以下では特に断らない限り a,b,c は対ごとに素とする.

鍵となる同値条件は以下の通り:

$$a^2+b^2\equiv 0 \pmod c,\quad b^2+c^2\equiv 0 \pmod a,\quad c^2+a^2\equiv 0 \pmod b. \tag{2}$$

Theorem 1 (Rademacher [2], Hirzebruch-Zagier [1])**.** (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Proof. $\Rightarrow$) 明らか.
$\Leftarrow$) $D(a;b,c)$ を Dedekind (Rademacher) 和

$$D(a;b,c):=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\cot\left(\frac{\pi bk}{a}\right)\cot\left(\frac{\pi ck}{a}\right)$$

とし, $d(a;b)$ を通常の Dedekind 和

$$d(a;b):=\frac{1}{4}D(a;b,1)=\frac{1}{4}D(a;1,b).$$

* g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp
† 日本数学会年会 2021 代数学分科会発表の事前録画である.

とする [2], [3]. b' を $bb' \equiv 1 \pmod a$ 満たす整数とすると

$$D(a;b,c) = D(a;1,b'c) = 4d(a;b'c).$$

よって $d(a;b)$ についての零条件 [3] p28

$$b^2+1 \equiv 0 \pmod a \quad \Leftrightarrow \quad d(a;b)=0,$$

より, $D(a;b,c)$ の零条件

$$b^2+c^2 \equiv 0 \pmod a \quad \Leftrightarrow \quad D(a;b,c)=0 \tag{3}$$

を得る. 条件 (2) と零条件 (3) から

$$D(a;b,c) = D(b;c,a) = D(c;a,b) = 0$$

を得る.

最後に $D(a;b,c)$ についての相互律 [2]

$$D(a;b,c)+D(b;c,a)+D(c;a,b) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} - 1,$$

から三つ組 (a,b,c) が Markov 方程式 (1) を満たす. □

Example 2. Fibonacci 数

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

を用いて

$$(a,b,c) = (1, F_{2n-1}, F_{2n+1}) \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

とおくと, これは Markov triples である:

$$1 + F_{2n-1}^2 + F_{2n+1}^2 = 3F_{2n-1}F_{2n+1}.$$

実際, Catalan 恒等式

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2$$

を特殊化すると

$$\begin{aligned} F_{2n-1}^2 + 1 &= F_{2n-1}^2 + F_2^2 = F_{2n-3}F_{2n+1} \equiv 0 \pmod{F_{2n+1}}, \\ F_{2n+1}^2 + 1 &= F_{2n+1}^2 + F_2^2 = F_{2n-1}F_{2n+3} \equiv 0 \pmod{F_{2n-1}} \end{aligned}$$

を満たすので, Theorem 1 より $(1, F_{2n-1}, F_{2n+1})$ は Markov triples である.

2 Main results

整数係数の多項式 $f(a,b,c) \in \mathbb{Z}[a,b,c]$ に付随する Diophantine equation

$$a^2+b^2+c^2 = abcf(a,b,c) \tag{4}$$

を導入する.

Theorem 3. *対ごとに素な正の整数 (a,b,c) が Diophantine equation (4) の解であるのは, (a,b,c) が Markov トリプルかつ $f(a,b,c)=3$ を満たすとき, そのときに限る.*

Proof. Diophantine equation (4) が対ごとに素な正の整数解 (a,b,c) な解とすると, (a,b,c) は条件 (2) を満たす. よって Theorem 1 より, (a,b,c) は Markov トリプルで

$$abcf(a,b,c) = a^2+b^2+c^2 = 3abc.$$

ここで $abc \neq 0$ ゆえ, $f(a,b,c)=3$.

他方, $f(a,b,c)=3$ なる Markov トリプル (a,b,c) があったとすると

$$a^2+b^2+c^2 = 3abc = abcf(a,b,c).$$

□

この Theorem 3 の系として, 以下を得る.

Corollary 4. *k を a,b,c の最大公約数とする;*

$$k := \gcd(a,b,c).$$

(1) k が 1 でも 3 でもないとき, Diophantine equation (4) は正の整数解を持たない.
(2) $k=1$ のとき, 恒等的に零でない任意の非負整数係数多項式 $g(a,b,c) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[a,b,c]$ について Diophantine equation

$$a^2+b^2+c^2 = abc(3+g(a,b,c)) \tag{5}$$

は正の整数解を持たない.
(3) $k=3$ のとき, 任意の非負整数係数多項式 $g(a,b,c) \not\equiv 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[a,b,c]$ について Diophantine equation

$$a^2+b^2+c^2 = abcg(a,b,c) \tag{6}$$

は正の整数解を持たない.

Proof. まず互いに素な a,b,c が Diophantine equation (4) を満たすならば a,b,c は対ごとに素であることに注意する. 実際,

$$a \equiv 0 \pmod{\gcd(b,c)}, \quad b \equiv 0 \pmod{\gcd(c,a)}, \quad c \equiv 0 \pmod{\gcd(a,b)}$$

ゆえ

$$\gcd(b,c) = \gcd(c,a) = \gcd(a,b) = \gcd(a,b,c) = 1.$$

よって (a,b,c) が (4) の正の整数解ならば, 対ごとに素な正の整数 a_0, b_0, c_0 が存在して

$$a = ka_0,\ b = kb_0,\ c = kc_0 \tag{7}$$

と仮定してよい.
(1) (7) を (4) に代入すると,

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0c_0kf(ka_0, kb_0, kc_0). \tag{8}$$

(a_0, b_0, c_0) が (4) の対ごとに素な正の整数解ならば Theorem 3 より,

$$kf(ka_0, kb_0, kc_0) = 3. \tag{9}$$

ここで $f(ka_0, kb_0, kc_0)$ は整数ゆえ, 方程式 (9) が正の整数解を持つのは $k = 1$ か 3 の場合に限る.
(2) 恒等的に零でない非負整数係数多項式 $g(a,b,c)$ と正の整数 (a,b,c) について, $3 + g(a,b,c)$ は 3 より大きい. よって Theorem 3 より, (5) は正の整数解を持たない.
(3) $k = 3$ を (8) に代入すると

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0c_03f(3a_0, 3b_0, 3c_0).$$

ここに Theorem 3 を適応すると

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0c_03f(3a_0, 3b_0, 3c_0) \quad \Leftrightarrow \quad f(3a_0, 3b_0, 3c_0) = 1.$$

他方, 恒等的に零でない任意の非負整数係数多項式 $g(a,b,c)$ と正整数 a_0, b_0, c_0 について $g(3a_0, 3b_0, 3c_0) = 1$ となるのは $g(a,b,c) \equiv 1$ のとき, そのときに限る. □

Remark 5. Theorem 1 は本質的に Rademacher [2] の Part III Lecture 32 や Hirzebruch-Zagier [1] で言及されている. しかしながら Theorem 3 や Corollary 4 は未知の結果のように思われる.

