

第**20**回 日本フィボナッチ研究集会報告

2022 年 10 月
日本フィボナッチ協会

フィボナッチ数に関心のある皆様

2022 年 8月に行われる予定のフィボナッチ研究集会も新型コロナの終息が見えないなか中止にしました。

頂いた原稿は一部修正がありましたが、昨年同様全員に配信し一部は紙媒体として保存。原稿の締め切りは 9月 21 日で配信は 10月21日です。報告集は対面を前提としたもので、コロナ禍では大きく変わりましたが、冊子のタイトルは 継続性を考え『第 20 回日本フィボナッチ研究集会報告』としました。今まで大変な時期もありましたが皆様のサポートで乗り越えてきました。来年の状況は全く分かりませんが、収束の兆しが見えれば 1月から 3月に日程調整、4月に会場と懇親会会場の申し込みを予定しています。

日本フィボナッチ協会代表 大関 清太

目 次

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. 変異完全数の発見 | 飯高 茂
(学習院大学名誉教授) |
| 2. フィボナッチ数、リュカ数の新しい総和公式とその拡張再論 | 中村 滋
(東京海洋大学名誉教授) |
| 3. すべての素数を順に表す定数 | 中村 滋
(東京海洋大学名誉教授) |
| 4. フィボナッチ数とリュカ数の遷移過程と相互変換 | 萩原幸男・立井博子 |
| 5. 「現代の算額」について | 五輪教一 |
| 6. 実定数係数線型常差分方程式の解の比の極限の存在について | 渋谷元樹
(神戸大理) |
| 7. フィボナッチ数とフェルマー方程式 $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ | 宗像 修
(福島県立矢吹病院) |
| 8. 多角平方三角数について | 片山真一
(徳島大学) |
| 9. $\sqrt{5}$ の求め方 (1) | 久保田和臣
(放送大学教養学部4年 千葉学習センター) |
| 10. INTEGER VALUES OF GENERATING FUNCTIONS FOR LUCAS SEQUENCES | 諏訪紀幸
(中央大学) |
| 11. $\sigma(n) + \phi(n) - 2n$ について | 齋藤之理
(麻布中学 1 年生) |
| 12. フィボナッチ数に関する定数の 89 倍と 109 倍について | 岩淵 勇樹 |

変異完全数の発見

飯高 茂

2022 年 7 月 8 日

1 前書き

完全数は西暦前 370 年より始まる長い研究の歴史を持ち、繰り返しその一般化や類似物が作られ研究されて来た。奇数の完全数問題など未解決の課題も多い。

ここでは、ベースと乗数、さらに平行移動を含めた完全数の一般化を行う。

約数の和関数 $\sigma(a)$ のほかにオイラー関数も動員するので定義式は複雑になり、3 項完全数とでもいうべきものになった。

定数 k の素数倍 kp がありしかも、 p が複数個あるという条件をつけることによってやはり複雑ではあるが $P = 2$ でしかも豊富な解をもつ新しい完全数が定義されこれは過剰度 12 の過剰数が多くある場合の一般化になる点で興味をそそる。

h を奇素数とし、 m を平行移動のパラメータとすればその定義式は

$$\sigma(\alpha) + 4(1 - h)\varphi(\alpha) = 2(2 - h)\alpha - m.$$

$h = 1$ のとき、 $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ となる。この解は平行移動 m の完全数と呼ばれる。

h は奇素数であり、 $h = 3$ なら $\sigma(\alpha) - 8\varphi(\alpha) = -3\alpha - m$ 。

これは豊富な興味深い解を持つ点で優れた性質を持つ。

古典的な平行移動 m の完全数は $h = 1$ の場合だが、 $h > 2$ の場合はさらに豊富な例を産出する。

2022 年 7 月の今日現在もコロナ感染症は収束に至らないのは残念至極であるがここで定義された新しい 3 項完全数は古典的完全数の変異とも見なしうると想念し、変異完全数と命名することにした。

2 abundance

自然数 n , 約数の和 $\sigma(n)$ について $I(n) = \sigma(n) - 2n$ を abundance(過剰度) という.

奇数の k について, $I(n) = k$ を満たす n は少ないが複数個の解 n がある場合を齋藤之理 (中学 1 年生) は求めた. 例えば, $k = 199$ のとき, 2 個の解 $n = 324, 784$ がある.

$I(n) = 0$ を満たす場合 n は完全数であって, $\sigma(2^e) = p$ が素数の時, $\alpha = 2^e p$ は完全数になることは, ユークリッドの知るところであった.

齋藤之理は n の約数の和 $\sigma(n)$ が素数 p になる場合を 10 億以下の場合に決定した. このとき $\alpha = np$ はユークリッドの完全数の一般化になる.

そこで, α の満たす方程式を作りその解を求め, とくに A 型解なるものを研究する.

$\sigma(n)$ が素数 p になる場合 n は素数べきになる. これを基に完全数の一般化を試みる.

P を素数としこれを固定してベースと考える.

$a = P^e$ について, $\bar{P} = P - 1$ とおくとき等比数列の和の公式より $\bar{P}\sigma(a) = P^{e+1} - 1 = aP - 1$ が成り立つ.(ここで, $\bar{P} = P - 1$)

$L = \sigma(a) = \frac{aP - 1}{\bar{P}}$ が素数のとき $\alpha = aL$ はユークリッドの完全数の一般化である.

さらに一般化するため, 次のように乗数と平行移動を考えてその定義方程式を作る.

3 完全数の一般化

$a = P^e$ について, $\bar{P} = P - 1$ とおくとき等比数列の和の公式より $\bar{P}\sigma(a) = P^{e+1} - 1 = aP - 1$ が成り立つ.

m を平行移動のパラメータ, $h (\neq P)$ を別の奇素数としこれを乗数と見て

$A = \frac{hP^{e+1} - 1}{\bar{P}} + m$ は素数と仮定する.

$A = \frac{haP - 1}{\bar{P}} + m = \frac{h(\bar{P}\sigma(a) + 1) - 1}{\bar{P}} + m$ より,

$\bar{P}(A - m) = haP - 1$ から $haP = \bar{P}(A - m) + 1$ をえる.

$\bar{h} = h - 1$ を使うと

$$\bar{P}(A - m) = h\bar{P}\sigma(a) + \bar{h}.$$

A は素数であることに注目し, $\alpha = aA$ とおき, この満たす方程式を次のように作る.
 $\sigma(\alpha) = \sigma(a)(A + 1)$ が成り立つので

$$\begin{aligned} h\bar{P}\sigma(\alpha) &= h\bar{P}\sigma(a)(A + 1) \\ &= h(aP - 1)(A + 1) \\ &= h(\alpha P - A) + haP - h \end{aligned}$$

$haP = \bar{P}(A - m) + 1$ を使うと,

$$h\bar{P}\sigma(\alpha) = h(\alpha P - A) - h + \bar{P}(A - m) + 1 = h\alpha P - hA - \bar{h} + \bar{P}A - \bar{P}m$$

かくて,

$$h\bar{P}\sigma(\alpha) = h\alpha P + A(\bar{P} - h) - \bar{h} - \bar{P}m.$$

例えば $P = 2, h = 1$ なら $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$.

4 オイラー関数

$\text{Maxp}(\alpha)$ を使う代わりにオイラー関数を用いることにして新たな完全数を定義してみよう.

はじめに $\alpha = aA$ のオイラー関数を求める.

$$\varphi(\alpha) = \varphi(a)(A-1) \text{ に } P \text{ を乗じて } P\varphi(\alpha) = P\varphi(a)(A-1).$$

$P\varphi(a) = P^e \bar{P} = a\bar{P}$ を代入すると,

$$P\varphi(\alpha) = P\varphi(a)(A-1) = \bar{P}a(A-1) = \bar{P}\alpha - \bar{P}a.$$

さらに hP を乗じて

$$hP^2\varphi(\alpha) = hP\bar{P}\alpha - \bar{P}hPa.$$

$haP = \bar{P}(A-m) + 1$ を使うと,

$$\begin{aligned} hP^2\varphi(\alpha) &= hP\bar{P}\alpha - \bar{P}(\bar{P}(A-m) + 1) \\ &= hP\bar{P}\alpha - \bar{P}^2(A-m) - \bar{P} \\ &= hP\bar{P}\alpha - \bar{P}^2A + m\bar{P}^2 - \bar{P}. \end{aligned}$$

これより

$$hP^2\varphi(\alpha) = hP\bar{P}\alpha - \bar{P}^2A + m\bar{P}^2 - \bar{P}.$$

かくして

$$\bar{P}^2A = -hP^2\varphi(\alpha) + hP\bar{P}\alpha + m\bar{P}^2 - \bar{P}.$$

$\bar{P}^2A$ がオイラー関数の入った式で表されたので, $\sigma(\alpha)$ の入った式

$$h\bar{P}\sigma(\alpha) = h\alpha P + A(\bar{P} - h) - \bar{h} - \bar{P}m$$

に $\bar{P}^2$ を乗じて

$$h\bar{P}^3\sigma(\alpha) = h\bar{P}^2\alpha P + \bar{P}^2A(\bar{P} - h) - \bar{P}^2(\bar{h} + \bar{P}m)$$

よって

$$h\bar{P}^3\sigma(\alpha) = h\bar{P}^2\alpha P + (-hP^2\varphi(\alpha) + hP\bar{P}\alpha - m\bar{P}^2 - \bar{P})(\bar{P} - h) - \bar{P}^2(\bar{h} + \bar{P}m)$$

以上をまとめて h を除すると,

$$\bar{P}^3\sigma(\alpha) + (\bar{P} - h)P^2\varphi(\alpha) = \bar{P}P\alpha(2\bar{P} - h) - m\bar{P}^2 - (P - 2)\bar{P}$$

定義 1

$$\bar{P}^3\sigma(\alpha) + (\bar{P} - h)P^2\varphi(\alpha) = \bar{P}P\alpha(2\bar{P} - h) - m\bar{P}^2 - (P - 2)\bar{P}$$

上の式を満たす α を $\sigma - \varphi$ 完全数 という. これは誤解のおきない名前だが本当は至高の完全数 (*supreme perfect number*) と呼びたい.

$P = 3, h = 1$ とすると,

$$8\sigma(\alpha) + 9\varphi(\alpha) = 18\alpha - 4m - 2$$

この解がどうなるか, 式を見ているだけでは皆目わからない.

5 $P = 3$ のとき $\sigma - \varphi$ 完全数

計算例を示そう.

表 1: $\sigma - \varphi$ 完全数, $P = 3, h = 1$

$m = -4$		
46449	[3, 2; 13, 1; 397, 1]	D
$m = -3$		
999	[3, 3; 37, 1]	A
18291	[3, 1; 7, 1; 13, 1; 67, 1]	
$m = -2$		
6	[2, 1; 3, 1]	A
99	[3, 2; 11, 1]	A
285	[3, 1; 5, 1; 19, 1]	D
6417	[3, 2; 23, 1; 31, 1]	D
46917	[3, 2; 13, 1; 401, 1]	D
76461	[3, 1; 7, 1; 11, 1; 331, 1]	
795339	[3, 6; 1091, 1]	A

$\alpha = P^e Q, (Q : \text{素数})$ と書ける解を A 型解という.

$\alpha = P^e QR, (Q, R : \text{素数})$ と書ける解を D 型解という.

ここで 右辺のリストは素数因子と指数を示す.

古典的完全数では A 型解以外の解 (あれば奇数解) が実在するかが未解決.

例えば $P = 3, h = 1, m = 0$ のとき A 型以外の解はあっても不思議ではない.

表 2: $\sigma - \varphi$ 完全数, $P = 3, h = 1$

$m = -1$		
4	[2, 2]	
75	[3, 1; 5, 2]	
$m = 0$		
117	[3, 2; 13, 1]	A
796797	[3, 6; 1093, 1]	A
423644039001	[3, 12; 797161, 1]	A
$m = 1$		
5	[5, 1]	
14	[2, 1; 7, 1]	
15	[3, 1; 5, 1]	A
231	[3, 1; 7, 1; 11, 1]	D
1107	[3, 3; 41, 1]	A

表 3: $\sigma - \varphi$ 完全数, $P = 3, h = 1$

$m = 2$		
7353	[3, 2; 19, 1; 43, 1]	D
47853	[3, 2; 13, 1; 409, 1]	D
$m = 3$		
13	[13, 1]	
21	[3, 1; 7, 1]	A
1161	[3, 3; 43, 1]	A
89181	[3, 5; 367, 1]	A

表 4: $\sigma - \varphi$ 完全数, $P = 3, h = 1$

$m = 4$		
17	[17, 1]	
22	[2, 1; 11, 1]	
98	[2, 1; 7, 2]	
153	[3, 2; 17, 1]	A
345	[3, 1; 5, 1; 23, 1]	D
604881	[3, 3; 43, 1; 521, 1]	D
799713	[3, 6; 1097, 1]	A
1287441	[3, 3; 41, 1; 1163, 1]	D
2405313	[3, 2; 17, 1; 79, 1; 199, 1]	
4902625	[5, 3; 7, 1; 13, 1; 431, 1]	

6 A 型解

$$\bar{P}^3 \sigma(\alpha) + (\bar{P} - h)P^2 \varphi(\alpha) = \bar{P}P\alpha(2\bar{P} - h) - m\bar{P}^2 - (P - 2)\bar{P}$$

の解 α が $\alpha = P^\varepsilon Q$ と素数 Q で書けたとする.(A 型解) このとき,
 $A = \bar{P}^3 \sigma(\alpha), B = (\bar{P} - h)P^2 \varphi(\alpha), C = \bar{P}P\alpha(2\bar{P} - h), D = -m\bar{P}^2 - (P - 2)\bar{P}$
 とおくと, $A + B = C + D$.

A, B, C, D を順に計算する.

$\alpha = P^\varepsilon Q$ に対して $\beta = P^{\varepsilon+1}$ を用いると,

i.

$$\bar{P}\alpha = (P^{\varepsilon+1} - 1)(Q + 1) = P^{\varepsilon+1}Q - Q + P^{\varepsilon+1} - 1 = P\alpha - Q + \beta - 1.$$

によって, $A = \bar{P}^2(P\alpha - Q + \beta - 1)$.

ii.

$$\varphi(\alpha) = \bar{P}P^{\varepsilon-1}(Q - 1) \text{ なので}$$

$$B = (\bar{P} - h)P^2 \varphi(\alpha) = (\bar{P} - h)\bar{P}P^{\varepsilon+1}(Q - 1) = (\bar{P} - h)(P\bar{P}\alpha - \bar{P}\beta).$$

iii.

$$\begin{aligned} A + B - C &= \bar{P}^2(P\alpha - Q + \beta - 1) + (\bar{P} - h)(P\bar{P}\alpha - \bar{P}\beta) - \bar{P}P\alpha(2\bar{P} - h) \\ &= -\bar{P}^2Q + \bar{P}h - \bar{P}^2\beta \\ &= D. \end{aligned}$$

$D = -m\overline{P}^2 - \overline{P}^2 + \overline{P}$ によって,

$$-\overline{P}^2 Q + \overline{P} h \beta - \overline{P}^2 = -m\overline{P}^2 - \overline{P}^2 + \overline{P}.$$

$\overline{P}$ を払って

$$-\overline{P} Q + h \beta = -m\overline{P} + 1.$$

これより

$$\overline{P}(Q - m) = h\beta - 1 = hP^{\varepsilon+1} - 1$$

$$Q = \frac{hP^{\varepsilon+1} - 1}{\overline{P}} + m.$$

これ定義の式であり, 先祖返りになる.

7 宇宙完全数

$\sigma - \varphi$ 完全数の定義式において, $P = 2$ とすると,

$$\sigma(\alpha) + 4(1 - h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(2 - h) - m.$$

$h = 1$ のとき, $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ となる. この解は平行移動 m の完全数と呼ばれる.

特に, $m = -12$ とすると $\sigma(\alpha) = 2\alpha + 12$ になる. この解は abundance 12 の過剰数と呼ばれる.

3 より大の素数 p に対し, $\alpha = 6p$ らは皆解となるので特に通常解という. この他の解もいくつか知られている.

$\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を満たす解 α としてとくに定数 k と素数 p で書ける解 $\alpha = kp$ が複数個あるとしよう.

すると, $m = -2k, \sigma(k) = 2k$ を満たす. よって k は完全数になる.

さらに, 完全数 k に対して $\sigma(\alpha) = 2\alpha + 2k$ を満たす解 α を宇宙完全数と呼ぶ.

8 変異完全数

さて奇素数 $h > 1$ のときも, $\sigma(\alpha) + 4(1 - h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(2 - h) - m$ に定数 k と素数 p で書ける解 kp が複数個あるとしよう.

すると, $\sigma(k)(p + 1) + 4(1 - h)\varphi(k)(p - 1) = 2(2 - h)kp - m$ となる.

これを p の 1 次式にまとめると, p の係数 X は $\sigma(k) + 4(1 - h)\varphi(k) + 2(h - 2)k$.

複数個の p を許すので $X = 0$. かつ $\sigma(k) - 4(1 - h)\varphi(k) = -m$.

さらに $\sigma(k) + 4(1 - h)\varphi(k) + 2(h - 2)k = 0$ も満たす.

この解 k を 変異完全数 (strange perfect number), とよぶ.

$\sigma(k) - 4(1 - h)\varphi(k) = -m$ で定まる $-m$ を 特大過剰度 (large abundance) とよぶ.

$\sigma(k) + 4(1 - h)\varphi(k) + 2(h - 2)k = 0$ を満たす k に対して $\sigma(k) - 4(1 - h)\varphi(k) = -m$ を満たす m を求める.

$\sigma(\alpha) + 4(1 - h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(2 - h) - m$ を満たす解 α を乗数 h の宇宙完全数と呼ぶ.

定義を再録する.

定義 2 奇素数 h に対して

$$\sigma(a) + 4(1 - h)\varphi(a) + 2(h - 2)a = 0$$

満たす解 a を変異完全数 (strange perfect number) という.

$P = 2, h = 3, m = 0$ のとき k は A 型に限ると OEIS (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) の A007505.

$P = 2, h = 5, m = 0$ のとき k の表は OEIS(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) の A050522.

表 5: 変異 完全数, $P = 2, h = 3$

k	素因数分解	$-m$	素因数分解	解 k の型
22	[2, 1; 11, 1]	116	[2, 2; 29, 1]	A
92	[2, 2; 23, 1]	520	[2, 3; 5, 1; 13, 1]	A
376	[2, 3; 47, 1]	2192	[2, 4; 137, 1]	A
6112	[2, 5; 191, 1]	36416	[2, 6; 569, 1]	A
24512	[2, 6; 383, 1]	146560	[2, 7; 5, 1; 229, 1]	A
6290432	[2, 10; 6143, 1]	37734400	[2, 11; 5, 2; 11, 1; 67, 1]	A
7125232	[2, 4; 97, 1; 4591, 1]	42151456	[2, 5; 23, 1; 57271, 1]	D

表 6: 変異 完全数, $P = 2, h = 5$

k	素因数分解	$-m$	素因数分解	解 k の型
38	[2, 1; 19, 1]	348	[2, 2; 3, 1; 29, 1]	A
632	[2, 3; 79, 1]	6192	[2, 4; 3, 2; 43, 1]	A
7605	[3, 2; 5, 1; 13, 2]	74178	[2, 1; 3, 2; 13, 1; 317, 1]	X
24236	[2, 2; 73, 1; 83, 1]	232440	[2, 3; 3, 1; 5, 1; 13, 1; 149, 1]	D
26108	[2, 2; 61, 1; 107, 1]	250392	[2, 3; 3, 1; 10433, 1]	D
129068	[2, 2; 41, 1; 787, 1]	1237752	[2, 3; 3, 2; 17191, 1]	D
163712	[2, 7; 1279, 1]	1635072	[2, 8; 3, 1; 2129, 1]	A
277688	[2, 3; 103, 1; 337, 1]	2720688	[2, 4; 3, 1; 56681, 1]	D
1080328	[2, 3; 83, 1; 1627, 1]	10584528	[2, 4; 3, 1; 220511, 1]	D
2620928	[2, 9; 5119, 1]	26201088	[2, 10; 3, 2; 2843, 1]	A
8836304	[2, 4; 167, 1; 3307, 1]	87473952	[2, 5; 3, 3; 137, 1; 739, 1]	D
41940992	[2, 11; 20479, 1]	419377152	[2, 12; 3, 1; 34129, 1]	A
93029536	[2, 5; 331, 1; 8783, 1]	925629504	[2, 6; 3, 1; 4820987, 1]	D

表 7: 変異 完全数, $P = 2, h = 7$

k	素因数分解	$-m$	素因数分解	解 k の型
3568	[2, 4; 223, 1]	49568	[2, 5; 1549, 1]	A
917248	[2, 8; 3583, 1]	12835328	[2, 9; 11, 1; 43, 1; 53, 1]	A

9 変異完全数の例

表 8: 宇宙完全数, $P = 2, h = 1, m = -12, k = 6$

a	素因数分解	解の型
$6p$	$[2, 1; 3, 1; p, 1]$ (通常解)	D
304	$[2, 4; 19, 1]$	A
127744	$[2, 8; 499, 1]$	A

表 9: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 1, m = -56, k = 28$

a	素因数分解
$28p$	$[2, 2; 7, 1; p, 1]$ (通常解)
4544	$[2, 6; 71, 1]$
9272	$[2, 3; 19, 1; 61, 1]$
14552	$[2, 3; 17, 1; 107, 1]$
25472	$[2, 7; 199, 1]$
74992	$[2, 4; 43, 1; 109, 1]$
495104	$[2, 9; 967, 1]$
6019264	$[2, 6; 163, 1; 577, 1]$
15317696	$[2, 6; 137, 1; 1747, 1]$

表 10: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 1, m = -992, k = 496$

a	素因数分解
$496p$	$[2, 4; 31, 1; p, 1]$ (通常解)
2892	$[2, 2; 3, 1; 241, 1]$
6104	$[2, 3; 7, 1; 109, 1]$
170612	$[2, 2; 13, 1; 17, 1; 193, 1]$
458144	$[2, 5; 103, 1; 139, 1]$
857312	$[2, 5; 73, 1; 367, 1]$
1006496	$[2, 5; 71, 1; 443, 1]$
1764512	$[2, 5; 67, 1; 823, 1]$
4041152	$[2, 6; 233, 1; 271, 1]$
9865304	$[2, 3; 17, 3; 251, 1]$
11627864	$[2, 3; 17, 1; 193, 1; 443, 1]$
12445504	$[2, 6; 139, 1; 1399, 1]$
13170104	$[2, 3; 17, 1; 179, 1; 541, 1]$
17135864	$[2, 3; 17, 1; 163, 1; 773, 1]$

表 11: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 1, m = -2 * 8128, k = 8128$

a	素因数分解
$8128p$	$[2, 6; 127, 1; p, 1]$ (通常解)
48684	$[2, 2; 3, 1; 4057, 1]$
112952	$[2, 3; 7, 1; 2017, 1]$
353672	$[2, 3; 11, 1; 4019, 1]$
396112	$[2, 4; 19, 1; 1303, 1]$
1243808	$[2, 5; 47, 1; 827, 1]$
4860050	$[2, 1; 5, 2; 13, 1; 7477, 1]$
5888672	$[2, 5; 59, 1; 3119, 1]$

一般に乗数 $h > 1$ のとき, 変異完全数と宇宙完全数を求めることはきわめて意義深い課題といえることができる.