3 Concluding remarks

まず Theorem 1 の Dedekind 和を用いない別証明である. 現状 Theorem 1 に関しては, 今回紹介した "Dedekind 和" というブラックボックスを用いた証明以外は知られていないようである. なので数論的, あるいは不定方程式論的な別証明が得られることが望ましい.
次いで連立の合同式 (2) の変形

$$pa^2 + qb^2 \equiv 0 \pmod{c}, \quad qb^2 + rc^2 \equiv 0 \pmod{a}, \quad rc^2 + pa^2 \equiv 0 \pmod{b} \tag{10}$$

と Diophantine equation との関係である. 特に Markov-Rosenberger equation

$$pa^2 + qb^2 + rc^2 = sabc$$

については, Markov equation と同様に, 適当な seed 解から mutations

$$\mu_1(a,b,c) = \left(\frac{s}{p}bc - a, b, c\right), \quad \mu_2(a,b,c) = \left(a, \frac{s}{q}ac - b, c\right), \quad \mu_3(a,b,c) = \left(a, b, \frac{s}{r}ab - c\right)$$

により全ての非自明解が得られる (p,q,r,s) が Rosenberger により決定されている:

$$(p,q,r,s) = (1,1,1,1),\ (1,1,1,3),\ (1,1,2,4),\ (1,2,3,6),\ (1,1,2,2),\ (1,1,5,5).$$

なので, この場合に Theorem 1 の類似が存在するのかは考察すべきであろう. その際に, たとえば Theorem 1 の Dedekind 和を用いない数論的別証明が与えられれば, その変奏から何某かの知見も得られる可能性がある. あるいは, Dedekind 和の方を, Theorem 1 の類似を得るために適した形に変形するという問題もある.

参考文献

[1] F. Hirzebruch and D. Zagier: *The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory*, Publish or Perish, (1974).

[2] H. Rademacher: *Lectures on analytic number theory*, Notes, Tata Institute, Bombay 1954–1955.

[3] H. Rademacher and E. Grosswald: *Dedekind sums*, The Carus Math. Monographs, **16** (1972).

[4] G. Rosenberger: *Uber die diophantische Gleichung* $ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz$, J. Reine Angew. Math. **305** (1979) 122-125.

[5] G. Shibukawa: *An equivalent condition for the Markov triples and the Diophantine equation* $a^2 + b^2 + c^2 = abcf(a,b,c)$, Math arXiv : 2008.04061 pp3.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University,
1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe, 657-8501, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

三角函数の等分値で書けない実数

渋川元樹 * (神戸大理)

講演動画：`https://www.youtube.com/watch?v=mseIcUekqrU`

概 要

実数が三角函数の等分値で書けないための十分条件を与える．

1 Introduction

整数全体を有理数全体を $\mathbb{Z}$, 有理数全体を $\mathbb{Q}$, 正の有理数全体を $\mathbb{Q}_{>0}$ とする．筆者は [4] で次の定理を示した．

Theorem 1. $N \geq 3$, $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\beta^{\frac{1}{N}}, \ldots, \beta^{\frac{N-1}{N}} \notin \mathbb{Q}$ とする．任意の正の整数 m について

$$\sqrt[N]{\beta} \notin \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

よって特に

$$\cos(\pi\theta), \cos(\pi\theta)^2, \ldots, \cos(\pi\theta)^{N-1} \notin \mathbb{Q}$$

かつ $\cos(\pi\theta)^N \in \mathbb{Q}$ となるような $\theta \in \mathbb{Q}$ は存在しない．同様に $\tan(\pi\theta), \tan(\pi\theta)^2, \ldots, \tan(\pi\theta)^{N-1} \notin \mathbb{Q}$ かつ $\tan(\pi\theta)^N \in \mathbb{Q}$ なる $\theta \in \mathbb{Q}$ も存在しない．

この定理は $N \geq 3$ についての結果であったが, $N = 1, 2$ に関しては以下の結果が知られている．

Theorem 2 (Olmsted [3], Carlitz-Thomas [1])**.** (1) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\cos(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$ ならば $\cos(\pi\theta)$ の値は

$$0, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm 1$$

のいずれかのみ．$\sin(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$ についても同様．
(2) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\tan(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$ ならば $\tan(\pi\theta)$ の値は

$$0, \quad \pm 1$$

のいずれかのみ．

* g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

Corollary 3. (1) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\cos(\pi\theta)^2 \in \mathbb{Q}$ ならば $\cos(\pi\theta)$ の値は

$$0, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \pm 1$$

のいずれかのみ. $\sin(\pi\theta)$ についても同様.
(2) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\tan(\pi\theta)^2 \in \mathbb{Q}$ ならば $\tan(\pi\theta)$ の値は

$$0, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 1, \quad \pm\sqrt{3}$$

のいずれかのみ.

更に定理 1, 定理 2, 系 3 を併せることで次を得た.

Theorem 4 ([4])**.** ある自然数 n と $\theta \in \mathbb{Q}$ が存在して $\cos(\pi\theta)^n \in \mathbb{Q}$ *(resp.* $\tan(\pi\theta)^n$*)* ならば $\cos(\pi\theta)$ あるいは $\sin(\pi\theta)$ の値は

$$\sin(\pi\theta), \cos(\pi\theta) = \begin{cases} 0, \ \pm\frac{1}{2}, \ \pm 1 & (n : odd) \\ 0, \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \pm\frac{1}{2}, \ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \pm 1 & (n : even) \end{cases},$$

resp.

$$\tan(\pi\theta) = \begin{cases} 0, \ \pm 1 & (n : odd) \\ 0, \ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \ \pm 1, \ \pm\sqrt{3} & (n : even) \end{cases}$$

のいずれかのみ.

これは以下のように読み替えることもできる.

Corollary 5. θ を $0 < \theta < \frac{1}{2}$ なる有理数とする.
(1) 任意の正整数 m について, $\theta \neq \frac{1}{3}$ *(resp.* $\theta \neq \frac{1}{6}$*)* ならば $\cos(\pi\theta)^{2m-1}$ *(resp.* $\sin(\pi\theta)^{2m-1}$*)* は無理数であり, $\theta \neq \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{6}$ ならば $\sin(\pi\theta)^{2m}$, $\cos(\pi\theta)^{2m}$ はいずれも無理数である.
(2) 任意の正整数 m について, $\theta \neq \frac{1}{4}$ ならば $\tan(\pi\theta)^{2m-1}$ は無理数であり, $\theta \neq \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{6}$ ならば $\tan(\pi\theta)^{2m}$ は無理数である.

これらの証明は円分体と Kummer 体の Galois 理論のよく知られたいくつかの結果を用いるものであり, 私は無理数論の専門家ではないので断言はできないが, 少なくとも私が調べた範囲では無理数論の観点からのこれらの事実への言及や証明されていないようである (Galois 理論的には余りにも当たり前なので, folklore としてあえて論文や成書といった形では言及されていない可能性もあると思う).

他方, これらの事実の無理数論的証明も期待される. そこで本稿では, より一般に次のような三角函数の等分値で書けない実数についての一つの十分条件を, Galois 理論無しに証明する.

Theorem 6. (1) 実数 $0 < \alpha < 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ が実数でない根を持つならば, 任意の有理数 θ について

$$\cos(\pi\theta) \neq \alpha.$$

$\sin(\pi\theta)$ についても同様.
(2) 実数 α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ が実数でない根を持つならば, 任意の有理数 θ について

$$\tan(\pi\theta) \neq \alpha.$$

2 Proof of Theorem 6

(1) $\sin\left(\pi\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi\theta\right)$ ゆえ cos について示せば十分である. 実数 $0<\alpha<1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ が実数でない根を持つとして, ある有理数 $\theta=\frac{n}{m}$ が存在して

$$\alpha=\cos\left(\pi\theta\right) \tag{1}$$

が成立したとする. ここで $d:=\deg(f_\alpha)$ として, N を $2mN>d$ が成立する任意の整数とする. 第一種 Chebyshev 多項式

$$T_n(x):=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}\in\mathbb{Z}[x]$$

を用いて, $2mN$ 次の整数係数多項式

$$F(x):=T_{2mN}(x)-1\in\mathbb{Z}[x]$$

を考える. すると $\cos(x)$ の極値が 1 であることより, $F(x)$ は ±1 に単根を持ち, $mN-1$ 個の二重根

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi k}{mN}\right)\middle| k=1,\ldots,mN-1\right\}$$

を持つことがわかる:

$$F(x)=2^{n-1}(x^2-1)\prod_{k=1}^{mN-1}\left(x-\cos\left(\frac{\pi k}{mN}\right)\right)^2. \tag{2}$$

これより特に $F(x)$ の根は全て実数である.
　他方

$$\cos\left(2mN\pi\theta\right)=\cos\left(\pi 2nN\right)=1$$

と

$$\cos\left(2mN\pi\theta\right)=T_{2mN}(\cos\left(\pi\theta\right))=T_{2mN}(\alpha)$$

ゆえ, α は $F(x)$ の根である. よってある $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$ が存在して,

$$F(x)=f_\alpha(x)g(x)$$

が成立する. しかし α の仮定より, $f_\alpha(x)\in\mathbb{Q}[x]$ は実でない根を持つので, これは矛盾である.
(2) N を $2mN-1>d$ が成立する任意の整数とする. tan の倍角公式

$$\begin{aligned}\tan\left(2mN\pi\theta\right)&=\sqrt{-1}\frac{e^{2mN\sqrt{-1}\pi\theta}-e^{-2mN\sqrt{-1}\pi\theta}}{e^{2mN\sqrt{-1}\pi\theta}+e^{-2mN\sqrt{-1}\pi\theta}}\\&=\sqrt{-1}\frac{\left(\cos\left(\pi\theta\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\pi\theta\right)\right)^{2mN}-\left(\cos\left(\pi\theta\right)-\sqrt{-1}\sin\left(\pi\theta\right)\right)^{2mN}}{\left(\cos\left(\pi\theta\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\pi\theta\right)\right)^{2mN}+\left(\cos\left(\pi\theta\right)-\sqrt{-1}\sin\left(\pi\theta\right)\right)^{2mN}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{mN-1}(-1)^k\binom{2mN}{2k+1}(\tan(\pi\theta))^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{mN}(-1)^k\binom{2mN}{2k}(\tan(\pi\theta))^{2k}}$$

の分子の多項式を $Q_{2mN}(x)$ とする:

$$Q_{2mN}(x) := \sum_{k=0}^{mN-1}(-1)^k\binom{2mN}{2k+1}x^{2k+1}.$$

この $2mN-1$ 次の整数係数多項式 $Q_{mN}(x)$ の $2mN-1$ 個の根は

$$\left\{\tan\left(\frac{\pi k}{2mN}\right)\middle| 0 \le k \le 2mM-1, k \neq mN\right\}$$

であり, 特に全て実数である:

$$Q_{2mN}(x) = -(-1)^{mN}2mNx \prod_{\substack{1\le k\le 2mN-1\\ k\neq mN}}\left(x - \tan\left(\frac{\pi k}{2mN}\right)\right).$$

他方, $\tan(\pi\theta) = \tan\left(\frac{\pi n}{m}\right) = \alpha$ から

$$\tan(mN\pi\theta) = \tan(\pi Nn) = 0$$

より α も $Q_{mN}(x)$ の根であることがわかる. よって $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在して

$$Q_{mN}(x) = f_\alpha(x)g(x)$$

となるが, 先程と同様に $f_\alpha(x)$ には実でない根が存在するのでこれは矛盾である.

3 Concluding remarks

(1) Theorem 6 は Theorem 1 の一般化である. 実際, Theorem 1 の β を用いて $\alpha = \sqrt[N]{\beta}$ とすると, $f_\alpha(x)$ は $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}}\alpha$ を根に持つので Theorem 6 より, 任意の有理数 θ について $\cos(\pi\theta) \neq \sqrt[N]{\beta}$ や $\tan(\pi\theta) \neq \sqrt[N]{\beta}$ が成り立つことがわかる.

(2) $\mathbb{Q}(\cos(\pi\theta))$, $\mathbb{Q}(\tan(\pi\theta))$ が総実 (共役体が全て実) であることを認めるならば, Theorem 6 は, その対偶「ある有理数 θ が存在して $\alpha = \cos(\pi\theta)$ ならば, $\mathbb{Q}(\alpha)$ は総実」より直ちに従う. ただし, $\mathbb{Q}(\cos(\pi\theta))$, $\mathbb{Q}(\tan(\pi\theta))$ が総実であることの証明には Galois 理論もしくは, 上述したような倍角公式の議論が必要になると思われる.