表 12: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 3, m = -116, k = 22$

α	素因数分解 (通常解)
66	$[2, 1; 3, 1; 11, 1]$
110	$[2, 1; 5, 1; 11, 1]$
154	$[2, 1; 7, 1; 11, 1]$
286	$[2, 1; 11, 1; 13, 1]$
374	$[2, 1; 11, 1; 17, 1]$
418	$[2, 1; 11, 1; 19, 1]$
506	$[2, 1; 11, 1; 23, 1]$
638	$[2, 1; 11, 1; 29, 1]$
682	$[2, 1; 11, 1; 31, 1]$

$\alpha = 22p$ と書ける解は通常解だが これ以外の解がみつからない.

表 13: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 3, m = -520, k = 92$

a	素因数分解 (通常解)
$92p$	$[2, 2; 23, 1; p, 1]$ (通常解)
1306112	$[2, 9; 2551, 1]$
5757952	$[2, 10; 5623, 1]$
38016908	$[2, 2; 37, 1; 61, 1; 4211, 1]$

表 14: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 3, m = -2192, k = 376 = 2^3 * 47$

a	素因数分解 (通常解)
$376p$	$[2, 3; p, 1; 47, 1]$
1120	$[2, 5; 5, 1; 7, 1]$
5098528	$[2, 5; 283, 1; 563, 1]$

表 15: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 5, m = -348, k = 38$

a	素因数分解 (通常解)
$38p$	$[2, 1; 19, 1; p, 1]$
100532	$[2, 2; 41, 1; 613, 1]$
5350544	$[2, 4; 173, 1; 1933, 1]$

表 16: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 3, m = -2192, k = 376 = 2^3 * 47$

a	素因数分解
$376p$	$[2, 3; 47, 1; p, 1]$ (通常解)
1120	$[2, 5; 5, 1; 7, 1]$

表 17: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 5, m = -74178, k = 7605$

a	素因数分解
$7605p$	$[3, 2; 5, 1; 13, 2; p, 1]$ (通常解)
2981835	$[3, 2; 5, 1; 23, 1; 43, 1; 67, 1]$
3087435	$[3, 1; 5, 1; 13, 1; 71, 1; 223, 1]$

表 18: 宇宙 完全数, $P = 2, h = 5, m = -232440, k = 24236 = 2^2 * 73 * 83$

a	素因数分解
$24236p$	$2^2 * 73 * 83 * p$ (通常解)
51180	$2^2 * 3 * 5 * 853$
104380	$2^2 * 5 * 17 * 307$
106780	$2^2 * 5 * 19 * 281$
119380	$2^2 * 5 * 47 * 127$

参考文献

- [1] 飯高 茂 『数学の研究をはじめよう (I),(II),(III),(IV),(V),(VI),(VII)』 , 現代数学社 ,2016,2017,2018,2020,2021.
- [2] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.
- [3] Antal Bege and Kinga Fogarasi, Generalized perfect numbers, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73-82.
- [4] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1

フィボナッチ数, リュカ数の新しい総和公式とその拡張再論

東京海洋大学名誉教授 中村 滋

はじめに

2016年の日本フィボナッチ協会 第14回研究集会においてフィボナッチ数, リュカ数の“新しい”総和公式(’14年)について報告しました. ’15年に発表された類似の公式もそのとき紹介しましたが, 私が報告した年にこれらとは異なる2つの証明も発表され, その3年後(’19年)にもこの総和公式をめぐって短い報告がなされるという, ちょっと変わった経過をたどりました. そこで今回これらも含めた形で改めて報告し, 前回の報告の後半を再録します. 証明はいずれも簡単ですが, 様々な証明を知ることが新たな公式発見のヒントになることを期待して, 重複をいとわず今回の「再論」にまとめました.

“新しい”総和公式

よく知られているように, フィボナッチ数, リュカ数はその特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の根, $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ (黄金数) と $\beta = (1 - \sqrt{5})/2 = -1/\alpha$ を用いて,

$$(MB) \quad F_n = (\alpha^n - \beta^n) / \sqrt{5}, \quad L_n = \alpha^n + \beta^n. \quad (\text{ドゥ・モアヴル=ビネの公式})$$

と表されます. 8年前にインド統計大学の B. Sury は次の総和公式を示しました [11].

$$\text{命題} \quad \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k L_k = 2^{n+1} F_{n+1}. \quad \dots (A1)$$

するとすぐにニューヨーク州立大学大学の H. Kwong が生成関数を用いた新しい証明を与えた [3] (’14年) ことと D. Marques [5] が (’15年) 類似の公式 (後半の再録 (M)) を示したことを前回 紹介しました. そして私が前回の研究集会で紹介した年 (’16年) に, ザグレブ大学の I. Martinjak [4] は級数和の特性をうまく使って, (1) の拡張公式:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^{n-k} (L_k + 2F_k) = (-1)^n 2^{n+1} F_{n+1}. \quad \dots (1')$$

を証明し, そのやり方で色々な公式が得られるとして, 一例として公式:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} 3^k (L_k + F_{k+1}) = 3^{n+1} F_{n+1}. \quad \dots (3)$$

を挙げました. そしてこの同じ年に Edgar [*] は, (A1) と Marques の公式 (M) (後述) をきれいにまとめる拡張公式を証明しました. この結果は, 今回この研究集会のための小論文の最初の稿に対するコメントで教えていただきました. 私が American Mathematical Monthly のやり取りに気を取られている間に, 本家の Fibonacci Quarterly にこんなに良い結果が掲載されていたのです. 有難うございます. その3年後にはタイの K. Kuhapatanakul と K. Thongsing [2] はフィボナッチ数を少し拡張した数列に対しても同様の結果が成り立つことを報告しました (’19年). 今回の再論では, 最初にこの命題の もっと簡単な別の証明を示した後で, 3通りの証明を紹介します. また [4] の方法で得られる いくつかの公式を示します. 以下で扱う公式を定理にまとめておきましょう.

- 定理** (1) $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^k L_k = 2^{n+1} F_{n+1}$,
 (1') $\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^k (L_k + 2F_k) = (-1)^n 2^{n+1} F_{n+1}$,
 (2) $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^{n-k} L_k = 3 \cdot 2^{n+1} - L_{n+3}$,
 (2') $\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^{n-k} L_{k+1} = (-1)^n F_{n+1}$.
 (3) $\sum_{0 \leq k \leq n} 3^k (L_k + F_{k+1}) = 3^{n+1} F_{n+1}$,
 (3') $\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 3^k L_{k+2} = (-1)^n 3^{n+1} F_{n+1}$,
 (4) $\sum_{0 \leq k \leq n} 3^{n-k} F_{k-1} = -F_{n+1}$,
 (4') $\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 3^{n-k} (F_k + L_{k+1}) = (-1)^n F_{n+1}$.

命題と定理の証明

最初に簡単な証明を示し、その後で Sury, Kwong, Martinjak の証明を紹介します。

(証明 1) ドウ・モアヴル=ビネの公式 (MB) $F_n = (\alpha^n - \beta^n) / \sqrt{5}$, $L_n = \alpha^n + \beta^n$ より,
 $S = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k L_k = \sum_{0 \leq k \leq n} (2\alpha)^k + \sum_{0 \leq k \leq n} (2\beta)^k = (1 - (2\alpha)^{n+1}) / (1 - 2\alpha) + (1 - (2\beta)^{n+1}) / (1 - 2\beta)$ (等比級数の和の公式). $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ だから, $1 - 2\beta = 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$. $\therefore S = \{-(1 - (2\alpha)^{n+1}) + (1 - (2\beta)^{n+1})\} / \sqrt{5} = 2^{n+1} \{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\} / \sqrt{5} = 2^{n+1} F_{n+1}$, $\square$

(証明 2 by Sury) Sury は次の補題 (polynomial identity of Sury) を使った.

補題 $\sum_{0 \leq k \leq n} (2x)^k (x+y)^{n-k} = ((x+y)^{n+1} - (2x)^{n+1}) / (-x+y) \cdots (X)$

(補題の証明) $S = \sum_{0 \leq k \leq n} (2x)^k (x+y)^{n-k} = (x+y)^n \sum_{0 \leq k \leq n} (2x/(x+y))^k$.
 $1 - 2x/(x+y) = (-x+y)/(x+y)$ だから等比級数の和の公式より, $S = (x+y)^n \times \{1 - (2x/(x+y))^{n+1}\} / \{1 - 2x/(x+y)\} = \{(x+y)^{n+1} - (2x)^{n+1}\} / (-x+y)$. $\square$

x と y を交換すると, 次の公式になる:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (2y)^k (x+y)^{n-k} = ((x+y)^{n+1} - (2y)^{n+1}) / (x-y) \cdots (Y)$$

(X) と (Y) を加えると,

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \{2^k (x^k + y^k)\} (x+y)^{n-k} = 2^{n+1} (x^{n+1} - y^{n+1}) / (x-y)$$

ここで $x = \alpha$, $y = \beta$ とおくと, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ だから,

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \{2^k (x^k + y^k)\} (x+y)^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k L_k = 2^{n+1} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) / \sqrt{5} = 2^{n+1} F_{n+1} \text{ となって命題 (定理の (1)) の証明が終る.}$$

なお, (X) と (Y) の差をとると, 次の公式になる:

$$\sum_{k=0}^n 2^k F_k = (2^{n+1} L_{n+1} - 2) / 5 \cdots \cdots (A2) \quad \square$$

(証明 3 by Kwong) フィボナッチ数とリュカ数の生成関数を,

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n = x / (1 - x - x^2) \text{ および}$$

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = (2-x) / (1 - x - x^2)$$

と書くと,

$$F(2x) / x = L(2x) / (1-x) = 2 / (1 - 2x - 4x^2).$$

$$\begin{aligned} \text{ところで, } F(2x)/x &= \sum_{n \geq 0} F_n (2x)^n / x = \sum_{n \geq 0} 2^n F_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} 2^{n+1} F_{n+1} x^n \quad (F_0=0 \text{ だから}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同様に, } 1/(1-x) &= \sum_{n \geq 0} x^n \text{ を用いて, } L(2x)/(1-x) = (\sum_{n \geq 0} 2^n L_n x^n) (\sum_{n \geq 0} x^n) \\ &= \sum_{n \geq 0} [\sum_{0 \leq k \leq n} \{(2^k L_k x^k)(x^{n-k})\}] = \sum_{n \geq 0} (\sum_{0 \leq k \leq n} 2^k L_k) x^n \end{aligned}$$

となる. $F(2x)/x = L(2x)/(1-x)$ だったから, 両者の x^n の係数を比べて,

$$2^{n+1} F_{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k L_k$$

であることが分かる. □

(証明 4 by Martinjak)

$L_k = F_{k-1} + F_{k+1} = 2F_{k+1} - F_k$ だから, $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^k L_k = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k (2F_{k+1} - F_k)$
 $= (2F_1 - F_0) + 2(2F_2 - F_1) + 2^2(2F_3 - F_2) + 2^3(2F_4 - F_3) + \cdots + 2^n(2F_{n+1} - F_n)$
 $= F_0 + 2^{n+1} F_{n+1} = 2^{n+1} F_{n+1}$. このように, 級数の途中の項が次々にキャンセルして,
 最初と最後の項だけが残る. これを望遠鏡級数 (telescoping series ; たたみ込み級数とも) と
 言う. 古くから知られていた効率が良く楽しい方法である. □

こうして, 命題の証明が終わりました. 前述の通り Martinjak は定理の (2') をこの方法
 で証明した後, 同じ方法でたくさんの総和公式が証明出来るとして 定理の (3) 一つを例
 示したのでした. ここでは定理の (1') (2) (2') を証明し, (3) (3') (4) (4') を証
 明するためのキーポイントを示しておきます.

(定理の証明)

(1') $L_k + 2F_k = F_{k+1} + F_{k-1} + 2F_k = 2F_{k+1} + F_k$ であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^k (L_k + 2F_k) &= \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^k (2F_{k+1} + F_k) \\ &= (2F_1 + F_0) - 2(2F_2 + F_1) + 2^2(2F_3 + F_2) - 2^3(2F_4 + F_3) + \cdots \\ &\quad + (-1)^n 2^n (2F_{n+1} + F_n) = F_0 + (-1)^n 2^{n+1} F_{n+1} = (-1)^n 2^{n+1} F_{n+1}. \end{aligned}$$

(2) $L_k = L_{k+2} - L_{k+1} = 2L_{k+2} - L_{k+3}$ より, $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^{n-k} L_k =$
 $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^{n-k} (2L_{k+2} - L_{k+3}) = 2^n (2L_2 - L_3) + 2^{n-1} (2L_3 - L_4) + 2^{n-2} (2L_4 - L_5)$
 $+ 2^{n-3} (2L_5 - L_6) + \cdots + (2L_{n+2} - L_{n+3}) = 2^{n+1} L_2 - L_{n+3} = 3 \cdot 2^{n+1} - L_{n+3}$.

(2') $L_{k+1} = F_k + F_{k+2} = 2F_k + F_{k+1}$ を用いると, $\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^{n-k} L_{k+1}$
 $= \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^{n-k} (2F_k + F_{k+1}) = 2^n (2F_0 + F_1) - 2^{n-1} (2F_1 + F_2)$
 $+ 2^{n-2} (2F_2 + F_3) - 2^{n-3} (2F_3 + F_4) + \cdots + (-1)^n (2F_n + F_{n+1})$
 $= 2^{n+1} F_0 + (-1)^n F_{n+1} = (-1)^n F_{n+1}$.

(キーポイント) (3) $L_k + F_{k+1} = F_{k+1} + F_{k-1} + F_{k+1} = 2F_{k+1} + F_{k-1} = 3F_{k+1} - F_k$.

(3') $L_{k+2} = 3F_{k+1} + F_k$, (4) $F_{k-1} = 3F_k - F_{k+1}$, (4') $F_k + L_{k+1} = 3F_k + F_{k+1}$. □

Martinjak はこのやり方で, 次々に公式が得られることを示唆したのです. 興味を持った方の
 ために, いくつかの公式とヒントを書いておきます.

$$(5) \quad \sum_{0 \leq k \leq n} 4^k (L_k + 2F_{k+1}) = 4^{n+1} F_{n+1}, \quad [L_k + 2F_{k+1} = 4F_{k+1} - F_k]$$

$$\begin{aligned}
(5') \quad & \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 4^k (L_{k+2} + F_{k+1}) = (-1)^n 4^{n+1} F_{n+1}. \quad [L_{k+2} + F_{k+1} = 4F_{k+1} + F_k] \\
(6) \quad & \sum_{0 \leq k \leq n} 4^{n-k} (L_{k-1} - F_k) = -F_{n+1}, \quad [L_{k-1} - F_k = 4F_k - F_{k+1}] \\
(6') \quad & \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 4^{n-k} (2F_k + L_{k+1}) = (-1)^n F_{n+1}, \quad [2F_k + L_{k+1} = 4F_k + F_{k+1}]
\end{aligned}$$

次々にキャンセルしあう級数和の求め方はとても面白いのですが、ヒントにある形になるように総和記号の中のフィボナッチ数とリュカ数の形が作られているために、公式としては十分に洗練されていません。私は次のような公式たちの方が好きです。

$$\begin{aligned}
(7) \quad & \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k F_k = \{2^{n+1} L_{n+1} - 2\} / 5, \\
(7') \quad & \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^k F_k = (-1)^n 2^{n+1} F_{n-2} + 2, \\
(8) \quad & \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{n-k} F_k = 2^{n+1} - F_{n+3}, \\
(8') \quad & \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k 2^{n-k} F_{k+1} = \{2^{n+2} + (-1)^n L_{n+1}\} / 5,
\end{aligned}$$

これらの証明は 興味を持った方にお任せします。前回の報告でも、これらを含むかなり広範な一般公式を色々紹介しました。簡単な総和公式ですが、じつに多様なアプローチがあることに驚きます。これこそがフィボナッチ数研究の醍醐味と言ってよいのだと思います。今回この小論を書くにあたって、私自身が久し振りに新しい公式作りに夢中になり、楽しい時間を過ごしました。皆様にもこのような楽しい経験をしていただけたら 大変うれしいです。

この小訂版 (v.1.1) で追加する Edgar [*] による (A 1) と Marques の公式 (M) の拡張公式は次の通りです。

$$\text{定理 E} \quad c^{m+1} F_{m+1} = \sum_{0 \leq k \leq m} c^k L_k + (c-2) \sum_{0 \leq k \leq m} c^{k-1} F_k. \quad \cdots (E)$$

(証明) $L_k + F_k = F_{k+1} + F_{k-1} + F_k = 2F_{k+1}$ であるから、右辺を並べ替えると
 右辺 = $\sum_{0 \leq k \leq m} c^k L_k + (c-2) \sum_{0 \leq k \leq m} c^{k-1} F_k = \sum_{0 \leq k \leq m} c^k \sum_{0 \leq k \leq m} c^k (L_k + F_k) + c^{m+1} F_{m+1} - 2 \sum_{0 \leq k \leq m+1} c^{k-1} F_k = c^{m+1} F_{m+1}$ ($F_0 = 0$ を用いた)。 $\square$

これはきれいな拡張公式ですね。これなら Fibonacci Quarterly に載って当然です。続いてタイの Kuhapatanakul と Thongsing による一般化公式 [2] を紹介します。これは前回紹介した Zeitlin [1 2] による一般化 (標準的なフィボナッチ数・リュカ数の一般化です。後述) よりも狭い形ですが、少しだけ拡張した数列に対して簡単に公式を示し、次のリュカ数の公式を得ました：

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k c^{n-k} (cL_k + L_{k+1}) = 2c^{n+1} L_0 + (-1)^n L_{n+1} \quad \cdots (KT)$$

フィボナッチ数列を一般化して、 $U_n = U_n(a; p)$ を次のように定義します：

$$U_{n+1} = pU_n + U_{n-1} \quad (n \geq 1); \quad U_0 = a, \quad U_1 = 1.$$

$U_n(0; 1) = F_n$, $U_n(2; 1) = L_n$ は明らかです。彼らは Martinjak の公式を U_n に対して次のように拡張しました：

定理 K T 実数 $c \neq 0$ に対して

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k c^{n-k} ((c-1)U_k - (p-1)U_{k+1} + U_{k+2}) = c^{n+1} U_0 + (-1)^n U_{n+1}.$$

(証明) $(c-1)U_k - (p-1)U_{k+1} + U_{k+2} = cU_k + U_{k+1}$ はすぐに確かめられるから,
 左辺 $= \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k c^{n-k} (cU_k + U_{k+1}) = c^n (cU_0 + \underline{U_1}) - c^{n-1} (\underline{cU_1} + \underline{U_2})$
 $+ c^{n-2} (\underline{cU_2} + \underline{U_3}) - \cdots + (-1)^n (\underline{cU_n} + U_{n+1}) = c^{n+1} U_0 + (-1)^n U_{n+1}.$
 (望遠鏡級数なので, 最初と最後の数だけが残る) $\square$

ここで, $c=2$, $U_n = F_n$ とおけば, 定理の (1') になり, また $c=2$, $U_n = L_n$ とおけば, (KT) になります.