またこの命題の逆「$\mathbb{Q}(\alpha)$ が総実ならば, ある有理数 θ が存在して $\alpha = \cos(\pi\theta)$」は成り立たない. 実際, $\alpha = \sqrt{3-\sqrt{2}}$ とすると $\mathbb{Q}(\alpha)$ は総実ではあるが, Galois ではないので $\alpha = \cos(\pi\theta)$ なる有理数 θ は存在しない ($\mathbb{Q}(\alpha)$ を含む最小の Galois 体は $\mathbb{Q}$ 上 8 次の $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \alpha)$).

更に $\mathbb{Q}(\alpha)$ が総実かつ Galois かつ Abel であったとしても, $\alpha = \cos(\pi\theta)$ なる有理数 θ は存在するとは限らない. たとえば $\alpha = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ とすると

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$

ゆえ, 総実かつ Galois(かつ Abel) であるが, α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は

$$x^2+2x-1$$

であり, $x=z+z^{-1}$ として z^2 を掛けると,

$$z^4+2z^3+z^2+2z+1$$

を得る. もし $\alpha=2\cos(\pi\theta)=e^{\pi\sqrt{-1}\theta}+e^{-\pi\sqrt{-1}\theta}$ なる有理数 θ が存在したとすると $z^4+2z^3+z^2+2z+1$ は 4 次の円分多項式

$$\Phi_5(z)=z^4+z^3+z^2+z+1,\quad \Phi_8(z)=z^4+1,$$
$$\Phi_{10}(z)=z^4-z^3+z^2-z+1,\quad \Phi_{12}(z)=z^4-z^2+1$$

のいずれかに一致しなければならないが, そのいずれにも該当しない.

しかし $\mathbb{Q}(\alpha)$ が総実かつ Galois かつ Abel であるならば, $\mathbb{Q}(\alpha)\subset\mathbb{Q}(\cos(\pi\theta))$ なる有理数 θ が存在する (Kronecker-Weber).

(3) 上述の証明は $a\neq b$ の判定を, その $\mathbb{Q}$ 上の拡大 $\mathbb{Q}(a)$ と $\mathbb{Q}(b)$ が一致しないことから導くという論法である. 本稿では Galois 理論を用いない証明を主題としたので, Galois 群, あるいは Galois 拡大を用いない総実性から判定したが, 「Galois 群を使わない」ということであれば, Galois 拡大による判定もできる. ただし, 具体的な代数的数が三角函数の等分値になるか否かの判定は, 総実性を用いる判定の方がやりやすいように思われる (つまり三角函数の等分値になるか否かの判定は, 総実, Galois, Abel の順にしていくのがよい?).

参考文献

[1] L. Carlitz and J. M. Thomas: *Rational tabulated values of trigonometric functions*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 789–793.

[2] A. Erdélyi (editor): *Higher transcendental functions vol.2*, McGraw-Hill, (1953).

[3] J. M. H. Olmsted, *Rational values of trigonometric functions*, Amer. Math. Monthly **52**-9 (1945) 507–508.

[4] G. Shibukawa: *Rational values of powers of trigonometric functions*, J. Math. Tokushima Univ. **54**, (2020) pp13–18.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University,
1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe, 657-8501, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

三角関数が 有理数の角度に対して 有理数の値をとるのはいつか？

東京海洋大学名誉教授　　中 村　滋

はじめに

フィボナッチ数とは直接の関係はありませんが，今回の渋川元樹さんの論文「三角函数の等分値で書けない実数」に関係あるので，とても興味深い表記の定理の極めて初等的な証明を紹介します.「有理数の角度に対して 三角関数が有理数になるのはいつか？」という問に答える定理です.

<u>定理</u> 角度 $\alpha = r \times 360^\circ$（$r \in \mathbb{Q}$）に対する $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値は 0, ±1/2, ±1 に限られる.

これは普通「Niven の定理」と呼ばれていますが, Niven が書いている通り, Olmsted が証明し，Niven が紹介しました．最近になって，$\cos\alpha$ の２倍角の公式だけを使う初等的な証明が見つかりました．一つは１０年ほど前の Jahnel によるもの，もう一つは今年発表された Paolillo と Vincenzi の共著論文です.

（証明１；by Jahnel）角度 $\alpha = r \times 360^\circ$（$r \in \mathbb{Q}$）に対して $2\cos\alpha = a/b$（a，b は整数で（a，b)＝1 とする）とおくと，cosine の２倍角の定理により，$2\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 2 = (a^2 - 2b^2)/b^2$ となる．この分母と分子も互いに素だから，右辺は既約分数になる．同様にして，$2\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 2 = \{(a^2-2b^2)^2 - 2b^4\}/b^4$ となり，この右辺もやはり既約分数である．以下 角度を次々に２倍にしていく．もしも $b^2 > 1$ だと仮定すると，角度を２倍にするごとに, 右辺の分母は限りなる大きくなっていく. いま, $r = m/n$ (m, n は整数で（m，n)＝1 とする）と書くと，$\{2\cos 2^k\alpha\ ;\ k = 1, 2, 3, \cdots)$ は，cosine の周期性から 高々 n 個の値しかとらない．これは矛盾である．したがって $b^2 = 1$ になる．よって $b^2 = 1$，∴ $b = \pm 1$ である．$2\cos\alpha = a/b$ だったので，$\cos\alpha$ は 0, ±1／2, ±1 しか取れない．$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ だから，$\sin\alpha$ についても同様である.　□

（証明２；by Paolillo＝Vincenzi ）$\alpha = r \times 360^\circ$（$r \in \mathbb{Q}$）とし，$\cos\alpha \neq 0$ と仮定する．$\cos\alpha = a/b$（a，b は整数で（a，b)＝1 とする）となったとして，$n\alpha/360^\circ \in \mathbb{N}$ となる n を固定する．$\alpha_p = p \times 360^\circ / n$（$p \in \mathbb{N}$）とおき．$\alpha_m = \alpha$ とすると，$\cos\alpha_m \in \mathbb{Q}$ である．ここで集合 $T_n = \{\cos\alpha_p \in \mathbb{Q},\ \cos\alpha_p \neq 0 \mid p \in \mathbb{N}\}$ は，作り方から有限で

あり $T_n \neq \phi$，$T_n \subset \mathbb{Q}$ である．$\cos\alpha_p = a_p / b_p$（$a_p \in \mathbb{Z}$，$a_p \neq 0$，$b_p \in \mathbb{N}$，$(a_p, b_p) = 1$）と書く．これらの中で，分母が最大になるものを．$\cos\alpha_k = a_k / b_k$ とする．$\alpha_{2k} = 2\alpha_k$ $[=(2\times k/n)360^\circ]$ だから，cosine の２倍角の公式より，$\cos\alpha_{2k} = \cos 2\alpha_k = 2\cos^2\alpha_k - 1 = (2a_k^2 - b_k^2)/b_k^2$ となる．

Case 1 b_k が奇数のとき，$a_k^2 - 2b_k^2$ と b_k^2 は互いに素であり，$\neq 0$ である．k の取り方から，$\cos\alpha_{2k}$ の右辺の分母は $b_k \geqq b_k^2 > 0$ なので，$b_k = 1$ となる．よって，$b_p = 1, a_k - \pm 1$ である．すなわち $\cos\alpha_p = \pm 1$ ．

Case 2 b_k が偶数のとき，$b_k = 2s$（$s \in \mathbb{N}$）と書くと，$\cos\alpha_{2k} = \cos 2\alpha_k = 2\cos^2\alpha_k - 1 = (2a_k^2 - b_k^2)/b_k^2 = (2a_k^2 - s^2)/2s^2$ となる．a_k と s も互いに素だから，右辺は 既約分数$\neq 0$ である．k の取り方から，$b_k \geqq 2s^2 = b_k^2/2 > 0$ なので $2 \geqq b_k > 0$ である．すなわち $b_k = 1, 2$．∴ $\cos\alpha_p = \pm 1/2$，± 1 に限られる．$\cos\alpha_p = 0$ にもなるから，定理は証明された．$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ によって，$\sin\alpha$ についても同様. □

どちらも素晴らしいですね．普通の高校生にも理解できる証明です.

参考文献

J.Jahnel;"When is the (co)sine of a rational angle equal to a rational number?", arXiv. no.1006.2938,（2010）

B.Paolillo = G Vincenzi ; "On the Rational Values of Trigonometric functions of Angles that are Rational in Degrees", Mathmatics Magagine. Vol.94, pp132－34（2021）

.

初期値一般の定数係数線型常差分方程式の一般解

渋川元樹 * (神戸大理)

講演動画：`https://www.youtube.com/watch?v=b2BUOc4PXSk`

概 要

初期値が一般の場合の定数係数線型常差分方程式の一般解を, 完全斉次対称多項式と基本対称式に特性根を代入した特殊値を用いて表示する公式を与える.

1 Introduction

$a_0 = 1, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ とする. このとき, r 階定数係数線型常差分方程式を

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j a_j y_{n-j} = 0 \tag{1}$$

で定める. この (1) は r 階定数係数線型常微分方程式

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j a_j \frac{d^{n-j} y(x)}{dx^{n-j}} = 0 \tag{2}$$

の差分類似であり, Fibonacci 数や Lucas 数をはじめ, 多くの特殊数列が満たす線型差分方程式である.

よく知られているように微分方程式 (2) については初期値

$$y(0) = c_1, \quad \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=0} = c_2, \ldots, \quad \left.\frac{d^{r-1} y(x)}{dx^{r-1}}\right|_{x=0} = c_r \tag{3}$$

が与えられると, その一般解が (2) の特性多項式

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j a_j x^{n-j} = \prod_{j=1}^{r} (x - \alpha_j) \tag{4}$$

の (特性) 根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を用いて

$$y(x) = \sum_{i=1}^{r} e^{\alpha_i x} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} c_{r+1-j} e_{r,j-1}^{(i)} \prod_{1 \le l \ne i \le r} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_l} \tag{5}$$

*g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

と表示できる. ただし, $e^{\alpha_j x}$ は通常の指数函数, $e^{(j)}_{r,r-k}$ は r 変数 n 次の基本対称式

$$e_{r,n}(x_1,\ldots,x_r) := \begin{cases} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_n\le r} x_{j_1}\cdots x_{j_r} & (0\le n\le r) \\ 0 & (\text{others}) \end{cases}$$

の j 番目の変数 x_j を 0 としてから, 各 x_i に α_i を代入したものである.

証明は (2) の基本解 $e^{\alpha_1 x},\ldots,e^{\alpha_r x}$ の線型結合

$$y(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + C_r e^{\alpha_r x}$$

を考え, r 個の初期値の条件より連立方程式

$$\begin{pmatrix} c_r \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} = (\alpha_j^{r-i})_{1\le i,j\le r} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_r \end{pmatrix}$$

を立てて, これを $C_1,\ldots,C_r$ について解けばよい (Vandermonde 行列 $(\alpha_j^{r-i})_{1\le i,j\le r}$ に合わせて書いたので c_i のベクトルと C_i のベクトルの並べ方がひっくり返っていることに注意する). この際に Vandermonde 行列 $(\alpha_j^{r-i})_{1\le i,j\le r}$ の逆行列が問題になるが, Schur 多項式

$$s_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}(x_1,\ldots,x_r) := \det\,(x_j^{\lambda_i+r-1})_{1\le i,j\le r} \prod_{1\le i<j\le r} \frac{1}{x_i - x_j}$$

を用いると, 特に一列型の Schur 多項式が基本対称式であることより

$$\begin{aligned}(\alpha_j^{r-i})^{-1}_{1\le i,j\le r} &= \left((-1)^{i+j} \det\,(\alpha_k^{r-l})_{\substack{1\le k,l\le r \\ k\ne i, l\ne j}}\right)_{1\le i,j\le r} \prod_{1\le i<j\le r} \frac{1}{\alpha_i-\alpha_j} \\ &= \left((-1)^{j-1} e^{(i)}_{r,j-1} \prod_{1\le l\ne i\le r} \frac{1}{\alpha_i-\alpha_l}\right)_{1\le i,j\le r}\end{aligned}$$

ゆえ

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_r \end{pmatrix} &= (\alpha_j^{r-i})^{-1}_{1\le i,j\le r} \begin{pmatrix} c_r \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} \\ &= \left((-1)^{j-1} e^{(i)}_{r,j-1} \prod_{1\le l\ne i\le r} \frac{1}{\alpha_i-\alpha_l}\right)_{1\le i,j\le r} \begin{pmatrix} c_r \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} c_{r+1-j} e^{(1)}_{r,j-1} \prod_{1\le l\ne 1\le r} \frac{1}{\alpha_1-\alpha_l} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} c_{r+1-j} e^{(r)}_{r,j-1} \prod_{1\le l<r} \frac{1}{\alpha_r-\alpha_l} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり, (5) を得る.

これと同様の議論が, 初期値

$$y_1 = c_1, \dots, y_r = c_r \tag{6}$$

の差分方程式 (1) の一般解について成立する. すなわち (1) の特性多項式は (2) と同じ (4) であり, その特性根 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を用いると, 一般解は (5) において各基本解 $e^{\alpha_i x}$ を α_i^{n-1} に置き換えた

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{n-1} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} c_{r+1-j} e_{r,j-1}^{(i)} \prod_{1 \le l \ne i \le r} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_l} \quad (n \ge 1) \tag{7}$$

であることがわかる.