多くの人の興味を引くきれいな公式を見つけてくれた Sury と, 小さなアイディアの連鎖を掲載してくれた雑誌 (AMM) の粋なはからいに感謝します. 上記の方法とは全く異なる証明法とその拡張も楽しんで頂くために, 前回報告の後半を以下に再録しておきます.

前回報告の後半再録

先ずは Marques の定理[5]です.

Marques の定理

定理M $\sum_{k=0}^m 3^k L_k + \sum_{k=0}^m 3^{k-1} F_k = 3^{m+1} F_{m+1}.$ $\cdots \cdots (M)$

これは Thomas Koshy [1] には載っていないので, (A1) (A2) も含めて「新しい公式」
 と思ったのは仕方ありませんが, じつはかなり前に, より一般的な形で知られていた定理で
 す. 私は 20 年ほど前に, チェビシエフ多項式を使って次の定理を証明しました ([6]
 Theorem 3; インターネット上で読めます. なお, [6] の Theorem 4 は (A1) (A2) と
 同じ, Theorem 7 は下記の Theorem N と同じです).

定理N

(a) $\sum_{k=0}^n p^k F_k = \{p^{n+1} (F_{n+1} + p F_n) - p\} / (p^2 + p - 1).$ $\cdots \cdots (B)$

(b) $\sum_{k=0}^n p^k L_k = \{p^{n+1} (L_{n+1} + p L_n) + p - 2\} / (p^2 + p - 1).$ $\cdots (C)$

(c) $\sum_{k=0}^n p^k F_{2k} = \{p^{n+1} ((p-2) F_{2n} - F_{2n-1}) - p\} / (p^2 - 3p + 1)$

(d) $\sum_{k=0}^n p^k L_{2k} = \{p^{n+1} ((p-2) L_{2n} - L_{2n-1}) - 3p + 2\} / (p^2 - 3p + 1)$

(注) (a)(b) で $p=2$ とおけば, $\sum_{k=0}^n 2^k F_k = \{2^{n+1} (F_{n+1} + 2 F_n) - 2\} / 5$
 および $\sum_{k=0}^n 2^k L_k = 2^{n+1} (L_{n+1} + 2 L_n) / 5$ となるが, $F_{n+1} + 2 F_n = F_{n+2} + F_n = L_{n+1}$,
 $L_{n+1} + 2 L_n = L_{n+2} + L_n = 5 F_{n+1}$ であることから, (A1) (A2) は明らかである.
 (M) の証明は後述する. 定理N の証明には チェビシエフ多項式を使うので,
 定義から述べる.

定義 第1種と第2種の変形チェビシエフ多項式 (modified Chebyshev Polynomials of the
 1st & 2nd kinds) は, 自然数 n と $x = 2 \cos \theta$ に対して, $t_n(x) = 2 \cos n \theta$, および
 $u_n(x) = \sin\{(n+1)\theta\} / \sin \theta$ と定義され, 再帰的な次の式を満たします:

$$t_{n+2}(x) = x t_{n+1}(x) - t_n(x); t_0(x) = 2, t_1(x) = x.$$

$$u_{n+2}(x) = x u_{n+1}(x) - u_n(x); u_0(x) = 1, u_1(x) = x.$$

x の式で explicit に書くと,

$$\begin{aligned} t_n(x) &= \{(x + \sqrt{x^2 - 4})/2\}^n + \{(x - \sqrt{x^2 - 4})/2\}^n, \\ u_n(x) &= [\{(x + \sqrt{x^2 - 4})/2\}^{n+1} + \{(x - \sqrt{x^2 - 4})/2\}^{n+1}] / \sqrt{x^2 - 4} \end{aligned}$$

となります.

チェビシエフ多項式についての包括的な著書 [10] において, Rivlin は, F_n と L_n を $t_n(i) = i^n L_n$, $u_{n-1}(i) = i^{n-1} F_n$ ($i = \sqrt{-1}$) によって定義しました.

その他の式も含めて, 次の定理が成り立ちます(中村 [8] 定理 A1, [7] 定理 32).

定理C

- (1) $t_{2n-1}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = \sqrt{5} F_{(2n-1)(2m-1)},$
- (2) $t_{2n}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = L_{2n(2m-1)},$
- (3) $t_n(i L_{2m-1}) = i^n L_{n(2m-1)},$
- (4) $u_{2n-1}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = \sqrt{5} F_{2n(2m-1)} / L_{2m-1},$
- (5) $u_{2n}(\sqrt{5} F_{2m-1}) = L_{(2n+1)(2m-1)} / L_{2m-1},$
- (6) $u_{n-1}(i L_{2m-1}) = i^{n-1} F_{n(2m-1)} / F_{2m-1}.$
- (7) $t_{2n-1}(i \sqrt{5} F_{2m}) = i \sqrt{5} (-1)^{n-1} F_{(2n-1)2m}, \quad t_{2n}(i \sqrt{5} F_{2m}) = (-1)^n L_{4nm},$
- (8) $t_n(L_{2m}) = L_{2nm},$
- (9) $u_{2n-1}(i \sqrt{5} F_{2m}) = i \sqrt{5} (-1)^{n-1} F_{4nm} / L_{2m},$
- (10) $u_{2n}(i \sqrt{5} F_{2m}) = (-1)^n L_{2m(2n+1)} / L_{2m}, \quad u_{n-1}(L_{2m}) = F_{2mn} / F_{2m}.$

(定理Nの証明) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と等比級数の和の公式より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (p e^{i\theta})^k &= \sum_{k=0}^n (p^k \cos k\theta) + i \sum_{k=0}^n (p^k \sin k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n p^k t_k(x) + \sqrt{x^2 - 4} \sum_{k=0}^n p^k u_{k-1}(x) \\ &= [p^{n+1} \{\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta\} - 1] / \{p(\cos \theta + i \sin \theta) - 1\} \\ &= [p^{n+1} \{t_{n+1}(x) + \sqrt{x^2 - 4} u_n(x) - 4\}] / \{p x - 2 + p \sqrt{x^2 - 4}\} \end{aligned}$$

となる (p は任意の実数). ここで $x = i$ ($= i L_1$) と 3 ($= L_2$) を代入して定理を得る. $\square$

(定理M の証明)

定理N (a) (b) で $p = 3$ とおいて, $F_n + L_n = 2F_{n+1}$ と $L_{n-1} + 3L_n = 2L_n + L_{n+1} = L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}$, を用いると,

$$\begin{aligned} &11 \{ \sum_{k=0}^m 3^k L_k + (\sum_{k=0}^{m+1} 3^k F_k) / 3 \} \\ &= \{3^{m+1} (L_{m+1} + 3L_m) + 1\} + \{3^{m+1} (F_{m+2} + 3F_{m+1}) - 1\} \\ &= \{3^{m+1} (L_m + \underline{L_{m-1}} + 3\underline{L_m})\} + \{3^{m+1} (\underline{F_{m+1}} + \underline{F_m} + 3F_{m+1})\} \\ &= 3^{m+1} \{(L_m + \underline{5F_{m+1}}) + (4F_{m+1} + F_m)\} \\ &= 3^{m+1} \{(\underline{L_m + F_m}) + 9F_{m+1}\} = 11 \cdot 3^{m+1} F_{m+1}. \end{aligned}$$

よって, $\sum_{k=0}^m 3^k L_k + (\sum_{k=0}^{m+1} 3^k F_k) / 3 = 3^{m+1} F_{m+1}.$

となって定理Mになる. Marques 自身はこの定理を数学的帰納法で証明した. $\square$

なお C. Padilla [9] は, Fibonacci Quarterly の問題 B98 の解答 (1966 年) で次のフィボナッチ数の有限生成関数を得ましたが, これは 定理N (a) と同等です.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n F_k x^k = (x^{n+2} F_n + x^{n+1} F_{n+1} - x) / (x^2 + x - 1) \cdots (P).$$

Padilla の証明は わずか 3 行, とてもシンプルです:

(Proof) One easily sees that

$$(x^2 + x - 1) S_n(x) = -x + (F_{n-1} + F_n) x^{n+1} + F_n x^{n+2}.$$

$$\text{Hence } S_n(x) = (-x + F_{n+1} x^{n+1} + F_n x^{n+2}) / (x^2 + x - 1). \quad \square$$

さらに Zeitlin は Padilla の解に対して, それ以前 (1964 年) に より一般的な式を得ていたこと [12] を注意して, priority を主張しました:

定理Z 線形漸化式 $U_{n+2} = q U_{n+1} - p U_n$ と初期値 U_0, U_1 で決まる数列に対して, $x^2 - q x + p = 0$ の根を r_1, r_2 ($r_1 \neq r_2$) とし, $S_b = r_1^b + r_2^b$ とおくと 次式が成り立つ:

$$(1 - S_b x + p^b x^2) \sum_{k=0}^n U_{b k + d} x^k = p^b x^{n+2} U_{b n + d} - x^{n+1} U_{b n + b + d} + x U_{b + d} + (1 - x S_b) U_d.$$

$p = -1, q = 1, U_0 = 0, U_1 = 1$ に対して, $U_n = F_n$ であり, $S_b = L_b$ となるから,

$$(1 - L_b x + (-1)^b x^2) \sum_{k=0}^n F_{b k + d} x^k = (-1)^b x^{n+2} F_{b n + d} - x^{n+1} F_{b n + b + d} + x F_{b + d} + (1 - x L_b) F_d. \quad \cdots \cdots (Z)$$

特に, $b = 1, d = 0$ とすると, 上記の Padilla の式 (P) になります.

余りにも一般的すぎて, 気付かなかった感じです. このように, Fibonacci Quarterly の創刊直後には意欲的な論文がたくさん寄せられ, 問題や その解答などが次々に印刷されていたのです.

REFERENCES

- [1] T.Koshy; "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications"; John Wiley & sons (2001)
- [2] K. Kuhapatanakul & K. Thongsing, "Generalization of the Fibonacci - Lucas Relations", American Mathematical Monthly, Vol.126, No.1, p.81; 2019
- [3] H. Kwong, "An Alternate Proof of Sury's a Fibonacci - Lucas Relations", American Mathematical Monthly, Vol.121, No.6, p.514; 2014
- [4] I. Martinjak, "Two Extensions of the Sury's Identity" American Mathematical Monthly, Vol.123, No.9, p.919; 2016
- [5] D.Marques ; A New Fibonacci-Lucas relation ; American Mathematical Monthly, 122-7, p.683 ; 2015

- [6] 中村滋著『フィボナッチ数の小宇宙』（日本評論社，2002 初版，2008 改訂版，）
- [7] 中村滋；Some new Fibonacci and Lucas identities；J. of the Tokyo University of Mercantile Marine (Natural Sciences)；No.45.pp.81—93；1995
- [8] 中村滋；Some Fibonacci & Lucas identities via the Chebyshev Polynomials；J. of the Tokyo University of Mercantile Marine (Natural Sciences)；No.47.pp.53—61；1997
- [9] C. Padilla；Solution to the problem B98 (proposed by Lind, Fibonacci Quarterly, 4(3)；1966)；Fibonacci Quarterly 5(2),1967
- [1 0] T. J. Rivlin；“Chebyshev Polynomials：From Application Theory to Algebra and Number Theory” 2nd Edition；John Wiley & sons（1990）
- [1 1] B. Sury, “A polynomial parent to a Fibonacci - Lucas relations”, American Mathematical Monthly, Vol.121, No.3, p.236; 2014
- [1 2] D. Zeitlin, On summation formulas for Fibonacci and Lucas Numbers；Fibonacci Quarterly 2(2), pp.105—107；1964
- [*] T. Edger；Extending some Fibonacci - Lucas Relations；Fibonacci Quarterly, 53(1), p. 79；2016)

すべての素数を順に表す定数

東京海洋大学名誉教授 中村 滋

はじめに

フェルマーの最終定理の証明（1996）とか、ポアンカレ予想の解決（2002）などの大ニュースではないものの、時折 思わずうれしくなってしまうような数学上の発見やアイデアが見られます。最近も、すべての素数を順に表す漸化式を作り出す定数がみつかりました。2017年にブエノス・アイレス高校の4人の生徒たちが見つけたので、紹介者のケンブリッジ大学 James Grime 教授は「ブエノス・アイレス定数」と名付けました。これは、

$$\lambda = \sum_{1 \leq k \leq \infty} \{(p_k - 1) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} p_m\} = 2.920050977316 \cdots$$

という無理数です。 $f_1 = \lambda$ から始まる漸化式は、

$$f_n = [f_{n-1}](f_{n-1} - [f_{n-1}] + 1)$$

です（記号 $[x]$ は、実数 x を超えない最大整数を表す「ガウス記号」）。このとき、

$$[f_n] = p_n \text{ (} n \text{ 番目の素数)}$$

となります。すなわち、ある項の（整数部分）に、（小数部分 + 1）を掛けて次の項にするとその整数部分が次の素数になるのです。初めの方の項を並べてみると、

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda = 2.920050977316 \cdots, \\ f_2 &= 2 \times 1.920050977316 \cdots = 3.840101954632 \cdots, \\ f_3 &= 3 \times 1.840101954632 \cdots = 5.520305863896 \cdots, \\ f_4 &= 5 \times 1.520305863896 \cdots = 7.60152931948 \cdots, \\ f_5 &= 7 \times 1.60152931948 \cdots = 11.21070523636 \cdots, \\ f_6 &= 11 \times 1.21070523636 \cdots = 13.31775759996 \cdots, \end{aligned}$$

となり、これら f_n の整数部分を見ると、確かに n 番目の素数 p_n に一致しています。このように数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ にはすべての素数が大きさの順に現れるのです。不思議ですね。

主定理

まずはこれを定理としてまとめ、証明しておきましょう。

定理1 数列 $g_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \{(p_k - 1) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} p_m\}$ ($n \geq 1$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$) の極限値を、 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 2.920050977316 \cdots$ とし、数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を、 $f_1 = \lambda$,

(*) $f_n = (f_1 - g_{n-1}) \prod_{1 \leq m \leq n-1} p_m = \sum_{k \geq n} \{(p_k - 1) / \prod_{n \leq m \leq k-1} p_m\}$ ($n \geq 2$) と定義する。このとき、 $[f_n] = p_n$ (n 番目の素数) であり、 f_n は次の漸化式で決まる：

$$f_n = [f_{n-1}](f_{n-1} - [f_{n-1}] + 1) \quad (n \geq 2).$$

(証明) Bertrand の仮説 (Bertrand's Postulate) $p_n < p_{n+1} \leq 2p_n - 1 \cdots (BP)$ より,

$$\begin{aligned}
g_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \{(p_k - 1) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} p_m\} = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) / p_1 + (p_3 - 1) / p_1 p_2 \\
&\quad + (p_4 - 1) / p_1 p_2 p_3 + \cdots + (p_n - 1) / p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} \\
&\leq (p_1 - 1) + (2p_1 - 2) / p_1 + (2p_2 - 2) / p_1 p_2 + (2p_3 - 2) / p_1 p_2 p_3 + \cdots \\
&\quad + (2p_{n-2} - 2) / p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-2} + (2p_{n-1} - 2) / p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} \\
&= (p_1 - 1) + 2p_1 / p_1 - 2 / p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} < p_1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

なので, 数列 $\{g_n\}_{n \geq 1}$ は単調増加, かつ有界だから収束する.

f_n の定義 (*) より, $f_n = \sum_{k \geq n} \{(p_k - 1) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} p_m\} = (p_n - 1) + (p_{n+1} - 1) / p_n$
 $+ (p_{n+2} - 1) / p_n p_{n+1} + (p_{n+3} - 1) / p_n p_{n+1} p_{n+2} + \cdots$ だから, $f_n - p_n + 1 =$
 $(p_{n+1} - 1) / p_n + (p_{n+2} - 1) / p_n p_{n+1} + (p_{n+3} - 1) / p_n p_{n+1} p_{n+2} + \cdots$ である.
 $\therefore f_{n-1} - p_{n-1} + 1 = (p_n - 1) / p_{n-1} + (p_{n+1} - 1) / p_{n-1} p_n + (p_{n+2} - 1) / p_{n-1} p_n p_{n+1}$
 $+ (p_{n+3} - 1) / p_{n-1} p_n p_{n+1} p_{n+2} + \cdots$ となる. したがって, $p_{n-1}(f_{n-1} - p_{n-1} + 1)$
 $= (p_n - 1) + (p_{n+1} - 1) / p_n + (p_{n+2} - 1) / p_n p_{n+1} + (p_{n+3} - 1) / p_n p_{n+1} p_{n+2}$
 $+ \cdots = f_n$ である.

ところで, (*) 式の右辺の分子 $p_m - 1$ ($m > n$) を $p_{m-1} - 1$ で置き換えると, $p_m > p_{m-1}$
より, $f_n > (p_n - 1) + (p_n - 1) / p_n + (p_{n+1} - 1) / p_n p_{n+1} + (p_{n+2} - 1) / p_n p_{n+1} p_{n+2}$
 $+ (p_{n+3} - 1) / p_n p_{n+1} p_{n+2} p_{n+3} + \cdots > p_n$ が成り立つ. また, Bertrand - Chebyshev
の定理より, $p_n < p_{n+1} \leq 2p_n - 1$ なので, $p_{m+1} - 1 \leq 2p_m - 2$ となる. よって, 逆に,
 $f_n \leq (p_n - 1) + (2p_n - 2) / p_n + (2p_{n+1} - 2) / p_n p_{n+1} + (2p_{n+2} - 2) / p_n p_{n+1} p_{n+2} + \cdots$
 $= p_n + 1$ も成り立つ. ゆえに $p_n < f_n \leq p_n + 1$.

ところで Nagura の定理「 $x > 25$ ならば x と $6x/5$ の間に素数がある(1952)」により,
 $p_{n+1} \leq 6p_n/5$ (for $n \geq 9$) であり, $n \leq 8$ までを調べて, $p_{n+1} < 5p_n/3$ ($n > 0$) となる
ことが分かる. $5p/3 \geq 2p - 1 \Leftrightarrow p \leq 3$ より $p_{n+1} = 2p_n - 1$ になるのは, $n = 1$ と $n = 2$
だけである. これより $p_n < f_n < p_n + 1$. よって, $[f_n] = p_n$ (n 番目の素数) となる.

上述の通り, $f_n = p_{n-1}(f_{n-1} - p_{n-1} + 1)$ であったから, 標記の漸化式が成り立つ:

$$f_n = [f_{n-1}](f_{n-1} - [f_{n-1}] + 1) \quad (n \geq 2) \quad \square$$

λ は無理数である

ブエノス・アイレス定数 λ は 全部の素数が求まらない限り 完全には決まりませんが,
急速に収束するので, かなり正確な近似値を求めることが出来ます. それでは λ が無理
数であることを確かめましょう.

定理2 ブエノス・アイレス定数 λ は無理数である.

(証明) $p_n < f_n < p_n + 1$ (for all n) より, $f_n = p_n + r_n$ ($0 < r_n < 1$) と書ける.
 $f_{n+1} = p_n(f_n - p_n + 1)$ だから, $\lambda = f_1$ が有理数だと仮定して, $\lambda = a/b$ (a, b : 互
いに素な自然数) と書くと, 漸化式により $b f_n$ が整数ならば $b f_{n+1}$ も整数になる. 仮
定から, $b f_1 = a$ が整数だから, 数学的帰納法により $b f_n = b p_n + b r_n$ は常に整数であ

る.したがって br_n も正の整数になるから, $br_n \geq 1$ すなわち $r_n \geq 1/b$ (for all n).
 ここで $r_n + 1 = f_{n+1}/p_n = (p_{n+1} + r_{n+1})/p_n$ と書けるが, r_n は有界 ($0 < r_n < 1$) で, 素数定理から $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}/p_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ となるので, 両辺で $n \rightarrow \infty$ とした極限值をとると, $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} + r_{n+1})/p_n = 1$ となる.
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ であるが, これは $r_n \geq 1/b$ (for all n) に矛盾する. よって λ は無理数である. $\square$

定数 λ の別の顔

この不思議なブエノス・アイレス定数 λ は, 全く異なる場面で 10 年ほど前から論じられていました. それは “自然数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $\dots$ を割り切らない最小の素数” 2, 3, 2, 3, 2, 5, 2, 3, 2, 3, $\dots$ の平均値 という形ででした (K. Bon-Rabee & D. B. Mc Raynolds ; “GBertrand’s Postulate and subgroup growth”, Journal of Algebra, Vol.324, No.4, pp.793 - 819; 2010 ; OEIS (A053669)).