たとえば $r=2$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ として (7) を書き下せば, お馴染みの

$$y_n = \alpha^{n-1} \frac{c_2 - \beta c_1}{\alpha - \beta} + \beta^{n-1} \frac{c_2 - \alpha c_1}{\beta - \alpha} = c_1 \frac{\alpha \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} \beta}{\alpha - \beta} + c_2 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

になっている.

この一般解の表示 (7) はよく知られていると思うが, 次のような欠点がある. まず第一にこれらの表示はその導出の際に「特性根 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ が互いに相異なる」という仮定が必要になる. 結果自体は特性根の退化が起きているときにもその極限まで含めて考えれば表示が正しいことはわかるが, その極限を取った表示は一般には自明ではないために, 特性根の退化に応じた個別の計算をしなければならない.

第二に, これは微分の場合には生じなかった差分方程式特有の事情だが, 定義より y_n は特性根を用いずに与えられた差分 (ないしは微分) 方程式の係数 $a_1, \dots, a_r$ と初期値 $c_1, \dots, c_r$ の整数係数多項式の形で書けている. しかし当然のことながら (7) から一般解を具体的に書こうと思うと特性根の明示的表示を用いるか, 適当に整理して特性根の対称多項式の形に書き直すかのいずれかの step が必要になる. それゆえ実際の計算をするうえでは非常に使い勝手が悪く, あまり役に立たない.

そこで本稿ではこれらの困難を解消するために, (1) の, 初期値一般

$$y_1 = c_1, \dots, y_r = c_r \tag{8}$$

の場合の一般解を, r 変数の完全斉次対称多項式

$$h_{r,n}(x_1, \dots, x_r) := \sum_{j_1 + \cdots + j_r = n} x_1^{j_1} \cdots x_r^{j_r}, \quad h_{r,0}(x_1, \dots, x_r) := 1$$
$$h_{r,-1}(x_1, \dots, x_r) := 0, \dots, h_{r,-r+1}(x_1, \dots, x_r) := 0$$

及び基本対称式 $e_{r,n}(x_1, \dots, x_r)$ に, (1) の特性多項式 (4) の根 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を代入した

$$h_{r,n} := h_{r,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \quad e_{r,n} := e_{r,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = a_n$$

を用いて明示的に表示する以下の公式を与える.

Theorem 1. 初期値 $y_1 := c_1, \ldots, y_r := c_r$ で差分方程式 *(1)* を満たす一般解 $\{y_n\}_{n\geq 1}$ は以下のように書ける*:*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} h_{r,n-i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j a_j c_{i-j} \tag{9}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} c_i \sum_{j=0}^{r-i} (-1)^j a_j h_{r,n-i-j}. \tag{10}$$

更には $h_{r,n}$ を基本対称式 $e_{r,1}, \ldots, e_{r,r}$ で表示する公式と併せて, 初期値一般の r 階定数係数線型常差分方程式の一般解を, 特性根を用いない, すなわち (1) の係数 $a_1, \ldots, a_r$ と初期値 $c_1, \ldots, c_r$ のみで書く以下の公式も導出する.

Theorem 2. 初期値 $y_1 := c_1, \ldots, y_r := c_r$ で差分方程式 *(1)* を満たす一般解 $\{y_n\}_{n\geq 1}$ は以下のように書ける*:*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{r} k m_k = n-i}} (m_1 + \cdots + m_r)! \prod_{l=1}^{r} \frac{(-1)^{(l-1)m_l} a_l^{m_l}}{m_l!} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j a_j c_{i-j} \tag{11}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} c_i \sum_{j=0}^{r-i} (-1)^j a_j \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{r} k m_k = n-i-j}} (m_1 + \cdots + m_r)! \prod_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{(l-1)m_l} a_l^{m_l}}{m_l!}. \tag{12}$$

この Theorem 1 あるいは Theorem 2 は恐らく "folklore" の類で, 真に未知の結果ではないと思う. しかし Macdonald [1] をはじめ, 明示的に書かれている適当な文献が見当たらず, Fibonacci 協会界隈でも見かけたことがないので, 今回ノートとしてまとめた次第である.

2 Proof of main results

Theorem 1 の証明に必要な補題を述べる.

Lemma 3. (1) *Wronski* 関係式

$$\sum_{j=0}^{\min(n,r)} (-1)^j e_{r,j} h_{r,n-j} = 0. \tag{13}$$

(2)

$$(h_{r,i-j})_{1\leq i,j\leq r}^{-1} = ((-1)^{i-j} e_{r,i-j})_{1\leq i,j\leq r}. \tag{14}$$

Proof. (1) [1] (2.6′) 参照.
(2) (13) を用いると直接計算からわかる. □

Proof of Theorem 1 まず特性多項式 (4) の根と係数の関係より

$$a_j = e_{r,j}$$

であることに注意すると, (13) より $\{h_{r,n}\}$ は (1) の解であることがわかる. よって (1) の一般解は

$$y_n = \sum_{j=1}^{r} C_j h_{r,n-j}$$

と書ける.

この表示より

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = (h_{i-j})_{1\le i,j\le r} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_r \end{pmatrix}$$

ゆえ, この両辺に左から $(h_{i-j})^{-1}_{1\le i,j\le r}$ を掛けると, (14) と (8) より

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_r \end{pmatrix} = (h_{i-j})^{-1}_{1\le i,j\le r} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = ((-1)^{i-j} e_{r,i-j})_{1\le i,j\le r} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j e_{r,j} c_{r-j} \end{pmatrix}$$

ゆえ結論を得る. □

Example 4. (1) $r = 2$ の場合

$$\begin{aligned} y_n &= h_{2,n-1}c_1 + h_{2,n-2}(c_2 - a_1 c_1) \\ &= c_1(h_{2,n-1} - a_1 h_{2,n-2}) + c_2 h_{2,n-2}. \end{aligned}$$

特に $a_1 = e_{2,1} = 1, a_2 = e_{2,2} = -1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ とすると

$$y_n = h_{2,n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} = F_n,$$

となるのでこれは Fibonacci 数に他ならない.

また初期値を $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ に変更すると

$$y_n = h_{2,n-1} + 2h_{2,n-2} = F_n + 2F_{n-1}$$

となり, これは Lucas 数 L_n の Fibonacci 数による表示である. 通常はこれを $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ で整理した $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ の方が有名であるが, 一般解の表示公式からは $L_n = F_n + 2F_{n-1}$ の方が自然であることがわかる.