この平均値が 上述の λ に等しいことを確かめます. 素数 p が自然数 n を割り切る確率が $1/p$ なので, 素数 p_k が自然数 n を割り切らない最小の素数である確率 P_k は, $P_k = \text{Probability}(p_k \nmid n \text{ かつ } p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1} \mid n)$
 $= (1 - 1/p_k) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} 1/p_m$ となります. したがってこのような素数の平均値は,
 $\sum_{1 \leq k} (P_k \cdot p_k) = \sum_{1 \leq k} \{(p_k - 1) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} p_m\} = \lambda$ になるのです.

上記の証明より, $0 < a_n < a_{n+1} \leq 2a_n - 1 \dots$ (BP) を満たす任意の自然数列 $\{a_n\}$ に対して $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} \{(a_k - 1) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} a_m\}$ が決まり, これを用いて

$$h_1 = \alpha, \quad h_n = [h_{n-1}](h_{n-1} - [h_{n-1}] + 1) \quad (n \geq 2)$$

によって h_n を定義すると, $[h_n] = a_n$ と取ることによって, すべての項 a_n を順に生成することが分かります. さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$ が成り立つときには, この極限值 α は無理数であることも同様に分かります.

ところで, (BP) を満たす最小の自然数列は $a_n = n + 1$ ($n \geq 1$) です. このときには,

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq n} \{(a_k - 1) / \prod_{1 \leq m \leq k-1} a_m\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq n} (k / k!) \\ &= \sum_{1 \leq k} (1 / (k - 1)!) = \sum_{0 \leq k} (1 / k!) = e \quad (\text{自然対数の底 ; Napier 数}) \end{aligned}$$

となります. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$ ですから, e が無理数であることも分かります.

逆に, (BP) を満たす最大の自然数列は $a_{n+1} = 2a_n - 2$ という数列です. ここで, $a_1 = 1$ または 2 のとき, 漸化式から $a_2 = 0$ または 2 となって条件を満たさないので, $a_1 = 3$ とします. このとき定義式から数列 $\{a_n\}$ は, $a_n = 2^{n-1} + 2$ と決まります. 極限値は $\alpha = 3.56797609098\dots$ となります. 今度は, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 2$ ですから, この方法では α が無理数であるかどうかは分かりません. $\square$

4 人の高校生

このブエノス・アイレス定数 λ は, ブエノス・アイレス高校の Juli Garbulsky がシャワーをしているときに思いつき, Bruno Glecer が λ の値を計算しました. 初めは力づく

の計算でしたが、やがて公式を見つけます。研究を進めるうちに、Massi T. Florentin と Dylan Fridman が仲間に加わります。そしてケンブリッジ大学教授 James Grime の助力を得て論文にまとめました。4人の仲間は 現在 ブエノス・アイレス大学と国立工科大学で数学と物理と電子工学を学んでいます。

REFERENCE

D. Fridman, J. Garbulsky, B. Glecer, J. Grime, M. T. Florentin, “A Prime - Representing Constant”, American Mathematical Monthly, Vol.126, No.1, pp.70~73; 2019

フィボナッチ数とリュカ数の遷移過程と相互変換、
萩原幸男・立井博子

要旨 前報（日本フィボナッチ協会第 18 回研究集会報告書 2020 年 10 月）において筆者の一人（Y.H.）は正と逆フィボナッチ数を定義し、正逆の逆転を論じた．しかしその後、逆フィボナッチ数はリュカ数に対応することが分かった．本論では前報を改訂して、フィボナッチおよびリュカ数を時系列と考えるときの遷移過程を与え、さらに過程の途上でフィボナッチ数とリュカ数の相互変換が発生する場合の時系列を追求する．

1. フィボナッチ数の遷移過程

それぞれ A 色と B 色の 2 種類の球を考える．いま n を正の整数時間とすると、時点 n において A 色の球（略して A 球）は次の時点 $n+1$ において B 色の球（略して B 球）に変身し、B 球は A 球と B 球の 2 個の球に増殖するものとする．このとき時点 n における A 球の総数を A_n 個、B 球の総数を B_n 個とし、初期条件 $A_0 = -1, B_0 = 1$ から出発するものとすれば、 n の経過に伴う遷移過程は表 1 のようになる．

表 1 において A_n, B_n はそれぞれ $n \geq 2, n \geq 1$ の範囲でフィボナッチ数 F_n であり、それらの和 $A_n + B_n$ もまた F_n である．遷移過程を数式化すると

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= B_n \\ B_{n+1} &= A_n + B_n = F_n \\ \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

とすることができる．ここに見る 2×2 正方行列「F 遷移行列」の N 乗積は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} F_{N-1} & F_N \\ F_N & F_{N+1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

となるため、任意の時点 $N+1$ における A 球と B 球の数は次式により求められる．

$$\begin{pmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{N-1} & F_N \\ F_N & F_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

表 1. フィボナッチ数の遷移過程

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21
B_n	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. リュカ数の遷移過程

一方、リュカ数 L_n の遷移過程は表 2 のようになる。F 遷移過程とは逆に、 n の時点で A であった球は $n+1$ の時点で $A+B$ に、また B であった球は A に変身するから、遷移過程を数式化すると

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + B_n = L_n \\ B_{n+1} &= A_n \end{aligned} \quad (5)$$

となる。行列を用いて表現すれば

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

と書ける。

また L 遷移行列の N 乗積

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} F_{N+1} & F_N \\ F_N & F_{N-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

を用いると、任意の時点 $N+1$ における A 球と B 球の数は

$$\begin{pmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{N+1} & F_N \\ F_N & F_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

により知ることができる。

表 2 リュカ数の遷移過程

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76
B_n	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47
F_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

3. FL 変換と LF 変換

ある程度経過した時点 n まで F であった遷移過程が、突如として次の時点 $n+1$ から L 遷移過程に変換する現象を「FL 変換」と呼び、逆に L 遷移過程が F 遷移過程に戻る現象を「LF 変換」と呼ぶことにする。いま変換現象を簡単に理解するために、変換モデル表 3 により例をもとに具体的に説明する。

表 3 では例として $0 \leq n \leq 5$ の範囲がフィボナッチ数、 $n = 6$ において FL 変換が起こり、範囲 $6 \leq n \leq 8$ においてリュカ数、そして $n = 9$ において L F 変換が起こり再びフィボナッチ数に戻るケースを与える。ここでは $A_n + B_n$ がフィボナッチ数あるいはリュカ数と限らないので改めて記号 G_n を採用する。

表 3 FL 変換と LF 変換の例

	F						L			F	
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	-1	1	0	1	1	2	5	7	12	7	19
B_n	1	0	1	1	2	3	2	5	7	19	26
G_n	0	1	1	2	3	5	7	12	19	26	45

表3において G_n の漸化式を列挙すると下記ようになる。

$$\begin{aligned} G_0 &= 0, \quad G_1 = 1 \\ G_n &= G_{n-1} + G_{n-2} & n \neq K \\ G_n &= G_{n-1} + G_{n-3} & n = K \end{aligned} \quad (9)$$

ここに K は FL あるいは LF の変換点で、ここでは $K = 6$ および 9 である。

3-1 短期・超短期変換

時点 $n = K$ において FL 変換が、次いで $n = K+1$ において LF 変換が起こる短期変換のケースを考える。
このとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{K+2} \\ B_{K+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K \\ B_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K \\ B_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_K \\ 2A_K + B_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立つ。すなわち $G_K \sim G_{K+2}$ 間のギャップは $2A_K$ となることが知れる。

このような短期現象を日常の現象として捉えることは興味深い。例えば n を日単位にとり、FL 変換を旅行の往路、LF 変換を旅行の帰路と考えると、上記一連の変換は「一泊旅行」に相当する。では「日帰り旅行」はどのように考えたらよいであろうか。この場合時点 $n = K+2$ は存在せず、式(10)は

$$\begin{pmatrix} A_{K+1} \\ B_{K+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K \\ B_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_K \\ 2A_K + B_K \end{pmatrix} \quad (11)$$

と変わる。

3-2 パルス変換

「日帰り旅行」の変換幅は極めて短いので、幅を持たない一種のパルスと考えることもできる。パルスならば複数のパルスが重なって起こっても問題はない。例えば M 個のパルスが重なって発生すれば

$$\begin{pmatrix} A_{K+M} \\ B_{K+M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^M \begin{pmatrix} A_K \\ B_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_K \\ 2MA_K + B_K \end{pmatrix} \quad (12)$$

となるから、 $G_K \sim G_{K+M}$ 間のギャップは $2MA_K$ となることが分かる。

以上これらの成果をもとに、種々の応用が考えられる。他種の「数え上げ数列」への適用も期待される。これらについては、続報に発表したいと考えている。

「現代の算額」について（最終版）

五輪 教一

日本の数学である和算には、算額奉納という発表形式がありました。日本独自のこの慣習は、神社や寺という「誰の目にも触れる」場所で行われたという点において他国に類を見ないものです。そこで、この利点を今に活かさないかと考えました。仮称「現代の算額」です。

数学関係の本やインターネットサイトを開かなくても、興味の有無にかかわらず多くの人の目に触れる場所。それは、学校はもちろんのこと、公共施設や商店、食堂、床屋さんなどの「街角」です。そこに、ポスター同等の「算額」を掲示してもらおうという取り組みです。

○「現代の算額」規定

- ・掲載場所 学校、公共施設、個人店舗等
- ・算額形式 1問当たり、A4用紙1枚。問題文（図）＋出題者名
（体裁は当方で整え、紙に印刷したものをケースに入れて配布）
- ・出題方針 題意が一般の人々に伝わることを旨とし、
出題者独自の創意工夫による問題
既知の問題への平易な新解答を求める内容の問題とする。
- ・難易度等 ①小学校算数程度 ②中学校数学程度 ③高校数学程度
④高度の題材であっても、③までの知識で解答可能な程度

地方での普及活動の対象は数学愛好者ではなく、数学に興味関心のない方々、数学をゆっくり学ぶ機会を持たなかった方々に重きを置いています。そのためにも、人目に付く場所に興味を引く問題を掲示することは意味のあることであると考えます。

そこで、日本フィボナッチ協会の皆様にはお願いです。この試みにご賛同いただけましたら、「現代の算額」問題をご提供いただけないでしょうか。フィボナッチ数列関連の問題も大歓迎です。問題は『街角の数学』のホームページにも掲載しますので、閲覧者がそれぞれの地域での活動に利用することも可能です。また、解答の応募等についても、サイト内「お問い合わせ」メールをお使いいただけます。

地方での活動は何かと困難を伴いますが、20年来実施している「数楽カフェ」等の集いに加えて、数学に触れる機会を少しでも増やすことができれば有難いと思っています。

ご賛同いただけましたら、「問題」に「解答・解説」「出題者の所属・ご指名・ご連絡先」を添えて、下記まで（e-mail または封書で）お送りいただければ幸いに存じます。

住所：〒964-0911 福島県二本松市亀谷 2-27-1 五輪教一

電話：0243-22-5956

メールアドレス：streetwasan@gmail.com

「街角の数学」：<http://streetwasan.web.fc2.com/>

<付記> 算額例

文化が庶民に受け入れられた（和算が庶民の間に広まった）理由の一つに、図形の文様的な（個別の）美しさという点があるのではないかと思います。そのことを意識し、実際の算額にも見られる△□の図を応用して作問してみました。

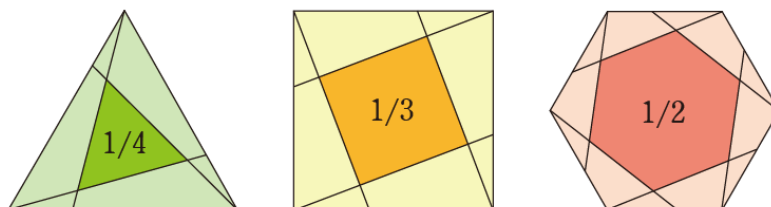
現代の算額



ここに、正三角形、正方形、正六角形があります。

個々の図形に応じて各辺に同比の内分点を取り、図のように各頂点と結ぶと、内部に相似縮小された図形が現れます。

そこで問題です。面積の縮小率がそれぞれ全体の $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ となるようにするには、各辺の内分点をそれぞれどのように定めればよいですか。



（出題：街角の数学）

実定数係数線型常差分方程式の解の比の極限の存在について

渋川元樹* (神戸大理)

講演動画 : <https://www.youtube.com/watch?v=2nPTGXGP7c0>

概要

特性根が非零かつ無重複な実定数係数線型常差分方程式の解の比の極限の存在についての同値条件を述べ, 特に 3 階以下の低解の場合に特性根を用いない, 方程式の係数のみに依る同値条件を述べる.

1 Introduction

$a_0 = 1, a_1, \dots, a_r \neq 0 \in \mathbb{R}$ とする. このとき, r 階定数係数線型常差分方程式を

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j a_j y_{n-j} = 0 \quad (1)$$

で定める. この差分方程式 (1) の一般解は (1) の特性多項式

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j a_j x^{n-j} = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j) \quad (2)$$

の (特性) 根 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ が無重複であるとき, ある定数 $C_1, \dots, C_r$ を用いて

$$y_n = \sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^{n-1} \quad (3)$$

と書ける. ここで C_i 達は初期値あるいは特性根に応じて適宜変わるが, (1) の解の比の極限 $n \rightarrow +\infty$ を考える際には, C_i が vanish してしまう例外集合を除いて, 考慮しなくてもよい. そこで以下, 特性根は非零かつ重複が無く, 各 C_i が vanish しないような一般の初期値において (1) を考察する. これは具体的には, 特性根からなる Vandermonde 行列 $(\alpha_j^{r-i})_{1 \leq i, j \leq r}$ の行列式

$$\det (\alpha_j^{r-i})_{1 \leq i, j \leq r} = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i - \alpha_j)$$

の非零性と, 逆行列

$$(\alpha_j^{r-i})_{1 \leq i, j \leq r}^{-1} = \left((-1)^{i+j} \det (\alpha_k^{r-l})_{\substack{1 \leq k, l \leq r \\ k \neq i, l \neq j}} \right)_{1 \leq i, j \leq r} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$$

*g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

を, r 個の初期値のベクトル ${}^t(y_{r-1} \cdots y_0)$ に左から掛けた各成分の非零性であり, 適当な初期値がこの条件を満たすか否かを判定することは, 一般には非常に難しい. なので以下, この条件は満たされているものと仮定して話を進める.

差分方程式 (1) の解の比は

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^n}{\sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^{n-1}}$$

であるので, その極限の存在は, 特性多項式 (2) の根が実であるか否か, 及びその絶対値の大小に依る. そこで (2) の実根の個数を k 個, 実でない根の個数を $2l$ 個として,

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k, \alpha_{k+1} = \gamma_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \dots, \alpha_{k+l} = \gamma_l e^{\sqrt{-1}\theta_l}, \alpha_{k+l+1} = \gamma_1 e^{-\sqrt{-1}\theta_1}, \dots, \alpha_{k+2l} = \gamma_l e^{-\sqrt{-1}\theta_l}$$

とする. ただし

$$\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}^\times, \quad \gamma_1, \dots, \gamma_l > 0, \quad 0 < \theta_1, \dots, \theta_l < \pi$$

とした. $a_r \neq 0$ より特性根が 0 である場合を除いているが, もし特性根に 0 を含む場合は予め差分方程式の階数を下げて考えることにする.

ここで

$$M := \max_i \{|\alpha_i|\}, \quad \gamma := \max_i \{\gamma_i\}$$

とすると, 次がわかる.

Theorem 1. 特性根が非零かつ無重複な差分方程式 (1) の解の比の極限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$ が存在するための必要十分条件は $M > \gamma$ かつ

$$M = |\beta_j| \tag{4}$$

なる $j = 1, \dots, k$ が唯一つ存在することであり, そのときの極限は β_j である. ただし実でない根が存在しない場合には常に $M > \gamma$ が成り立っているものとする.

この定理 1 はよく知られた結果であろうが, これを特性根を用いずに差分方程式 (1) の係数 $a_1, \dots, a_r$ のみで記述しようとする, 一般には非常に難解になる. 以下は例外的に係数による記述が可能な低階の場合である.

Theorem 2. (1) $r = 1$ とする. 差分方程式 (1) の特性根が非零かつ無重複となるのは $a_1 \neq 0$ のとき, そのときに限る. このとき差分方程式 (1) の解の比の極限は, 初期値が 0 でない限り常に存在して, その極限は a_1 である.

(2) $r = 2$ とする. 差分方程式 (1) の特性根が非零かつ無重複となるのは $a_2 \neq 0$ かつ $a_1^2 - 4a_2 \neq 0$ のとき, そのときに限る. このとき差分方程式 (1) の解の比の極限が存在する必要十分条件は $a_1^2 - 4a_2 > 0$, $a_1 \neq 0$ である. 極限が存在する場合, その極限は

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \begin{cases} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} & (a_1 > 0) \\ \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} & (a_1 < 0) \end{cases}.$$

(3) $r = 3$ とする. 差分方程式 (1) の特性根が非零かつ無重複となるのは $a_3 \neq 0$ かつ判別式が非零

$$D := D(a_1, a_2, a_3) := -4a_1^3 a_3 + a_1^2 a_2^2 + 18a_1 a_2 a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2 \neq 0$$

のとき, そのときに限る. このとき差分方程式 (1) の解の比の極限が存在する必要十分条件は

$$(i) \ D > 0 \text{ かつ } a_3 = a_1 a_2 \text{ ならば } |a_1| > \sqrt{|a_2|}$$

もしくは

(ii)

$$a_1 A + \frac{a_1^2}{3} - a_2 + \frac{a_1^3 - 3a_1 a_2}{9A} > 0,$$

ただし

$$A := A(a_1, a_2, a_3) := \frac{1}{6} \left(-36a_1 a_2 + 108a_3 + 8a_1^3 + 12\sqrt{-3D} \right)^{\frac{1}{3}}$$

である. 前者の場合の極限は特性多項式の 3 つの実根の絶対値が一番大きい根であり, 後者の場合の極限は

$$\frac{a_1}{3} + A(a_1, a_2, a_3) - \frac{3a_2 - a_1^2}{9A(a_1, a_2, a_3)}$$

である.

本稿は Theorem 1 (よく知られた結果と思われるが適当な文献がないようなので) と Theorem 2 の証明を与える. また関連するいくつかの注や系を述べる. 更に 3 階の場合の例をいくつか紹介する.

2 Proof of Theorem 1 and Theorem 2

Proof of Theorem 1 解の表示 (3) より十分性は明らかなので必要性を示す. これは対偶を取って

$$(i) \ \gamma = M$$

または

$$(ii) \ (4) \text{ を満たす } j \text{ が 2 つ以上存在するとき}$$

に解の比の極限が存在しないことがいえればよい.

(i) についてはまず $\gamma = M > \max_j \{|\beta_j|\}$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^n}{\sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^k C_i \beta_i \left(\frac{\beta_i}{\gamma}\right)^{n-1} + \sum_{j=1}^l \left(C_{k+j} e^{n\sqrt{-1}\theta_j} + C_{k+l+j} e^{-n\sqrt{-1}\theta_j}\right) \gamma_j \left(\frac{\gamma_j}{\gamma}\right)^{n-1}}{\sum_{i=1}^k C_i \left(\frac{\beta_i}{\gamma}\right)^{n-1} + \sum_{j=1}^l \left(C_{k+j} e^{(n-1)\sqrt{-1}\theta_j} + C_{k+l+j} e^{-(n-1)\sqrt{-1}\theta_j}\right) \left(\frac{\gamma_j}{\gamma}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^l \left(C_{k+j} e^{n\sqrt{-1}\theta_j} + C_{k+l+j} e^{-n\sqrt{-1}\theta_j} \right) \gamma_j \left(\frac{\gamma_j}{\gamma} \right)^{n-1}}{\sum_{j=1}^l \left(C_{k+j} e^{(n-1)\sqrt{-1}\theta_j} + C_{k+l+j} e^{-(n-1)\sqrt{-1}\theta_j} \right) \left(\frac{\gamma_j}{\gamma} \right)^{n-1}}$$

であるので, $\gamma = \gamma_j$ となる j を $j_1, \dots, j_m$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \gamma \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{p=1}^m \left(C_{k+j_p} e^{n\sqrt{-1}\theta_{j_p}} + C_{k+l+j_p} e^{-n\sqrt{-1}\theta_{j_p}} \right)}{\sum_{p=1}^m \left(C_{k+j_p} e^{(n-1)\sqrt{-1}\theta_{j_p}} + C_{k+l+j_p} e^{-(n-1)\sqrt{-1}\theta_{j_p}} \right)}.$$

よって解の比の極限は存在しない. $\gamma = \max_j \{|\beta_j|\}$ のときも, 複素数の偏角の極限は本質的に残るので, やはり解の比の極限は存在しない.

(ii) については $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}^\times$ であることと根の無重複性より,

$$M = \beta_i = |\beta_j|, \quad \beta_i = -\beta_j > 0, \quad i \neq j$$

となる i, j がただ一組だけ存在するとしてよい. このときは $M > \gamma$ を仮定しても

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^n}{\sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^k C_i \beta_i \left(\frac{\beta_i}{M} \right)^{n-1} + \sum_{j=1}^l \left(C_{k+j} e^{n\sqrt{-1}\theta_j} + C_{k+l+j} e^{-n\sqrt{-1}\theta_j} \right) \gamma_j \left(\frac{\gamma_j}{M} \right)^{n-1}}{\sum_{i=1}^k C_i \left(\frac{\beta_i}{M} \right)^{n-1} + \sum_{j=1}^l \left(C_{k+j} e^{(n-1)\sqrt{-1}\theta_j} + C_{k+l+j} e^{-(n-1)\sqrt{-1}\theta_j} \right) \left(\frac{\gamma_j}{M} \right)^{n-1}} \\ &= M \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_i + C_j (-1)^n}{C_i + C_j (-1)^{n-1}} \end{aligned}$$

となるので $C_i, C_j \neq 0$ のときは極限は存在しない. □

Remark 3. 定理1は特性根の無重複性を仮定していたが, これは必要である. たとえば $r = 4$ で特性多項式が, 正の実数 β について

$$x^4 - a_1 x^3 + a_2 x^2 - a_3 x + a_4 = (x - \beta)^2 (x - \beta e^{\sqrt{-1}\theta}) (x - \beta e^{-\sqrt{-1}\theta})$$

のように重根を持っている場合, $M = \beta$ で差分方程式 (1) の解は

$$y_n = C_1 \beta^{n-1} + C_2 (n-1) \beta^{n-2} + C_3 \beta^{n-1} e^{\sqrt{-1}(n-1)\theta} + C_4 \beta^{n-1} e^{-\sqrt{-1}(n-1)\theta}$$

となっているので,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_1 \beta^n + C_2 n \beta^{n-1} + C_3 \beta^n e^{\sqrt{-1}n\theta} + C_4 \beta^n e^{-\sqrt{-1}n\theta}}{C_1 \beta^{n-1} + C_2 (n-1) \beta^{n-2} + C_3 \beta^{n-1} e^{\sqrt{-1}(n-1)\theta} + C_4 \beta^{n-1} e^{-\sqrt{-1}(n-1)\theta}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_1 \frac{\beta^2}{n-1} + C_2 \frac{n}{n-1} \beta + C_3 \frac{\beta^2}{n-1} e^{\sqrt{-1}n\theta} + C_4 \frac{\beta^2}{n-1} e^{-\sqrt{-1}n\theta}}{C_1 \frac{\beta}{n-1} + C_2 + C_3 \frac{\beta}{n-1} e^{\sqrt{-1}(n-1)\theta} + C_4 \frac{\beta}{n-1} e^{-\sqrt{-1}(n-1)\theta}} \\ &= M \end{aligned}$$

ゆえ, $M = \gamma = \beta$ であるにも関わらず, 解の比の極限が存在する.

Proof of Theorem 2 (1) 明らかである。

(2) この場合、特性多項式 (2) は実数係数の二次多項式なので、その特性根は2つとも実であるか、2つとも実でないかのいずれかである。特性根の非零性と無重複性は、特性多項式の定数項と判別式の非零性と同値なので前半は部分はいい。このとき、定理1の条件を満たせるのは、特性根が共に実かつその絶対値が等しくない場合のみなので、判別式 $a_1^2 - 4a_2$ が正かつ $a_1 \neq 0$ であればよい。

(3) この場合、特性多項式 (2) は実数係数の三次多項式なので、その特性根は3つとも実であるか、1つは実で残り2つとも実でないかのいずれかである。前半部分の特性根の非零性と無重複性の同値条件は $r = 2$ と同様に直ちにわかる。定理1の条件 (4) については判別式の正負による場合分けが必要である。

まず (i) の場合、実数係数の三次多項式の判別式 D が正であることより、特性多項式の根が無重複かつ全て実の場合である。このとき絶対値が最大の根が3つ出てくることはないので、絶対値が最大の根が2つ出てくる状況を除けばよい。今、根が無重複かつ全て実の状況を考えているので、絶対値が最大の根が2つ出てくる状況は $\beta, c \in \mathbb{R}, |\beta| > |c|$ として

$$(x - \beta)(x + \beta)(x - c) = (x^2 - \beta^2)(x - c) = x^3 - cx^2 - \beta^2x + \beta^2c$$

のように書ける。逆に $a_3 = a_1a_2$ のとき、そのときに限り、特性多項式は

$$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_1a_2 = (x^2 + a_2)(x - a_1)$$

のように分解する。更に特性根が非零な実数であることから $a_2 < 0$ であり、結局

$$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_1a_2 = (x - \sqrt{-a_2})(x + \sqrt{-a_2})(x - a_1)$$

となる。よって絶対値が最大の根が2つ出てこない状況は、特性多項式がそもそもこのように分解しない $a_3 \neq a_1a_2$ のときか、あるいは $a_3 = a_1a_2$ でも絶対値が一致している二根よりも残りの一根の絶対値の方が真に大きい場合、すなわち $|a_1| > \sqrt{|a_2|}$ のときに限る。

他方 (ii) の場合、 $D < 0$ ゆえ特性根の1つは実で残り2つとも実でないが、この場合は Cardano の公式より、特性多項式 (2) の根はそれぞれ

$$\frac{a_1}{3} + A - \frac{3a_2 - a_1^2}{9A} \in \mathbb{R}, \quad \frac{a_1}{3} - \frac{A}{2} + \frac{3a_2 - a_1^2}{18A} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} \left(A + \frac{3a_2 - a_1^2}{9A} \right)$$

と書ける。よって

$$\begin{aligned} 0 &< \left(\frac{a_1}{3} + A - \frac{3a_2 - a_1^2}{9A} \right)^2 - \left| \frac{a_1}{3} - \frac{A}{2} + \frac{3a_2 - a_1^2}{18A} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} \left(A + \frac{3a_2 - a_1^2}{9A} \right) \right|^2 \\ &= \left(\frac{a_1}{3} + A - \frac{3a_2 - a_1^2}{9A} \right)^2 - \left(\frac{a_1}{3} - \frac{A}{2} + \frac{3a_2 - a_1^2}{18A} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(A + \frac{3a_2 - a_1^2}{9A} \right)^2 \\ &= a_1A + \frac{a_1^2}{3} - a_2 + \frac{a_1^3 - 3a_1a_2}{9A}. \end{aligned}$$

□この定理2の系として、たとえば次のようなことが直ちにわかる。

Corollary 4. $r = 3, a_3 \neq 0, D(a_1, a_2, a_3) \neq 0, a_1 = 0$ のとき、差分方程式 (1) の解の比の極限が存在する必要十分条件は $a_2 < 0$ である。

3 Some examples

$r = 3$ の場合にいくつかの具体例を述べる.

(1) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1$ (tribonacci) の場合, $D = -44 < 0$ かつ

$$a_1 A + \frac{a_1^2}{3} - a_2 + \frac{a_1^3 - 3a_1 a_2}{9A} = \frac{(19 + 3\sqrt{33})^{\frac{2}{3}} + 4(19 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + 4}{3(19 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} = 2.839286755 \dots > 0$$

ゆえ, 解の比の極限は存在して

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a_1}{3} + A(a_1, a_2, a_3) - \frac{3a_2 - a_1^2}{9A(a_1, a_2, a_3)} = \frac{1}{3} + \frac{(19 + 3\sqrt{33})^{\frac{2}{3}} + 4}{3(19 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} = 1.839286755 \dots$$

(2) $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 1$ の場合, $D = -44 < 0$ かつ

$$a_1 A + \frac{a_1^2}{3} - a_2 + \frac{a_1^3 - 3a_1 a_2}{9A} = -\frac{2}{3} + \frac{-(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{2}{3}} + 2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} = -1.543689012 \dots < 0$$

ゆえ, 解の比の極限は存在しない. 実際, 初期値を $y_1 := 1, y_2 := 1, y_3 := 1$ として, 差分方程式

$$y_{n+3} + y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = 0$$

を解くと, その解は

$$1, 1, 1, -1, 1, 1, -3, 3, 1, -7, 9, -1, -15, 25, -11, -29, 65, -47, -47, 159, -159, -47, 365, -477, \dots$$

のように, 実でない特性根の偏角の影響で不規則に振動するため, その比 $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ も

$$1, 1, -1, -1, 1, -3, -1, 0.3333 \dots, -7, -1.2857 \dots, -0.1111 \dots, 15, -1.6666 \dots, -0.44, \dots$$

と不規則に振動して収束しない.

(3) $a_1 = 2, a_2 = -9, a_3 = -18$ の場合, $D = 900 = 30^2 > 0$ かつ $a_3 = a_1 a_2 = -18$ であるにも関わらず $\sqrt{|a_2|} = 3 > 2 = |a_1|$ ゆえ, 解の比の極限は存在しない. 実際, 初期値を $y_1 := 1, y_2 := 1, y_3 := 1$ として, 差分方程式

$$y_{n+3} - 2y_{n+2} - 9y_{n+1} + 18y_n = 0$$

を解くと, その解は

$$y_n = -\frac{2}{3}3^{n-1} + \frac{1}{15}(-3)^{n-1} + \frac{8}{5}2^{n-1}$$

である. 具体例を書いてみると

$$1, 1, 1, -7, -23, -127, -335, -1399, -3527, -13615, -33791, -126631, -312311, -1156063, \dots$$

であり, これだけだと符号の振動がなく単調に減少しているが, その比

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{-\frac{2}{3}3^n + \frac{1}{15}(-3)^n + \frac{8}{5}2^n}{-\frac{2}{3}3^{n-1} + \frac{1}{15}(-3)^{n-1} + \frac{8}{5}2^{n-1}}$$

を並べてみると

$$1, 1, -7, 3.2857\cdots, 5.5217\cdots, 2.6377\cdots, 4.1761\cdots, 2.5210\cdots, 3.860\cdots, 2.4818\cdots, \dots$$

となり最終的に

$$2.454545454\cdots = \frac{27}{11} = 3 \frac{-\frac{2}{3} + \frac{1}{15}}{-\frac{2}{3} - \frac{1}{15}}$$

と

$$3.666666666\cdots = \frac{11}{3} = 3 \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{15}}{-\frac{2}{3} + \frac{1}{15}}$$

で振動するため、極限は存在しない。

4 Concluding remarks

$r > 3$ の場合は一般に、差分方程式 (1) の係数 $a_1, \dots, a_r$ による解の比の極限の存在の記述は極めて困難であろう。Fibonacci 数の高階化を考える際には、黄金比の高階化にあたる比の極限の存在も当然要請されるだろうが、差分方程式を単純に高階化するのはこの要請と上述のような現実からもかなり絶望的と思われる。この点から考えても、以前から提唱 [1] しているように Fibonacci 数

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\} \\ &= \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^j \\ &= \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \left(-2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) \right)^i \left(-2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) \right)^j \end{aligned}$$

の高階化を差分方程式の解としてではなく、完全斉次対称多項式

$$h_n^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \sum_{\substack{i_1+\dots+i_r=n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} z_1^{i_1} \cdots z_r^{i_r}$$

のよい特殊値, たとえば

$$F_{n+1}^{(r)} := h_n^{(r)} \left(-2 \cos \left(\frac{2\pi r}{2r+1} \right), \dots, -2 \cos \left(\frac{2\pi}{2r+1} \right) \right)$$

として捉えることは理に適っていると言える。実際、この場合の比の極限は

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}^{(r)}}{F_n^{(r)}} = -2 \cos \left(\frac{2\pi r}{2r+1} \right)$$

であり、 $r = 2$ の場合が通常の Fibonacci 数と黄金比になっている。

参考文献

- [1] G. Shibukawa: *New identities for some symmetric polynomials and a higher order analogue of the Fibonacci and Lucas numbers*, Fibonacci Quart., **58**-5, (2020) pp200–221.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University,
1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe, 657-8501, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

フィボナッチ数とフェルマー方程式

$$X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$$

宗像 修

福島県立矢吹病院

序

第12回のフィボナッチ協会研究集会で、2元2次不定方程式の解が連続するフィボナッチ数、リュカ数と二項係数を用いて表せるという定理とその定理のフェルマーの最終定理(以下FLT)の指数5の場合II($xyz \equiv 0 \pmod{5}$)への応用について発表しましたが、その時に示した不定方程式の整数解に関する定理は半分の解を見落としておりました。今回、その訂正とその定理のFLT($X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$)の場合I($xyz \not\equiv 0 \pmod{5}$)への応用を紹介します。

主定理

整数の組 (u, v) が不定方程式 $x^2 - xy - y^2 = K$ の解であるとき

1.1) $x^2 - xy - y^2 = K^n$ の整数解 X_n, Y_n は

$$\begin{aligned} (X_n, Y_n) &= \left(\pm \sum_{i=0}^n F_{(2m+1)-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i, \pm \sum_{i=0}^n F_{2m-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i \right) \\ &= \left(\pm \sum_{i=0}^n F_{(2m-1)-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i, \mp \sum_{i=0}^n F_{2m-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i \right), \end{aligned}$$

1.2) $x^2 - xy - y^2 = 5K^n$ の整数解 X'_n, Y'_n は

$$\begin{aligned} (X'_n, Y'_n) &= \left(\pm \sum_{i=0}^n L_{2m-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i, \pm \sum_{i=0}^n L_{(2m-1)-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i \right) \\ &= \left(\pm \sum_{i=0}^n L_{2m-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i, \mp \sum_{i=0}^n L_{(2m+1)-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i \right), \end{aligned}$$

(符号同順, m は任意の整数) と表され、全ての整数解はこれらから得られる。

主定理について前回は 1.1), 1.2) とともに 2 段目の解が見落とされていました.
この定理は不定方程式 $x^2 - xy - y^2 = K$ の解をすべて求めた上で次の定理
とそれらを組み合わせることによって得られます.

定理 整数の組 (u, v) が不定方程式 $x^2 - xy - y^2 = K$ の解であるとき

$$S_n = \sum_{i=0}^n F_{m-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i,$$

$$T_n = \sum_{i=0}^n F_{(m-1)-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i$$

(F はフィボナッチ数, m は任意の整数, $n = 1, 2, 3, \dots$) で定まる整数の組
(S_n, T_n) は不定方程式

$$x^2 - xy - y^2 = (-1)^{m-1} K^n$$

の解であり

$$S'_n = \sum_{i=0}^n L_{m-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i,$$

$$T'_n = \sum_{i=0}^n L_{(m-1)-i} \binom{n}{i} u^{n-i} v^i$$

(L はリュカ数, m は任意の整数, $n = 1, 2, 3, \dots$) で定まる整数の組 (S'_n, T'_n)
は, 不定方程式

$$x^2 - xy - y^2 = (-1)^m 5K^n$$

の解である.

この定理は数学的帰納法を用いて比較的簡単に証明できます.

不定方程式 $x^2 - xy - y^2 = K$ の解はペル方程式 $X^2 - 5Y^2 = 4K$ を解くこ
とで得られ, 次の補題を示すことが出来ます.

補題 1: $Q_1(x, y) = x^2 - xy - y^2$ と定義する.

$ad - bc = \pm 1$ かつ $Q_1(ax + by, cx + dy) = Q_1(x, y)$ となるような整数 a, b, c, d

は

$$\begin{aligned} E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \pm \begin{pmatrix} F_{2j+1} & F_{2j} \\ F_{2j} & F_{2j-1} \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} F_{2j-1} & -F_{2j} \\ -F_{2j} & F_{2j+1} \end{pmatrix} \\ &= \pm \begin{pmatrix} F_{2j+1} & -F_{2j+2} \\ F_{2j} & -F_{2j+1} \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} F_{2j-1} & F_{2j-2} \\ -F_{2j} & -F_{2j-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(符号同順, F はフィボナッチ数, j は任意の整数) であり, 整数の組 (u, v) が不定方程式 $x^2 - xy - y^2 = K$ の解であるとき

$$E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

で定まる整数の組 (U, V) は不定方程式 $x^2 - xy - y^2 = K$ の解であり, すべての整数解はこれらによって尽くされる.

前回の研究集会で大関先生から主定理が $K = 1$ でも成り立つのか? という質問があったので, $K = 1$ を含めたいいくつかの計算例を示しておきます.

主定理 1.1) の1段目の式を用いて $n = 3, u = 2, v = 1, m = 3$ として計算してみます.

$u^2 - uv - v^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 - 1 = 1$ ですから, 得られた解 (X_3, Y_3) について $X_3^2 - X_3 Y_3 - Y_3^2 = 1$ が成り立ちます.

$$\begin{aligned} (X_3, Y_3) &= \left(\sum_{i=0}^3 F_{3-i} \binom{3}{i} 2^{3-i} 1^i, \sum_{i=0}^3 F_{2-i} \binom{3}{i} 2^{3-i} 1^i \right) \\ &= (2^3 \cdot F_3 + 3 \cdot 2^2 \cdot F_2 + 3 \cdot 2 \cdot F_1 + F_0, 2^3 \cdot F_2 + 3 \cdot 2^2 \cdot F_1 + 3 \cdot 2 \cdot F_0 + F_{-1}) \\ &= (8 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 0, 8 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 0 + 1) \\ &= (16 + 12 + 6 + 0, 8 + 12 + 0 + 1) \\ &= (34, 21), \\ 34^2 - 34 \cdot 21 - 21^2 &= 1156 - 714 - 441 = 1. \end{aligned}$$

同じ式を用いてフィボナッチ数のindexを $m = 3$ に変更してみます.

$$\begin{aligned}
(X_3, Y_3) &= \left(\sum_{i=0}^3 F_{7-i} \binom{3}{i} 2^{3-i} 1^i, \sum_{i=0}^3 F_{6-i} \binom{3}{i} 2^{3-i} 1^i \right) \\
&= (2^3 \cdot F_7 + 3 \cdot 2^2 \cdot F_6 + 3 \cdot 2 \cdot F_5 + F_4, 2^3 \cdot F_6 + 3 \cdot 2^2 \cdot F_5 + 3 \cdot 2 \cdot F_4 + F_3) \\
&= (8 \cdot 13 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 3, 8 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2) \\
&= (104 + 96 + 30 + 3, 64 + 60 + 18 + 2) \\
&= (233, 144), \\
233^2 - 233 \cdot 144 - 144^2 &= 54289 - 33552 - 20736 = 1.
\end{aligned}$$

主定理 1.1) の2段目の式を用いて $n = 5, u = 2, v = 1, m = 2$ として計算してみます.

$$\begin{aligned}
(X_5, Y_5) &= \left(\sum_{i=0}^5 F_{3-i} \binom{5}{i} 2^{5-i} 1^i, - \sum_{i=0}^5 F_{4-i} \binom{5}{i} 2^{5-i} 1^i \right), \\
&= (2^5 \cdot F_3 + 5 \cdot 2^4 \cdot F_2 + 10 \cdot 2^3 \cdot F_1 + 10 \cdot 2^2 F_0 + 5 \cdot 2 \cdot F_{-1} + F_{-2}, \\
&\quad 2^5 \cdot F_4 + 5 \cdot 2^4 \cdot F_3 + 10 \cdot 2^3 \cdot F_2 + 10 \cdot 2^2 F_1 + 5 \cdot 2 \cdot F_0 + F_{-1}) \\
&= (32 \cdot 2 + 5 \cdot 16 \cdot 1 + 10 \cdot 8 \cdot 1 + 0 + 10 \cdot 1 - 1, -32 \cdot 1 + 5 \cdot 16 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \cdot 1 + 0 + 1) \\
&= (64 + 80 + 80 + 0 + 10 - 1, -96 - 160 - 80 - 40 + 0 - 1) \\
&= (233, -377), \\
233^2 - 233 \cdot (-377) - (-377)^2 &= 54289 + 87841 - 142129 = 1.
\end{aligned}$$

主定理 1.2) の1段目の式を用いて $n = 4, u = 4, v = 1, m = 3$ として計算してみます.