(2) $r = 3$ の場合

$$\begin{aligned} y_n &= h_{3,n-1}c_1 + h_{3,n-2}(c_2 - a_1 c_1) + h_{3,n-3}(c_3 - a_1 c_2 + a_2 c_1) \\ &= c_1(h_{3,n-1} - a_1 h_{3,n-2} + a_2 h_{3,n-3}) + c_2(h_{3,n-2} - a_1 h_{3,n-3}) + c_3 h_{3,n-3}. \end{aligned}$$

Theorem 2 の証明は次の補題を証明すれば十分である.

Lemma 5. 任意の非負整数 n について

$$h_{r,n} = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r km_k = n}} (m_1 + \cdots + m_r)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{m_j(j-1)} a_j^{m_j}}{m_j!}. \tag{15}$$

Proof. まず $\{h_{r,n}\}$ の母函数が

$$\sum_{n\geq 0} h_{r,n} u^n = \prod_{j=1}^r \frac{1}{1-\alpha_j u} = \left(1 + \sum_{j=1}^r (-1)^j a_j u^j\right)^{-1}$$

であることに注意する. この最右辺を Mellin 変換により

$$\left(1 + \sum_{j=1}^r (-1)^j a_j u^j\right)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\left(1+\sum_{j=1}^r (-1)^j a_j u^j\right)t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t} \prod_{j=1}^r e^{(-1)^{j-1} a_j u^j t}\,dt$$

と変形して計算すると

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} h_{r,n} u^n &= \int_0^\infty e^{-t} \sum_{m_1,\dots,m_r\geq 0} \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{m_j(j-1)} a_j^{m_j} u^{jm_j}}{m_j!} t^{m_j}\,dt \\
&= \sum_{m_1,\dots,m_r\geq 0} u^{\sum_{k=1}^r km_k} \int_0^\infty e^{-t} t^{m_1+\cdots+m_r}\,dt \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{m_j(j-1)} a_j^{m_j}}{m_j!} \\
&= \sum_{n\geq 0} u^n \sum_{\substack{m_1,\dots,m_r\geq 0 \\ \sum_{k=1}^r km_k = n}} (m_1+\cdots+m_r)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{m_j(j-1)} a_j^{m_j}}{m_j!}.
\end{aligned}$$

u^n についての係数比較をして結論を得る. □

Example 6. (1) $r = 2$ の場合

$$\begin{aligned}
h_{2,n} &= \sum_{\substack{m_1,m_2\geq 0 \\ m_1+2m_2=n}} (-1)^{m_2}(m_1+m_2)! \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \frac{a_2^{m_2}}{m_2!} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k (n-k)! \frac{a_1^{n-2k}}{(n-2k)!} \frac{a_2^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} a_1^{n-2k} a_2^k.
\end{aligned}$$

特に $a_1 = 2x$, $a_2 = 1$ とすれば, 第二種 Chebyshev 多項式

$$U_n(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}$$

であり, $a_1=1$, $a_2=-1$ とすれば, Fibonacci 数の二項係数の和による表示

$$F_{n+1}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n-k}{k}$$

である.
(2) $r=3$ の場合

$$\begin{aligned}
h_{3,n} &= \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\geq 0\\ m_1+2m_2+3m_3=n}}(-1)^{m_2+2m_3}(m_1+m_2+m_3)!\frac{a_1^{m_1}}{m_1!}\frac{a_2^{m_2}}{m_2!}\frac{a_3^{m_3}}{m_3!}\\
&= \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\geq 0\\ m_1+2m_2+3m_3=n}}(-1)^{m_2+2m_3}(m_1+m_2+m_3)!\frac{a_1^{m_1}}{m_1!}\frac{a_2^{m_2}}{m_2!}\frac{a_3^{m_3}}{m_3!}\\
&= \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ 2k+3l\leq n}}(-1)^k(n-k-2l)!\frac{a_1^{n-2k-3l}}{(n-2k-3l)!}\frac{a_2^k}{k!}\frac{a_3^l}{l!}\\
&= \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ 2k+3l\leq n}}(-1)^k\binom{n-k-2l}{k,l}a_1^{n-2k-3l}a_2^k a_3^l
\end{aligned}$$

Theorem 1 と Theorem 2 の応用として, 初期値 (3) の定数係数常微分方程式 (2) の一般解 (5) の $x=0$ での Taylor 展開の展開係数が得られる.

Corollary 7.

$$y(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha_i^n}{n!}x^n\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}c_{r+1-j}e_{r,j-1}^{(i)}\prod_{1\leq l\neq i\leq r}\frac{1}{\alpha_i-\alpha_l} \tag{16}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j a_j c_{i-j}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}h_{r,n+1-i} \tag{17}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}c_i\sum_{j=0}^{r-i}(-1)^j a_j\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}h_{r,n+1-i-j} \tag{18}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j a_j c_{i-j}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{\substack{m_1,\dots,m_r\geq 0\\ \sum_{k=1}^r km_k=n+1-i}}(m_1+\cdots+m_r)!\prod_{l=1}^{r}\frac{(-1)^{(l-1)m_l}a_l^{m_l}}{m_l!} \tag{19}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}c_i\sum_{j=0}^{r-i}(-1)^j a_j\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{\substack{m_1,\dots,m_r\geq 0\\ \sum_{k=1}^r km_k=n+1-i-j}}(m_1+\cdots+m_r)!\prod_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{(l-1)m_l}a_l^{m_l}}{m_l!}. \tag{20}$$

これらの級数は, 元は指数函数の線型和であったことから, 収束半径は無限大である. また (19), (20) は特性根を用いていない, 微分方程式 (2) の係数と初期値のみの表示であることに注意せよ.

Remark 8. Theorem 1 と Theorem 2 は斉次型の差分方程式 (1) の一般解であるが, 更に定数 c を取って非斉次型の差分方程式

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j a_j y_{n-j} = c \tag{21}$$

についても, (21) の特解との和の形で一般解を書くことができる. (21) の特解は, N を

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(-j)^k a_j = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$
$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(-j)^N a_j \neq 0$$

なる非負整数とするとき

$$y_n = \frac{c}{\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(-j)^N a_j} n^N$$

である (等差数列の一般化) ので, 初期値 $y_1 := c_1, \ldots, y_r := c_r$ の非斉次型定数係数常差分方程式 (21) の一般解は以下のように書ける:

$$\begin{aligned}
&y_n - \frac{c}{\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(-j)^N a_j} n^N \\
&= \sum_{i=1}^{r} h_{r,n-i} \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j a_j c_{i-j} &(22)\\
&= \sum_{i=1}^{r} c_i \sum_{j=0}^{r-i}(-1)^j a_j h_{r,n-i-j} &(23)\\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{r} k m_k = n-i}} (m_1 + \cdots + m_r)! \prod_{l=1}^{r} \frac{(-1)^{(l-1)m_l} a_l^{m_l}}{m_l!} \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j a_j c_{i-j} &(24)\\
&= \sum_{i=1}^{r} c_i \sum_{j=0}^{r-i}(-1)^j a_j \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{r} k m_k = n-i-j}} (m_1 + \cdots + m_r)! \prod_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{(l-1)m_l} a_l^{m_l}}{m_l!}. &(25)
\end{aligned}$$

参考文献

[1] I. G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, 1995.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University,
1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe, 657-8501, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

ϵ, μ -半群三叉とその性質について

打越柊哉　海城高校二年

2021 年 9 月 1 日

概要

著者が ϵ, μ -半群三叉と名付けた数学的構造と, その性質についての主要な研究結果を記す.