$u^2 - uv - v^2 = 4^2 - 4 - 1 = 11$ ですから, 得られた解 (X'_4, Y'_4) について $X_4'^2 - X_4' Y_4' - Y_4'^2 = 5 \cdot 11^4 = 73205$ が成り立ちます.

$$\begin{aligned}
(X'_4, Y'_4) &= \left(\sum_{i=0}^4 L_{6-i} \binom{4}{i} 4^{4-i} 1^i, \sum_{i=0}^4 L_{5-i} \binom{4}{i} 4^{4-i} 1^i \right) \\
&= (4^4 \cdot L_6 + 4 \cdot 4^3 \cdot L_5 + 6 \cdot 4^2 \cdot L_4 + 4 \cdot 4 \cdot L_3 + L_2, \\
&\quad 4^4 \cdot L_5 + 4 \cdot 4^3 \cdot L_4 + 6 \cdot 4^2 \cdot L_3 + 4 \cdot 4 \cdot L_2 + L_1) \\
&= (256 \cdot 18 + 256 \cdot 11 + 96 \cdot 7 + 16 \cdot 4 + 3, 256 \cdot 11 + 256 \cdot 7 + 96 \cdot 4 + 16 \cdot 3 + 1) \\
&= (4608 + 2816 + 672 + 64 + 3, 2816 + 1792 + 384 + 48 + 1) \\
&= (8163, 5041), \\
8163^2 - 8163 \cdot 5041 - 5041^2 &= 66634569 - 41149683 - 25411681 = 73205.
\end{aligned}$$

主定理の FLT ($X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$) の場合 I への応用については、少し長くなるのですが証明そのものを載せておきます。

この証明では次の定理を定理 1. として主定理は定理 2. としています。主定理の 1.1) は 2.1), 1.2) は 2.2) になっています。

定理 1.

x, y を互いに素な 0 ではない整数とする。 d が $x^2 - xy - y^2$ の約数とすれば、互いに素な 0 ではない整数 x_1, y_1 を用いて $d = x_1^2 - x_1 y_1 - y_1^2$ と表せる。

方程式

$$X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$$

は 0 とは異なる整数解をもたない。

証明 x, y, z を $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ となるどの 2 つも互いに素な 0 ではない整数とする。 また一般性を失うことなしに $5 \nmid xy$ と仮定して良い。 このとき

$$-z^5 = x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4) \quad (1)$$

であり、さらに $x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4 = (x + y)^4 - 5xy(x + y)^2 + 5x^2 y^2$, $\gcd(x + y, xy) = 1$ から $5 \nmid x + y$ ならば $\gcd(x + y, x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4) = 1$ であり、 $5 \mid x + y$ ならば $\gcd(x + y, x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4) = 5$ である。

場合 I $\gcd(x + y, x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4) = 1 (5 \nmid xy, 5 \nmid x + y)$ のとき
(1) から $x + y$ と $x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4$ はそれぞれ 5 乗数であり

$$x + y = z_1^5, \quad (2)$$

$$x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4 = z_2^5 \quad (3)$$

(z_1, z_2 は互いに素な 0 ではない整数かつ $5 \nmid z_1 z_2$) と表せる。 z_2 は $x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 + y^2) - x^2 y^2$ の約数であり、 $\gcd(x^2 + y^2, xy) = 1$ であるから定理 1. より、互いに素な 0 ではない整数 x_1, y_1 を用い

て $z_2 = x_1^2 - x_1y_1 - y_1^2$ と表せる. さらに定理 2.1) より

$$x^2 + y^2 = \pm(F_{a+1}x_1^5 + 5F_ax_1^4y_1 + 10F_{a-1}x_1^3y_1^2 + 10F_{a-2}x_1^2y_1^3 + 5F_{a-3}x_1y_1^4 + F_{a-4}y_1^5), \quad (4)$$

$$xy = \pm(F_ax_1^5 + 5F_{a-1}x_1^4y_1 + 10F_{a-2}x_1^3y_1^2 + 10F_{a-3}x_1^2y_1^3 + 5F_{a-4}x_1y_1^4 + F_{a-5}y_1^5) \quad (5)$$

または

$$x^2 + y^2 = \pm(F_{a-1}x_1^5 + 5F_{a-2}x_1^4y_1 + 10F_{a-3}x_1^3y_1^2 + 10F_{a-4}x_1^2y_1^3 + 5F_{a-5}x_1y_1^4 + F_{a-6}y_1^5), \quad (6)$$

$$xy = \mp(F_ax_1^5 + 5F_{a-1}x_1^4y_1 + 10F_{a-2}x_1^3y_1^2 + 10F_{a-3}x_1^2y_1^3 + 5F_{a-4}x_1y_1^4 + F_{a-5}y_1^5) \quad (7)$$

(a は任意の偶数) と表すことができる.

x	y	$x^2 + y^2$	x	y	$x^2 + y^2$
1	1	2	3	1	0
1	2	0	3	2	3
1	3	0	3	3	3
1	4	2	3	4	0
2	1	0	4	1	2
2	2	3	4	2	0
2	3	3	4	3	0
2	4	0	4	4	2

Table 1: mod 5.

$x^5 + y^5 + z^5 = 0$ が成り立てばフェルマーの小定理より $x^5 + y^5 + z^5 \equiv x + y + z \equiv 0 \pmod{5}$ である. ここで $x \equiv y \equiv z \pmod{5}$ は不可能である. したがって, 一般性を失うことなしに $x \not\equiv y \pmod{5}$ と仮定して良い. 表 1 から $xy \not\equiv 0, x + y \not\equiv 0, x \not\equiv y \pmod{5}$ が満たされるならば, $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ である.

(4) において $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ とすると $\pm(F_{a+1}x_1^5 + F_{a-4}y_1^5) \equiv 0 \pmod{5}$ である. ここで $F_{a+1} = 5F_{a-3} + 3F_{a-4}$ であり, さらにフェルマーの小定理より $x_1^5 \equiv x_1, y_1^5 \equiv y_1 \pmod{5}$ であるから $x^2 + y^2 \equiv \pm(F_{a+1}x_1^5 + F_{a-4}y_1^5) \equiv$

$\pm\{(5F_{a-3}+3F_{a-4})x_1+F_{a-4}y_1\} \equiv \pm F_{a-4}(3x_1+y_1) \equiv 0 \pmod{5}$ が成り立つ。
 $3x_1+y_1 \equiv 0 \pmod{5}$ とすれば, $z_2 \equiv x_1^2 - x_1(-3x_1) - (-3x_1)^2 \equiv -5x_1^2 \equiv 0 \pmod{5}$,
 となり $5 \nmid z_2$ に反する. したがって, $\pm F_{a-4} \equiv 0 \pmod{5}$ であり
 $a-4, a+1$ は 5 の倍数となる. 同様に (6) において $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ と
 すると $\pm F_{a-6} \equiv 0 \pmod{5}$ が導かれ $a-1$ が 5 の倍数となる.

(4),(5) について $a+1$ を $5b$ とおく. このとき (2),(4),(5) から

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + 2xy \\
 &= (x+y)^2 \\
 &= \pm\{(F_{5b}+2F_{5b-1})x_1^5 + 5(F_{5b-1}+2F_{5b-2})x_1^4y_1 + 10(F_{5b-2}+2F_{5b-3})x_1^3y_1^2 + \\
 & 10(F_{5b-3}+2F_{5b-4})x_1^2y_1^3 + 5(F_{5b-4}+2F_{5b-5})x_1y_1^4 + (F_{5b-5}+2F_{5b-6})y_1^5\} \\
 &= \pm\{(F_{5b+1}+F_{5b-1})x_1^5 + 5(F_{5b}+F_{5b-2})x_1^4y_1 + 10(F_{5b-1}+F_{5b-3})x_1^3y_1^2 + \\
 & 10(F_{5b-2}+F_{5b-4})x_1^2y_1^3 + 5(F_{5b-3}+F_{5b-5})x_1y_1^4 + (F_{5b-4}+F_{5b-6})y_1^5\} \\
 &= \pm(L_{5b}x_1^5 + 5L_{5b-1}x_1^4y_1 + 10L_{5b-2}x_1^3y_1^2 + 10L_{5b-3}x_1^2y_1^3 + 5L_{5b-4}x_1y_1^4 + \\
 & L_{5b-5}y_1^5) \\
 &= z_1^{10}
 \end{aligned} \tag{8}$$

(b は任意の奇数) が得られる.

(6),(7) について $a-1$ を $5b'$ とおく. このとき (2),(6),(7) から

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + 2xy \\
 &= (x+y)^2 \\
 &= \pm\{(F_{5b'}-2F_{5b'+1})x_1^5 + 5(F_{5b'-1}-2F_{5b'})x_1^4y_1 + 10(F_{5b'-2}-2F_{5b'-1})x_1^3y_1^2 + \\
 & 10(F_{5b'-3}-2F_{5b'-2})x_1^2y_1^3 + 5(F_{5b'-4}-2F_{5b'-3})x_1y_1^4 + (F_{5b'-5}-2F_{5b'-4})y_1^5\} \\
 &= \pm\{-(F_{5b'-1}+F_{5b'+1})x_1^5 - 5(F_{5b'-2}+F_{5b'})x_1^4y_1 - 10(F_{5b'-3}+F_{5b'-1})x_1^3y_1^2 \\
 & - 10(F_{5b'-4}+F_{5b'-2})x_1^2y_1^3 - 5(F_{5b'-5}+F_{5b'-3})x_1y_1^4 - (F_{5b'-6}+F_{5b'-4})y_1^5\} \\
 &= \mp(L_{5b'}x_1^5 + 5L_{5b'-1}x_1^4y_1 + 10L_{5b'-2}x_1^3y_1^2 + 10L_{5b'-3}x_1^2y_1^3 + 5L_{5b'-4}x_1y_1^4 + \\
 & L_{5b'-5}y_1^5) \\
 &= z_1^{10}
 \end{aligned}$$

(b' は任意の奇数) となり (8) と同じ形の方程式が得られる.

符号が負の方程式は $-x_1, -y_1$ をそれぞれ x_1, y_1 とおき直せば符号が正の方程式と同形となる.

したがって,

$$\begin{aligned} L_{5b}x_1^5 + 5L_{5b-1}x_1^4y_1 + 10L_{5b-2}x_1^3y_1^2 + 10L_{5b-3}x_1^2y_1^3 + 5L_{5b-4}x_1y_1^4 + \\ L_{5b-5}y_1^5 = z_1^{10} \end{aligned} \quad (9)$$

の整数解について考慮すれば十分である.

補題 1.1) より (9) は 0 とは異なる整数解をもたない. これは仮定 $(xyz \neq 0)$ に反する. $\square$

補題 1.1) 方程式

$$L_{5b}X^5 + 5L_{5b-1}X^4Y + 10L_{5b-2}X^3Y^2 + 10L_{5b-3}X^2Y^3 + 5L_{5b-4}XY^4 + L_{5b-5}Y^5 = Z^5$$

(b は任意の奇数, $5 \nmid Z$) は 0 とは異なる整数解をもたない.

証明 x, y, z を次式を満たすどの 2 つも互いに素な 0 ではない整数とする.

$$L_{5b}x^5 + 5L_{5b-1}x^4y + 10L_{5b-2}x^3y^2 + 10L_{5b-3}x^2y^3 + 5L_{5b-4}xy^4 + L_{5b-5}y^5 = z^5 \quad (1.1)$$

(b は任意の奇数, $5 \nmid z$).

ドウ・モアブルビネの公式より $L_n = \alpha^n + \beta^n$ ($\alpha = (1 + \sqrt{5})/2, \beta = (1 - \sqrt{5})/2, n$ は任意の整数) である. これを (1.1) に適用すると

$$\begin{aligned} L_{5b}x^5 + 5L_{5b-1}x^4y + 10L_{5b-2}x^3y^2 + 10L_{5b-3}x^2y^3 + 5L_{5b-4}xy^4 + L_{5b-5}y^5 \\ = (\alpha^{5b} + \beta^{5b})x^5 + 5(\alpha^{5b-1} + \beta^{5b-1})x^4y + 10(\alpha^{5b-2} + \beta^{5b-2})x^3y^2 + 10(\alpha^{5b-3} + \beta^{5b-3})x^2y^3 \\ + 5(\alpha^{5b-4} + \beta^{5b-4})xy^4 + (\alpha^{5b-5} + \beta^{5b-5})y^5 \\ = \alpha^{5b-5}(\alpha^5x^5 + 5\alpha^4x^4y + 10\alpha^3x^3y^2 + 10\alpha^2x^2y^3 + 5\alpha xy^4 + y^5) + \beta^{5b-5}(\beta^5x^5 \\ + 5\beta^4x^4y + 10\beta^3x^3y^2 + 10\beta^2x^2y^3 + 5\beta xy^4 + y^5) \\ = \alpha^{5b-5}(\alpha x + y)^5 + \beta^{5b-5}(\beta x + y)^5 \\ = z^5 \end{aligned}$$

となる. ここで

$$u = \alpha^{b-1}(\alpha x + y), \quad v = \beta^{b-1}(\beta x + y) \quad (1.2)$$

とおくと

$$u^5 + v^5 = (u + v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4) = z^5. \quad (1.3)$$

さらに

$$\begin{aligned}
u + v &= (\alpha^b + \beta^b)x + (\alpha^{b-1} + \beta^{b-1})y = L_b x + L_{b-1} y, \\
uv &= (\alpha\beta)^{b-1}(\alpha x + y)(\beta x + y) = -x^2 + xy + y^2, \\
u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 &= (u + v)^4 - 5uv(u + v)^2 + 5u^2v^2. \quad (1.4)
\end{aligned}$$

したがって, $u + v, uv, u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4$ は整数である.

$$\begin{aligned}
&\gcd(L_b x + L_{b-1} y, L_{b-1} x + L_{b-2} y) \\
&= \gcd((L_{b-1} + L_{b-2})x + (L_{b-2} + L_{b-3})y, L_{b-1} x + L_{b-2} y) \\
&= \gcd((L_{b-1} x + L_{b-2} y) + (L_{b-2} x + L_{b-3} y), L_{b-1} x + L_{b-2} y) \\
&= \gcd(L_{b-2} x + L_{b-3} y, L_{b-1} x + L_{b-2} y) \\
&\quad \vdots \\
&= \gcd(4x + 3y, 3x + y) \\
&= \gcd(x + 2y, 3x + y).
\end{aligned}$$

ここで $\gcd(L_b x + L_{b-1} y, L_{b-1} x + L_{b-2} y) = \delta$ とおく. $\delta \mid 4x + 3y, \delta \mid x + 2y$ から $\delta \mid 5(x + y) (= (4x + 3y) + (x + 2y))$ であり, $5 \nmid z, u + v \mid z^5, \delta \mid u + v (= L_b x + L_{b-1} y)$ であるから $5 \nmid \delta$ である. $\delta \mid x + y$ とすると $\gcd(x + y, x + 2y) = \gcd(x + y, y) = 1$ であるから $\delta = 1$ である. したがって, $\gcd(L_b x + L_{b-1} y, L_{b-1} x + L_{b-2} y) = 1$ である.

$L_b x + L_{b-1} y, L_{b-1} x + L_{b-2} y$ について次の方程式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&(L_b x + L_{b-1} y)^2 - (L_b x + L_{b-1} y)(L_{b-1} x + L_{b-2} y) - (L_{b-1} x + L_{b-2} y)^2 \\
&= (L_b^2 - L_b L_{b-1} - L_{b-1}^2)x^2 + (2L_b L_{b-1} - L_b L_{b-2} - L_{b-1}^2 - 2L_{b-1} L_{b-2})xy + \\
&\quad (L_{b-1}^2 - L_{b-1} L_{b-2} - L_{b-2}^2)y^2 \\
&= (L_b L_{b-2} - L_{b-1}^2)x^2 + (L_{b-1} L_{b-3} - L_{b-2}^2)xy + (L_{b-1} L_{b-3} - L_{b-2}^2)y^2 \\
&= 5(-x^2 + xy + y^2) \\
&= 5uv.
\end{aligned}$$

$\gcd(L_b x + L_{b-1} y, L_{b-1} x + L_{b-2} y) = 1$ から $\gcd(L_b x + L_{b-1} y, 5uv) = \gcd(u + v, 5uv) = 1$ である. したがって $\gcd(u + v, u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4) =$

$\gcd(u+v, (u+v)^4 - 5uv(u+v)^2 + 5u^2v^2) = \gcd(u+v, 5u^2v^2) = 1$. したがって, (1.3) から $u+v, u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4$ はそれぞれ 5 乗数であり

$$u+v = z_1^5, \quad (1.5)$$

$$u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 = z_2^5 \quad (1.6)$$

(z_1, z_2 は互いに素な 0 ではない整数かつ $5 \nmid z_1 z_2$) と表せる.

z_2 は $u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - uv(u^2 + v^2) - u^2v^2$ の約数である. $u+v, uv$ が整数であるから $u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv$ は整数であり $\gcd(u+v, 5uv) = 1, \gcd(u+v, uv) = 1, \gcd(u^2 + v^2, uv) = \gcd((u+v)^2, uv) = 1$ であるから定理 1. より, 互いに素な 0 ではない整数 x_1, y_1 を用いて $z_2 = x_1^2 - x_1y_1 - y_1^2$ と表せる. さらに定理 2.1) より

$$u^2 + v^2 = \pm(F_{c+1}x_1^5 + 5F_cx_1^4y_1 + 10F_{c-1}x_1^3y_1^2 + 10F_{c-2}x_1^2y_1^3 + 5F_{c-3}x_1y_1^4 + F_{c-4}y_1^5), \quad (1.7)$$

$$uv = \pm(F_cx_1^5 + 5F_{c-1}x_1^4y_1 + 10F_{c-2}x_1^3y_1^2 + 10F_{c-3}x_1^2y_1^3 + 5F_{c-4}x_1y_1^4 + F_{c-5}y_1^5) \quad (1.8)$$

または

$$u^2 + v^2 = \pm(F_{c-1}x_1^5 + 5F_{c-2}x_1^4y_1 + 10F_{c-3}x_1^3y_1^2 + 10F_{c-4}x_1^2y_1^3 + 5F_{c-5}x_1y_1^4 + F_{c-6}y_1^5), \quad (1.9)$$

$$uv = \mp(F_cx_1^5 + 5F_{c-1}x_1^4y_1 + 10F_{c-2}x_1^3y_1^2 + 10F_{c-3}x_1^2y_1^3 + 5F_{c-4}x_1y_1^4 + F_{c-5}y_1^5) \quad (1.10)$$

(c は任意の偶数) と表すことができる.

さらに (1.5), (1.7), (1.8) から

$$\begin{aligned} & u^2 + v^2 + 2uv \\ &= (u+v)^2 \\ &= \pm\{(F_{c+1} + 2F_c)x_1^5 + 5(F_c + 2F_{c-1})x_1^4y_1 + 10(F_{c-1} + 2F_{c-2})x_1^3y_1^2 + \\ & \quad 10(F_{c-2} + 2F_{c-3})x_1^2y_1^3 + 5(F_{c-3} + 2F_{c-4})x_1y_1^4 + (F_{c-4} + 2F_{c-5})y_1^5\} \\ &= \pm\{(F_{c+2} + F_c)x_1^5 + 5(F_{c+1} + F_{c-1})x_1^4y_1 + 10(F_c + F_{c-2})x_1^3y_1^2 + \\ & \quad 10(F_{c-1} + F_{c-3})x_1^2y_1^3 + 5(F_{c-2} + F_{c-4})x_1y_1^4 + (F_{c-3} + F_{c-5})y_1^5\} \\ &= \pm(L_{c+1}x_1^5 + 5L_cx_1^4y_1 + 10L_{c-1}x_1^3y_1^2 + 10L_{c-2}x_1^2y_1^3 + 5L_{c-3}x_1y_1^4 + \\ & \quad L_{c-4}y_1^5) \\ &= z_1^{10} \end{aligned} \quad (1.11)$$

(c は任意の偶数) が得られ, (1.5), (1.9), (1.10) から

$$\begin{aligned}
& u^2 + v^2 + 2uv \\
&= (u + v)^2 \\
&= \pm \{ (F_{c-1} - 2F_c)x_1^5 + 5(F_{c-2} - 2F_{c-1})x_1^4y_1 + 10(F_{c-3} - 2F_{c-2})x_1^3y_1^2 + \\
&10(F_{c-4} - 2F_{c-3})x_1^2y_1^3 + 5(F_{c-5} - 2F_{c-4})x_1y_1^4 + (F_{c-6} - 2F_{c-5})y_1^5 \} \\
&= \pm \{ -(F_{c-2} + F_c)x_1^5 - 5(F_{c-3} + F_{c-1})x_1^4y_1 - 10(F_{c-4} + F_{c-2})x_1^3y_1^2 \\
&- 10(F_{c-5} + F_{c-3})x_1^2y_1^3 - 5(F_{c-6} + F_{c-4})x_1y_1^4 - (F_{c-7} + F_{c-5})y_1^5 \} \\
&= \mp (L_{c-1}x_1^5 + 5L_{c-2}x_1^4y_1 + 10L_{c-3}x_1^3y_1^2 + 10L_{c-4}x_1^2y_1^3 + 5L_{c-5}x_1y_1^4 + \\
&L_{c-6}y_1^5) \\
&= z_1^{10}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

(c は任意の偶数) が得られる.

これらにおいて符号が負の方程式は $-x_1, -y_1$ をそれぞれ x_1, y_1 とおき直せば符号が正の方程式と同形となる.

c は任意の偶数であり, $5 \mid c+1$ または $5 \mid c-1$ となる c が存在する. (1.11) において $c+1 = 5d$ または (1.12) において $c-1 = 5d$ とおくと

$$\begin{aligned}
& L_{5d}x_1^5 + 5L_{5d-1}x_1^4y_1 + 10L_{5d-2}x_1^3y_1^2 + 10L_{5d-3}x_1^2y_1^3 + 5L_{5d-4}x_1y_1^4 + L_{5d-5}y_1^5 \\
&= (z_1^2)^5
\end{aligned} \tag{1.13}$$

(d は奇数) となる. これは (1.1) と同形の方程式である.

(1.2) から $u - v = (\alpha^b - \beta^b)x + (\alpha^{b-1} - \beta^{b-1})y = \sqrt{5}(F_bx + F_{b-1}y)$. さらに $\gcd(x, y) = 1, \gcd(F_b, F_{b-1}) = 1$ から $u - v = 0$ ならば $x = \pm F_{b-1}, y = \mp F_b$ (符号同順) である. このとき $u + v = L_bx + L_{b-1}y = \pm(L_bF_{b-1} - L_{b-1}F_b) = \pm 2(-1)^b F_{(b-1)-b} = \mp 2$ (符号同順) であり, これは $u + v$ が 5 乗数であることに反する. したがって, $u - v \neq 0$. $(u - v)^2 = 5(F_bx + F_{b-1}y)^2$ であるから $(u - v)^2 \geq 5$ であり, さらに (1.2), (1.3) から次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& |L_{5b}x^5 + 5L_{5b-1}x^4y + 10L_{5b-2}x^3y^2 + 10L_{5b-3}x^2y^3 + 5L_{5b-4}xy^4 + L_{5b-5}y^5| \\
&= |(u + v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4)| \\
&= |(u + v)\left\{\frac{1}{2}(u^2 + v^2)(u - v)^2 + \frac{1}{2}(u + v)^2(u - v)^2 + u^2v^2\right\}| \\
&> \left|\frac{5}{2}(u + v)^3\right| \\
&> |(u + v)^2|
\end{aligned}$$

$$= |L_{5d}x_1^5 + 5L_{5d-1}x_1^4y_1 + 10L_{5d-2}x_1^3y_1^2 + 10L_{5d-3}x_1^2y_1^3 + 5L_{5d-4}x_1y_1^4 + L_{5d-5}y_1^5|.$$

したがって、方程式 (1.1) に対して無限降下法が適用される。□

この証明の様にいくつかのステップを有理整数の範囲でパス出来れば単数の問題は生じません。

場合Ⅱ($xyz \equiv 0 \pmod{5}$) については、フィボナッチ数とリュカ数が入れ替わった証明になります。

フェルマー自身が残した証明は指数 4 の場合のみであり「指数が 5 以上の FLT の証明をフェルマーが持っていた」ということに懐疑的な数学者が多数です。実際、Weil は「フェルマーは $x^5 + y^5 = z^5$ の場合すら真面目に考えてみたとは思えない。なぜならフェルマーは種数 1 の曲線以外扱ったことはなく $x^5 + y^5 = z^5$ の表わす曲線は種数 1 ではない。フェルマーがこういう範囲外のことを扱うはずがない。」と述べています。因数分解を深く行う証明については種数以外に単数をどう扱うかという別の重要な問題もあり、フェルマーが後世に示された方法で指数が 5 以上の FLT の証明を得ていた可能性は低いと考えられています。

フェルマーはペル方程式を深く研究していたことが知られており、私自身は「もし、フェルマーが FLT $n=5$ の証明を得ていたとしたらこの証明と同様にペル方程式の理論を用いたものだった」と思っています。

第 12 回の研究集会で私が発表した FLT の証明については「(文献を) 探せばどこかに似たものがあるだろう」という指摘がありました。FLT の指数 5 については文献検索で以下のものを確認し、いくつかの証明を読みました。

Dirichlet 1825 年
 Legendre 1828 年
 Lebesgue 1843 年
 Lamé 1847 年
 Gauss 1863 年
 Gambioli 1901 年
 Warebrusow 1905 年
 Mirimanoff 1909 年
 Rychlik 1910 年
 Hayashi 1911 年

van der Corput 1915 年

Nagell 1958 年

Terjanian 1987 年

これらには2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の基本単数である $(1+\sqrt{5})/2$ (ϕ) が多くの場面で表れます. ϕ をフィボナッチ数, リュカ数を用いた表現に書き換えることは可能であると思われますが, そのような証明はまだ確認できていません.

References

L. E. Dickson, History of Numbers Volume II, Dover Publications(2005), 387-394.

Y. Kawada, Number Theory I, Iwanami Syoten (1978), 129-132.

T. Takagi, Elementary Number Lecture, 2nd Ed, Kyouritu Shuppan (1971), 233-234.

P. Ribenboim, 13 Lectures on Fermat's Last Theorem, Springer(1979), 3, 35-45.

P. Ribenboim, FLT for amateurs, Springer(1999), 49-57.

T. Adachi, Feruma no Daiteiri (Fermat's great theorem), Nihon Hyouronsha (1996), 84.

S. Nakamura, Fibonatti Kazu no Shou-uchuu (A Microcosm of Fibonatti Numbers), Nihon Hyouronsha (2002), 253-257.

多角平方三角数について

片山 真一 徳島大学

1 多角平方三角数の個数について

2020 年の第 18 回フィボナッチ研究集会で「五角平方三角数」について五角数でありかつ平方三角数であるような数は、実際に 1 しかないことを報告した。その時点では、五角平方三角数の決定については、未解決とも解決済みとも確定していない状況でありちゃんと証明を書いた文献もなかった。そこで Baker 理論による方法と楕円曲線の上の整数点の決定に帰着させる方法と 2 次漸化式を満たすペル整数列中の平方数と 2 倍平方数を決定する問題に帰着させる方法の 3 種類の証明を論文 [13] で紹介した。今回は、その後関連する問題について得られた成果について簡単に報告する。

まず多角数の定義を書き出しておく。 n 番目の k 角数 $P_k(n)$ は、一辺の上に n 個の点を配置して全体として正 k 角形の形に点を配置した場合の点の総数のことであり、

$$P_k(n) = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}$$

と表すことができる。次に P_k で k 角数全体を表すものとする。すなわち

$$P_k = \{P_k(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

2 年前の時点で我々が得た結果をまずまとめておこう。我々は、五角平方三角数だけでなくいくつかの (a, b, c) の組について $P_a \cap P_b \cap P_c$ の決定を行い、次のような結果を得た。

定理 1 (片山 [13]) $(a, b, c) = (3, 4, 5), (3, 4, 7), (3, 4, 8), (3, 4, 9), (3, 4, 10), (3, 4, 11), (3, 4, 12), (3, 5, 8)$ および $(4, 5, 8)$ の場合には、 $P_a \cap P_b \cap P_c = \{1\}$ が成立する。

注意 $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ の場合が前回紹介した五角平方三角数の場合である。

このように a, b, c が小さな場合は、 $|P_a \cap P_b \cap P_c| = 1$ という結果しか得られなかった。そこで $|P_a \cap P_b \cap P_c| > 1$ となる場合があるかということや $|P_a \cap P_b \cap P_c|$ を a, b, c で定まる量で評価できるかを考えることは、共に次に扱うべき自然な問いかけであろう。

まず最初に Euler が、平方三角数、すなわち集合 $P_3 \cap P_4$ を考えたのは、ペル方程式の研究の原動力の一つでもあった。ここでその原点の場合の基本的なことを整理し直しておこう。

定理 2 (片山 [14] 定理 2.3) $a \neq b$ とすると

$$|P_a \cap P_b| < \infty \iff (a-2)(b-2) = \square \text{ ただし } (a, b) = (3, 6) \text{ の場合を除く。}$$

注意) 上で $\square$ は平方数であることを示す記号である。また例外の $(a, b) = (3, 6)$ は, $P_3(2n-1) = \frac{(2n-1)(2n)}{2} = \frac{n(4n-2)}{2} = P_6(n)$ なので $P_6 \subset P_3$ であり $|P_3 \cap P_6| = |P_6| = \infty$ となる。この場合がこの命題の唯一の例外である。

そこでこの例外の場合を除いて, すなわち $6 \notin \{a, b, c\}$ としておくと次の一般的な結果に整理できる。

定理 3 (片山 [14] 定理 2.4) $(a-2)(b-2) \neq \square, (b-2)(c-2) \neq \square, (c-2)(a-2) \neq \square$ と仮定する。このとき $|P_a \cap P_b| = |P_b \cap P_c| = |P_c \cap P_a| = \infty$ であるが $|P_a \cap P_b \cap P_c| < \infty$ が成立する。

さらに $|P_a \cap P_b \cap P_c|$ の上からの評価が, M. A. Bennett [4] の連立のペル型方程式の解の評価式を使って次のように得られる。

定理 4 (片山 [14] 定理 2.5) $U = (b-2)(b-a)(4-(b-2)(a-2))$ とし $V = (b-2)(b-c)(4-(b-2)(c-2))$ とおく。このとき次の上からの評価を得る。

$$|P_a \cap P_b \cap P_c| \ll 2 \min\{\omega(U), \omega(V)\} \log(|U| + |V|),$$

ここで $\omega(t)$ は, 整数 t の相異なる素因数の数を表す。

これにより自然な問いの一つの $|P_a \cap P_b \cap P_c|$ の上からの評価については, 一応の結果を得ることができた。

次に二つ目の問題について, 自明な場合ではあるが, $|P_a \cap P_b \cap P_c| \geq 2$ となる場合が無限に存在することを注意しておこう。

Pell number (ペル数) p_k は, $k \geq 1$ に対して, 下記の漸化式を満たす数列である。

$$p_0 = 0, p_1 = 1, \text{ and } p_{k+1} = 2p_k + p_{k-1}$$

すなわち,

$$\{p_k\} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 541, 13860, \dots\} \text{ (OEIS A000129),}$$

であるが, 平方三角数は, 上の k を使って, $(p_{2k}/2)^2$ と表されることが知られている。ここで c を $c = (p_{2k}/2)^2$ とすれば, 無限系列 $P_3 \cap P_4 \cap P_c$ について $\{1, c\} \subset P_3 \cap P_4 \cap P_c$ となるので次の結果が得られる。

定理 5

$$2 \leq |P_3 \cap P_4 \cap P_c| \ll 2\omega(2(c-2)) \log(4 + (c-2)^2)$$

ここで $\omega(t)$ は t の相異なる素因数の数を表す。

最後にこの系列とは異なる場合で $|P_a \cap P_b \cap P_c| > 1$ となる例を挙げておく。実は十三角平方三角数，すなわち $(a, b, c) = (3, 4, 13)$ の場合がその一つである。実際にすべての十三角平方三角数は，以下のように求めることができ $|P_3 \cap P_4 \cap P_{13}| = 2$ であることが示される。まず次の同値関係を思い出しておく。

$$P_3(m) = P_4(n) = P_{13}(\ell) \iff \frac{m(m+1)}{2} = n^2, \frac{\ell(11\ell-9)}{2} = n^2.$$

これにより

$$(2m+1)^2 = 8n^2 + 1, (22\ell-9)^2 = 88n^2 + 81.$$

$$88^2 n^2 (22\ell-9)^2 (2m+1)^2 = 176n^2 (176n^2 + 22)(176n^2 + 162).$$

$Y = 88n(22\ell-9)(2m+1)$, $X = 176n^2 + 61$ とおくことにより次のモジュラー楕円曲線を得る。

$$E : Y^2 = X^3 + X^2 - 7721X + 24079.$$

ここで $\frac{m(m+1)}{2} = n^2 = \frac{\ell(11\ell-9)}{2} \in P_3 \cap P_4 \cap P_{13}$ には，この楕円曲線上の整数点 $(176n^2 + 61, 88n(22\ell-9)(2m+1)) \in E(\mathbb{Z})$ が対応している。この曲線は，Cremona ラベル 73920cc2 の楕円曲線で，モーデルベイユ群 $E(\mathbb{Q})$ は， $\mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ と同型となる。 $E(\mathbb{Q})$ の無限位数の生成元は，次の2元である。

$$\mathbb{Z} = \langle P_1 = (25, 252) \rangle \text{ および } \mathbb{Z} = \langle P_2 = (34, 135) \rangle.$$

有限位数の群（クラインの四元数群）の生成元は，次の2元となる。

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle P_3 = (39, 0) \rangle \text{ と } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle P_4 = (61, 0) \rangle.$$

モーデルの定理により有限個である整数点は，以下の通りである。

$$\begin{aligned} E(\mathbb{Z}) = \{ & (-101, 0), (-89, \pm 480), (-86, \pm 525), (-71, \pm 660), (-38, \pm 683), \\ & (-5, \pm 528), (7, \pm 432), (25, \pm 252), (34, \pm 135), (39, 0), (61, 0), (67, \pm 168), \\ & (79, \pm 360), (109, \pm 840), (237, \pm 3432), (259, \pm 3960), (399, \pm 7800), (655, \pm 16632), \\ & (1411, \pm 52920), (1789, \pm 75600), (6397, \pm 511632), (112399, \pm 3768300) \}. \end{aligned}$$

この中で十三角平方三角数に対応するものを探すと， $X = 237 = 176 \times 1^2 + 61$ および $X = 6397 = 176 \times 6^2 + 61$ ，すなわち， $n = 1$ or $n = 6$ のみであることがわかる。

定理 6 十三角平方三角数は 1 と 36 である。

2 今後の問題

問題 1) $|P_a \cap P_b \cap P_c| = 1$ となる (a, b, c) は無限に存在するか？

今のところ 1 しかない場合が多く見つかったているが，無限に存在するかどうかについては全く分かっていない。

問題 2) k を任意の自然数とするとき $|P_a \cap P_b \cap P_c| = k$ となる (a, b, c) は存在するか？

今のところ我々は $k = 1$ および $k = 2$ の場合しか見つけていない。またそれぞれの k に対して $|P_a \cap P_b \cap P_c| = k$ となる (a, b, c) は無限に存在するかということや、出来得るならより詳細な問題である $|P_a \cap P_b \cap P_c|$ の値の分布がどうなっているかも興味のある所であるが、まったく手をつけることは出来ていない。

問題 3) m が任意の整数値をとる場合に、 $P_a(m) = \frac{m((a-2)m - (a-4))}{2}$ と表せる数のことを m 番目の一般化された a 角数と呼ぶ。一般化された a 角数全体の集合を GP_a と表すとき、 $GP_a \cap GP_b \cap GP_c$ についても同様の問題を考えることができる。まず $0, 1 \in P_a$ なので常に $|GP_a \cap GP_2 \cap GP_3| \geq 2$ である。この問題については、 $|P_a \cap P_b \cap P_c| = 1$ であるが $|GP_a \cap GP_b \cap GP_c| = 3$ である次のような例が見つかっている。

例 7 $(a, b, c) = (4, 5, 9)$ とする。このとき

$$GP_4(m) = GP_5(n) = GP_9(\ell) \iff (m, n, \ell) = (10, -8, -5), (0, 0, 0), (1, 1, 1).$$

参考文献

- [1] W. S. Anglin, The Queen of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995.
- [2] W. S. Anglin, Simultaneous Pell equations, *Math. Comput.*, **65**, No. 213 (1996), 355-359.
- [3] A. Baker and H. Davenport, The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$, *Quat. J. Math. Oxford* 2(2), **20** (1969), 127-137.
- [4] M. A. Bennett, On the number of solutions of simultaneous Pell equations. *J. Reine Angew. Math.*, **498** (1998), 173-199.
- [5] M. A. Bennett, M. Cipu, M. Mignotte and R. Okazaki, On the number of solutions of simultaneous Pell equations II, *Acta Arith.*, **122**, No. 4 (2006), 407-417.
- [6] J. H. E. Cohn, On square Fibonacci numbers, *J. Lond. Math. Soc.*, **39** (1964), 537-540.
- [7] J. H. E. Cohn, The Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$, II, *Acta Arith.*, **59** (1997), 401-403.
- [8] J. E. Cremona, Algorithms for Modular Elliptic Curves (2nd ed.), Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.
- [9] E. Deza, Figurate Numbers, World Scientific Publishing, 2012.

- [10] L. E. Dickson, History of the theory of numbers vol. II, Dover Publications, 1970[1920].
- [11] J. Gebel, A Pethő and H. Zimmer, Computing integral points on elliptic curves, *Acta Arith.*, **68** (1994), 171-192.
- [12] S. Katayama, Several methods for solving simultaneous Fermat-Pell equations, *J. Math. Tokushima Univ.*, **33** (1999), 1-14.
- [13] S. Katayama, N. Furuya and Y. Nishioka, On Polygonal Square Triangular Numbers, *J. Math. Tokushima Univ.*, **54** (2020), 1-12.
- [14] S. Katayama, On Polygonal Square Triangular Numbers II, *J. Math. Tokushima Univ.*, **55** (2021), 1-10.
- [15] W. Ljunggren, Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und reinbiquadratischer Zahlkörper, *Oslo Vid. Akad. Strifter*, **1**, No. 12 (1936).
- [16] L. J. Mordell, Diophantine Equations, Academic Press, London and New York 1969.
- [17] P. Ribenboim and W. L. McDaniel, The squares in Lucas sequences, *J. Number Theory*, **58** (1996), 104-123.
- [18] J. H. Rickert, Simultaneous rational approximations and related diophantine equations, *J. Math. Cambridge Philos. Soc.*, **113** (1993), 461-472.
- [19] J. H. Silverman, Friendly Introduction to Number Theory, Addison Wesley, 2012.
- [20] J. H. シルヴァーマン, はじめての数論 (訳: 鈴木治郎 ([19] の日本語訳)), 丸善出版 2014.
- [21] 高木貞治, 初等整数論講義 (第 2 版), 共立出版 1971.
- [22] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org>(accessed September 28, 2022).
- [23] M. Waldschmidt, A lower bound for linear forms in logarithms, *Acta Arith.*, **37** (1980), 257-283.
- [24] Wolfram Mathworld, Pentagonal Triangular Number, <https://mathworld.wolfram.com/PentagonalTriangularNumber.html>(accessed September 28, 2022).

$\sqrt{5}$ の求め方 (1)

1 はじめに

黄金比 ϕ は、Fibonacci 数の漸化式 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ の特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解の一つであり、具体的には $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ である。また $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ でもある [1][2][3][4]。黄金比 ϕ を計算機で求めるためには、通常次の手順による。

- (1.) $\sqrt{5}$ を求める。
- (2.) 1 を足す。
- (3.) 2 で割る。

このうち、1 を足すステップと 2 で割るステップは、内部で 2 進数で計算する計算機では速く処理できる。そこで計算の興味を中心は、 $\sqrt{5}$ を求めるステップになる。今回、モンテカルロ法を用いて $\sqrt{5}$ と ϕ を求めるための Windows 用のアプリを作成したので紹介する。

2 モンテカルロ法

定積分の計算法の一つに、モンテカルロ法が知られている [5][6][7][8]。2 変数の場合、 $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$ の範囲で定義された関数 $f(x_1, x_2)$ の積分

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

を求めるために、 $[0, 1)$ で一様に分布する (準) 乱数 ξ_1, ξ_2 を求め、 $f(\xi_1, \xi_2)$ を計算する。これを N 回繰り返して、その平均

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$$

を I の推定値とする。このとき $E(\bar{f}) = I$ 故、 N が大きければ大数の法則により $\bar{f}$ は I にほぼ等しくなる。

2.1 円周率の例

モンテカルロ法でよく知られているのは、円周率の計算である。最初に紹介するのは、当たりはずれのモンテカルロ法 (Hit-or-miss Monte Carlo method) として知られている。図 1 の青色の部分の面積が $\pi/4$ に等しいことから、この面積 S を試行回数 N とヒットした青の点の数 n とから $S = \frac{n}{N}$

にて求め $\pi = 4S$ とする。当たりはずれのモンテカルロ法では、

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1^2 + x_2^2 \leq 1) \\ 0 & (x_1^2 + x_2^2 > 1) \end{cases}$$

として

$$S = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

とする。図 1 の例では、20000 回の試行に対して 15733 回ヒットし、 π の推定値は $4S = 4 \times \frac{15733}{20000} = 3.1466$ となった。

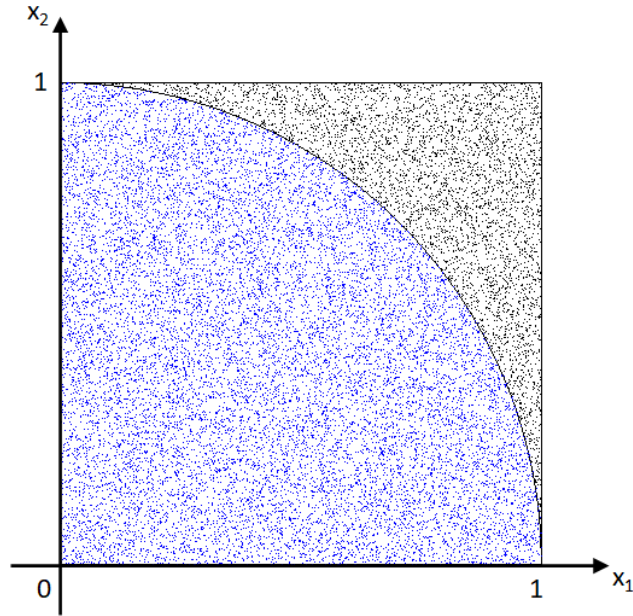


図 1 当たりはずれのモンテカルロ法

別の方法で知られているのは、標本平均モンテカルロ法あるいは初歩的モンテカルロ法 (Crude Monte Carlo method) である。 $\int_0^1 f(x_1) dx_1 = \pi/4$ となる $f(x_1)$ に対し、

$$S = \int_0^1 f(x_1) dx_1$$

を求め $\pi = 4S$ とする。図 2 に例を示す。区間 $[0, 1)$ の N 個の一様乱数 ξ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を求め、 $f(\xi_i)$ の平均を求めて推定値とする。次に示すのは 20000 回の試行に対し、(a) では $3.152901069 \pm 0.012273772$ 、(b) では $3.141601148 \pm 0.000016010$ となった。 $f(x)$ によって精度が異なっている。一般に定義域全体で $f(x)$ の変動が少ないほうが高精度になる。また図 2 では、関数の値をランダムな色で示している。