1　はじめに

今回述べる ϵ, μ-半群三叉は可換環や全順序から簡単に作ることができるため, 環や順序といったものを統一的に記述することを目的として, この数学的構造の性質を記述することにした.

2　ϵ, μ -半群三叉の定義とその例

ϵ, μ-三叉を以下のように定義する.

定義 1. 集合 T と, その上の一つのアーベル群演算 $+$ と可換二項演算 $\epsilon, \mu : T \times T \to T$ で, 任意の S の元 x, y に対して, $x \epsilon y + x \mu y = x + y$ を満たす時, それらの組 $\{T, \epsilon, \mu\}$ を ϵ, μ-三叉と定義する. そして, その時のアーベル群演算を主演算, その他二つの二項演算を副演算とする. ϵ, μ-三叉のうち, その副演算が両方結合的なものを ϵ, μ-半群三叉とする.

可換環からは以下のように作られる:

例 1. 可換環 $R, +, \cdot$ に対して, $x * y := x + y - xy$ とすると, $\{R, +, \cdot, *\}$ が ϵ, μ-半群三叉となる.

証明. 定義に従い計算すると, $(x * y) * z = x * (y * z) = x + y + z - xy - yz - zx + xyz$ となり示される. □

また, 全順序集合からは以下のように作られる:

例 2. 任意の全順序集合 S とアーベル群 $+$ に対して, $x \vee y := max\{x, y\}, x \wedge y := min\{x, y\}$ とすると, $\{S, +, \vee, \wedge\}$ が ϵ, μ-半群三叉となる.

演算の結合性は順序集合の性質から導かれる.

また, 主演算を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に固定した時, 副演算が可換かつ結合的ならば, 全て ϵ, μ -半群三叉となることが調べ上げることにより分かる.

主演算を $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に固定した時, ϵ, μ -半群三叉となるような副演算は, 結合的な演算を全て調べると (三元半群は), その副演算の乗積表が次ページの五つのいずれかと同型であることと同値であることが分かる:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	2
2	2	2	2

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

3　ϵ, μ -三叉と写像に関する性質

下記のような種類の写像を定義する.

定義 2. アーベル群 A について, 任意の $x, y \in A$ で $f(x+y)+f(0)=f(x)+f(y)$ を満たす写像 $f: A \to A$ を亜加法的写像と定義する.

例 3. アーベル群 A について, $a \in \mathbb{Z}, b \in A$ に対し, $f(x) \coloneqq ax+b$ と定めれば, 亜加法的写像となる.

すると, ϵ, μ -三叉と亜加法的写像に関して以下のような定理が成り立つ.

定理 1. ϵ, μ -三叉 $\{T, +, \epsilon, \mu\}$ について, ϵ, ϵ' と μ, μ' がそれぞれ同型で, その同型写像が一致していて, それが亜加法的写像で全単射ならば, $\{T, +, \epsilon', \mu'\}$ は ϵ, μ -三叉である.

証明. ϵ から ϵ',μ から μ' の同型写像を f, とおくと, $x \; \mu' \; y = f(f^{-1}(x) \; \mu \; f^{-1}(y))$, $x \; \epsilon' \; y = f(f^{-1}(x) \; \epsilon \; f^{-1}(y))$ となり, 各辺を足し合わせて, 亜加法的写像と ϵ, μ -半群三叉の定義を用いて計算して,

$$\begin{aligned} x \; \epsilon' \; y + x \; \mu' \; y &= f(f^{-1}(x) \; \mu \; f^{-1}(y)) + f(f^{-1}(x) \; \epsilon \; f^{-1}(y)) + f(0) \\ &= f(f^{-1}(x) \; \mu \; f^{-1}(y) + f^{-1}(x) \; \epsilon \; f^{-1}(y)) + f(0) \\ &= f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) + f(0) \\ &= f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) \\ &= x + y \end{aligned}$$

□

特に集合の元の個数が 3 以下である時, 全ての写像が亜加法的であるため, ϵ, μ -半群三叉 $\{T, +, \epsilon, \mu\}$ に対し, $\#T \leq 3$ で, ϵ, ϵ' と μ, μ' がそれぞれ同型で, その同型写像が一致しているならば $\{T, +, \epsilon', \mu'\}$ は ϵ, μ -半群三叉である.

参考文献

[1] Diego, Fririk and Jónsdóttir, Kristín Halla (2008) ”Associative Operations on a Three-Element Set,” The Mathematics Enthusiast: Vol. 5 : No. 2 , Article 9.

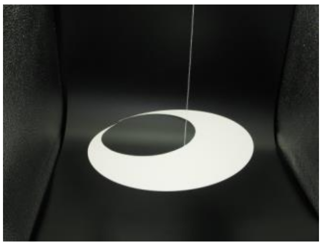
[2] Distler, A., Kelsey, T. The semigroups of order 9 and their automorphism groups. Semigroup Forum 88, 93 – 112 (2014). https://doi.org/10.1007/s00233-013-9504-9

[3] 赤沼 浩之・堀部 昌裕・若杉 瞳 (2009)「Sn (n = 3, 4, 5) の部分群の分類」 http://www.isc.meiji.ac.jp/ kurano/soturon/ronbun/08kurano.pdf

～休憩・展示～

「黄金の月」

五輪教一＋山﨑憲久



　福島県内の現存算額に、
「与えられた円板から小円板を切り抜いた残りの
重心の位置」を求める問題があります。
　問題を解いた後で、重心に紐を付けて吊り下げられる限界を調べたところ、図らずも黄金分割が現れました。

　下に載せた写真は、山﨑が木工作品に仕上げた卓上オブジェです。

　今回は紙面での展示ですが、東京での研究会開催が可能になった折りには、ぜひ持参したいと思っております。
　名付けて「黄金の月」。休憩時に展示室でご覧いただき、疲れた頭を休めていただければ幸いです。