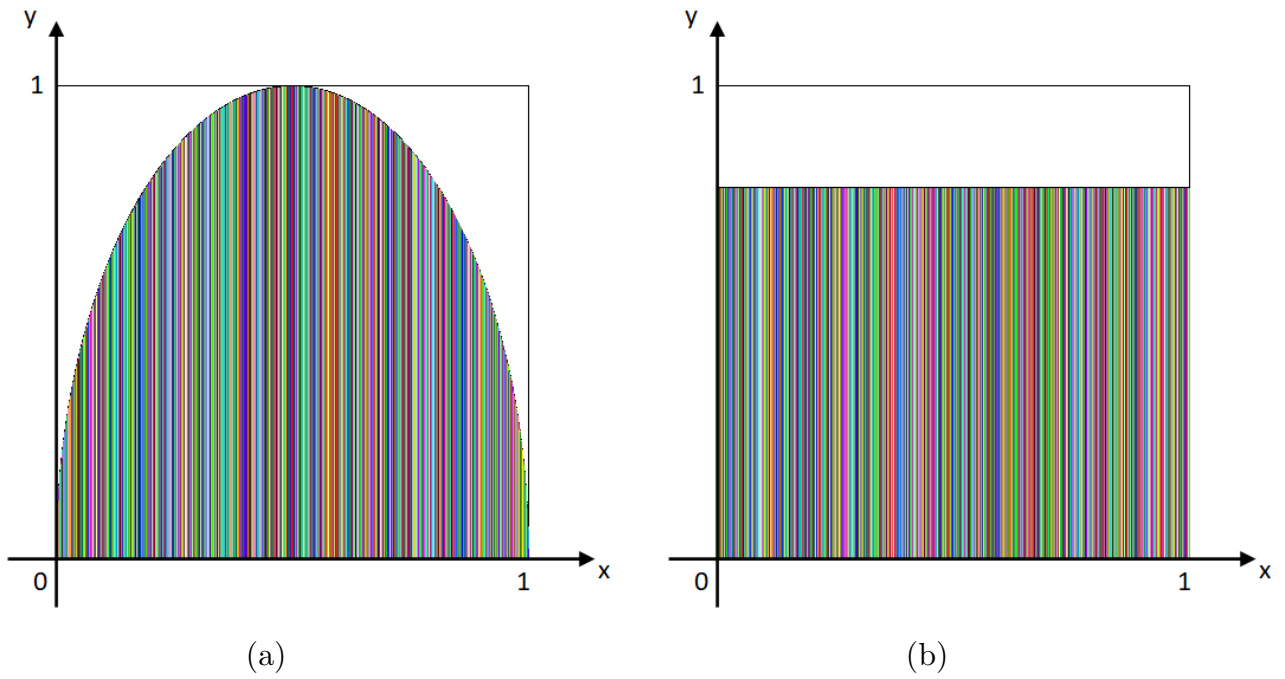


図 2 標本平均モンテカルロ法 (a) $f(x) = 2\sqrt{x(1-x)}$, (b) $f(x) = \frac{11}{14} - \frac{x^4(1-x)^4}{4(1+x^2)}$

最後に、 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$ となる $f(x)$ の例 [8] を挙げておく。

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$	$f(x) = \frac{1}{2(x^2 + (1-x)^2)}$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2(3+x^2)}$
$f(x) = 2\sqrt{x(1-x)}$	$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}$
$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \frac{4(x-1)}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$	$f(x) = \frac{11}{14} - \frac{x^4(1-x)^4}{4(1+x^2)}$
$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8(x^2 - x + 1)}$	$f(x) = \frac{355}{452} - \frac{x^8(1-x)^8(25 + 816x^2)}{12656(1+x^2)}$

2.2 モンテカルロ法による $\sqrt{5}$ 、黄金比 ϕ の計算

モンテカルロ法で $\sqrt{5}$ 、黄金比 ϕ を求められることは、円周率の場合ほど知られていない。 $\sqrt{5}$ や黄金比 ϕ を求めるためには、

$$S = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる関数 $f(x)$ を用いて $\sqrt{5} = 5S$ を求め、次いで $\phi = \frac{1+5S}{2}$ を求めればよい。

3 モンテカルロ法の高精度化

モンテカルロ法の精度を向上させるためには、試行回数 N を増やす必要がある。しかしながら(準)乱数を用いない限り試行回数を N 回とすれば、その誤差は $O(N^{-1/2})$ である。このことは試行回数を 100 倍しても誤差は $1/10$ にしかならないことを示している。そのため、効率よく高精度化する手法が求められ、種々開発されている。ここでは、標本平均モンテカルロ法に容易に組み込むことができる「主部の分離」と「加重サンプリング」の 2 つの手法を紹介する。

3.1 主部の分離

$y = f(x)$ に対し、 $f(x)$ から別の (積分を計算しやすいと) 分かっている近似関数 $g(x)$ を差し引くことを考える。この時、 $g(x) \sim f(x)$ となるように $g(x)$ を選ぶ。ここで、

$$S' = \int_0^1 g(x) dx$$

とすると、 $\xi^{(i)}$ を $[0, 1)$ で一様に分布する乱数とすると、

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(f(\xi^{(i)}) - g(\xi^{(i)}) \right) + S'$$

で求められる。今回、 $g(x)$ として次の 3 種の関数を選定した。

$$\text{関数 1} \quad g(x) = c_0 + (c_1 + (c_2 + c_3 \cdot x)x)$$

$$\text{関数 2} \quad g(x) = c_0 + c_1 \cdot x(1 - x) + c_2 \cdot x^2(1 - x)^2$$

$$\text{関数 3} \quad g(x) = \frac{c_0}{x + c_1} + c_2 \cdot x + c_3$$

とした。なお、全ての係数 c_0, c_1, c_2, c_3 は最小二乗法により求めた。

表 2 に 84 種の $f(x)$ に対する近似関数 $g(x)$ 並びにその積分 $S' = \int_0^1 g(x) dx$ をまとめた。

3.2 加重サンプリング

加重サンプリングによる高精度化手法もよく知られている。 ξ を区間 $[0, 1)$ で確率密度 $\rho(x)$ で分布する乱数とする。 $\rho(x)$ は確率なので、

$$\int_0^1 \rho(x) dx = 1$$

となることに注意する。次に

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\rho(x)} \rho(x) dx$$

と変形すると、期待値 E_ρ は、

$$E_\rho [f(\xi)/\rho(\xi)] = S$$

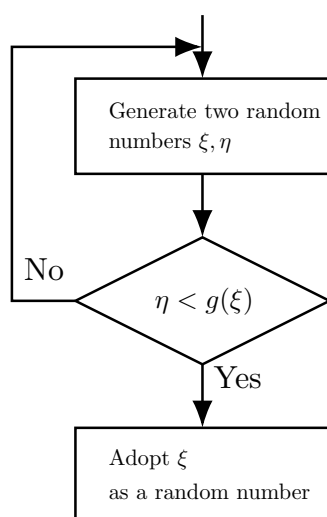
となる。 E_ρ は、

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\xi^{(i)})}{\rho(\xi^{(i)})}$$

により計算できる。ここで $\rho(x)$ は、普通 $\frac{\rho(x)}{|f(x)|} \sim \text{const.}$ となるように選定する。 $S' = \int_0^1 g(x)dx$ だったので、 $\rho(x) = \frac{g(x)}{S'}$ とするとよいことが分かる。このとき、

$$S = \frac{S'}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\xi^{(i)})}{g(\xi^{(i)})}$$

となる。なお、 $\xi^{(i)}$ は棄却法 (rejection method) により生成できる。棄却法のフローチャートを次に示す。



4 $\int_0^1 f(x)dx = 1/\sqrt{5}$ となる関数

この節では、モンテカルロ法で $\sqrt{5}$ 並びに黄金比 ϕ を求めるために必要な $\int_0^1 f(x)dx = 1/\sqrt{5}$ となる関数の求め方を紹介する。また $0 \leq x \leq 1$ で、 $0 \leq f(x) \leq 1$ となる関数を選定した。

4.1 三角関数その 1, Weierstraß置換

ここでは、次の定積分について考察する。

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

また、 $\int_0^\pi f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ の場合は、倍角の公式を用いて積分の範囲を 0 から $\pi/2$ に直せばよい。

高校の数学で習ったように、 $t = \tan \frac{\theta}{2}$, $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$ と置換すると、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \int_0^1 f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

となる。この置換を Weierstraß置換という。

4.1.1 Weierstraß置換の例。関数番号 No.1

ここでは、岩波数学公式 I[9, p245] に記述がある次の式の例を示す。 $a > 0$ として

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 + \sin^2 x} = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2 + 1}}$$

より、

$$f(x, a) = \frac{2a}{\pi(a^2 + \sin^2 x)}$$

とする。 $a = 2$ の場合を考える。

$$f(x, 2) = \frac{4}{\pi(4 + \sin^2 x)}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(x, 2) dx = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ここで、Weierstraß置換すると、

$$f(t, a) = \frac{4a(t^2 + 1)}{\pi(a^2 t^4 + 2(a^2 + 2)t^2 + a^4)}$$

が得られる。特に $a = 2$ のとき、

$$f(t, 2) = \frac{2(t^2 + 1)}{\pi(t^4 + 3t^2 + 1)}$$

$$\int_0^1 f(t, 2) dt = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる。また近似式 $g(x)$ と定積分の値は、次のようになる。

$$g(x) = 0.6419088692 + (-0.1646122553 + (-0.7036993693 + 0.4857061138x)x)x$$

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.4464628136$$

グラフは次のとおりである。近似関数 $g(x)$ は点線で描かれているが、重なっていて識別できない。

この文書の最後の表 2 に、他の例も併せてまとめている。

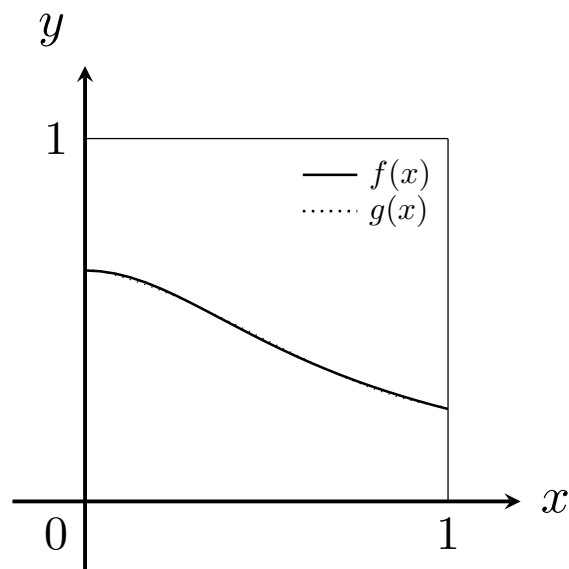


図 3 Weierstraß置換を利用した関数の例

4.2 三角関数その 2。関数番号 No.27

例を挙げて示すことにする。次の定積分

$$\int_0^1 \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi x}{10} dx = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

より、

$$f(x) = \frac{2\pi}{25} \cos \frac{\pi x}{10} + \frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となることが確認できる。また近似式 $g(x)$ と定積分の値は、次のようになる。

$$g(x) = 0.4513339895 - (0.0000907951 + 0.0122246476x)x$$

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.4472137094$$

グラフは次のとおりである。近似関数 $g(x)$ は点線で描かれているが、重なっていて識別できない。

この文書の最後の表 2 に、他の例も併せてまとめている。

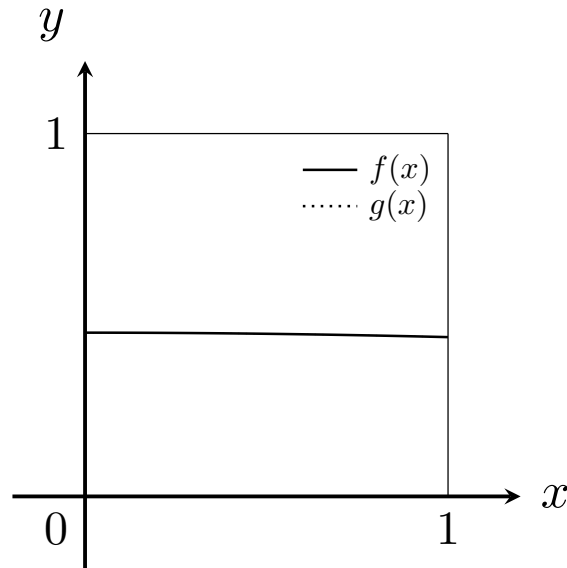


図 4 三角関数を利用した関数の例

4.3 平方根を用いた例

モンテカルロ法で $\sqrt{5}$ を求めるのに被積分関数に平方根を用いるのは本末転倒の感があるが、例示してみる。この文書の最後の表に、他の例も併せてまとめている。

4.3.1 例。関数番号 No.46

$f(x, a) = \frac{1}{a^2 + 1} \left(\frac{1}{2\sqrt{x + a^2}} + a \right)$ を考察する。ただし $a > 0$ とする。次の定積分を確認することが出来る。

$$\int_0^1 f(x, a) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

特に $a = 2$ の時、

$$f(x, 2) = \frac{1}{10\sqrt{x + 4}} + \frac{2}{5}$$

$$\int_0^1 f(x, 2) dx = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる。また近似式 $g(x)$ と定積分の値は、次のようになる。

$$g(x) = 0.4498617338 - 0.0052668405x$$

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.4472283136$$

グラフは次のとおりである。近似関数 $g(x)$ は点線で描かれているが、重なっていて識別できない。

この文書の最後の表 2 に、他の例も併せてまとめている。

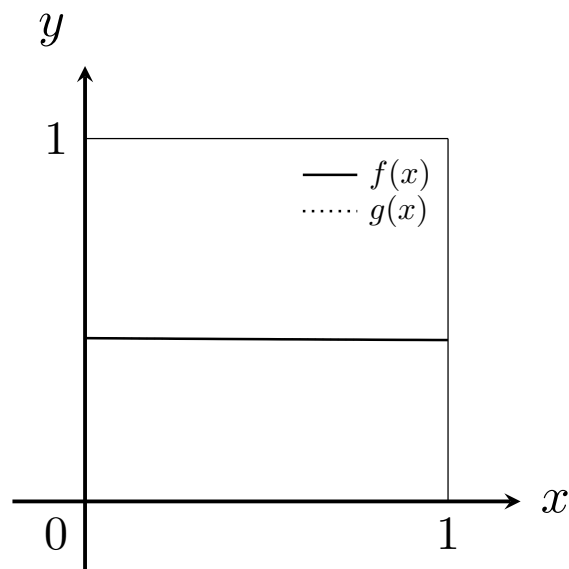


図5 平方根を利用した関数の例

5 疑似乱数 (一様乱数)、低食い違い量列 (準乱数) の作成法

モンテカルロ法を実行するためには、疑似乱数 (一様乱数) もしくは低食い違い量列 (準乱数) を用意しなければならない。これらをコンピュータに実装するための方法が知られている。

5.1 システムの乱数

今回、Windows 用のアプリを、Embarcadero 社の RADstudio (version 10.2) において、Delphi 言語を用いて開発した。この統合開発環境に組み込みの乱数をそのまま利用した。

5.2 乗積合同法

参考文献 [6, p.33][10][11] より、次に示す方法に従って疑似乱数 $u_n \in [0, 1)$ を生成した。

$$\begin{aligned} x_n &\equiv 5^{11} x_{n-1} \pmod{2^{30}} \\ u_n &= x_n / 2^{30} \end{aligned}$$

5.3 Mersenne Twister, Xorshift*

疑似乱数の生成アルゴリズムとして、Mersenne Twister や Xorshift がよく知られており、インターネット上のリソースを利用することができる。

5.3.1 Mersenne Twister

松本眞・西村拓士（アルファベット順）により 1996 年から 1997 年に渡って 開発された疑似乱数生成アルゴリズムである [12]。Mersenne Twister の特徴は、次のとおりである。

- 種々のプログラミング言語で実装されていて、ホームページ [12] からダウンロードできる。
- 従来にない長周期, 高次元均等分布を持つ。（周期が 24 番目のメルセンヌ素数 $2^{19937} - 1$ で、623 次元超立方体の中に 均等に分布する。）
- 出力の中のすべてのビットが統計的に十分ランダムである。
- メモリ効率が良い。

今回ホームページより Pascal 言語版をダウンロードし、アプリに組み込んだ。

5.3.2 Xorshift*

Xorshift は、George Marsaglia 氏が開発した疑似乱数生成法である。「ビットシフトしてから元の値と XOR をとる」という非常に簡単な処理をたった三回行うだけの非常にシンプルな処理で、高速に疑似乱数を生成できる特徴がある。今回採用したのは、xorshift64*というアルゴリズム [13][14] で、周期が $2^{64} - 1$ である。Mersenne Twister よりも周期は短いものの実用的な長さは有しており、高速であるために広く用いられている。

5.4 離散時間力学系

区間 $[0, 1]$ において不変測度 $\rho(x) = 1$ 、すなわち初期値 x_0 ($x_0 \in [0, 1)$) より $x_1, x_2, x_3, \dots$ を求めた時一様乱数が得られる写像として、ベルヌーイシフト写像並びにテント写像がよく知られている [15]。

ベルヌーイシフト写像を示す。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \pmod{1} \\ &= \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n < 1/2) \\ 2x_n - 1 & (1/2 \leq x_n < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

次にテント写像を示す。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - |1 - 2x_n| \\ &= \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n < 1/2) \\ 2 - 2x_n & (1/2 \leq x_n < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

これらの写像のグラフを図 6 に示す。

ベルヌーイシフト写像とテント写像は、コンピュータにて一様乱数を作成するには都合が悪い。これらの写像において、初期値 x_0 ($x_0 \in [0, 1)$) が (無限の精度を有する) 無理数の場合、決して循環しない周期無限大の非周期軌道となる。しかしながらコンピュータに入力できる値は有限の精度しか持たえない。 x_0 を二進数で

$$x_0 = 0.y_1y_2y_3 \dots y_n0000000 \dots$$

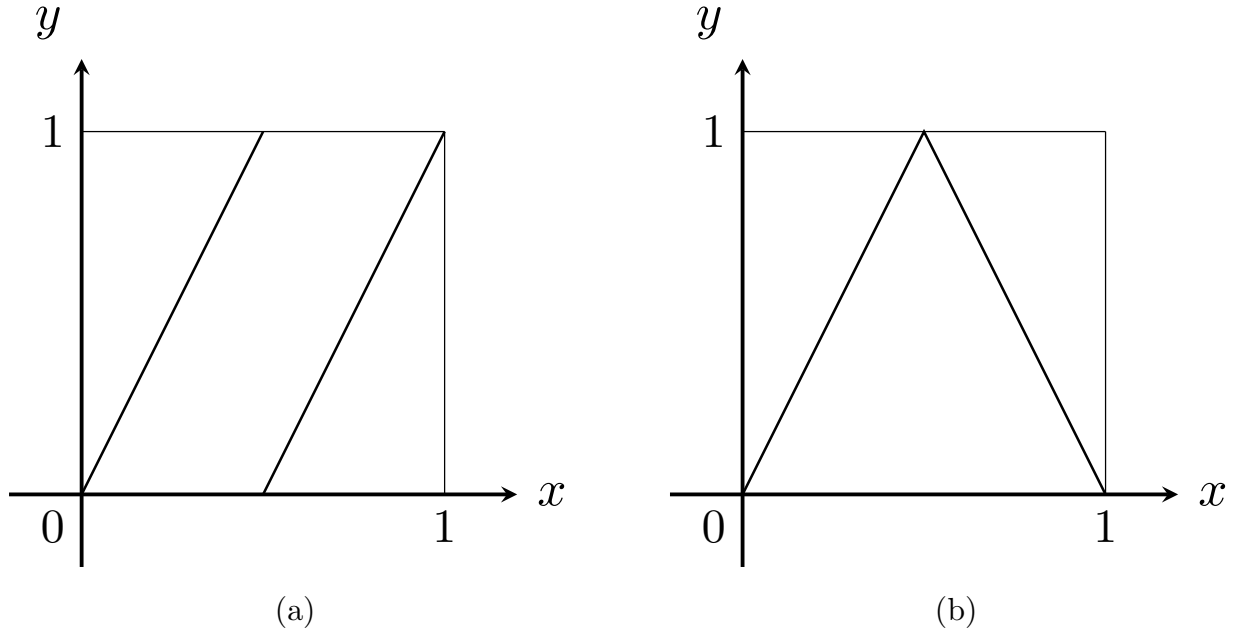


図 6 不変測度が $\rho(x) = 1$ となる写像の例 (a) ベルヌーイシフト写像 (b) テント写像

と表した場合、ベルヌーイシフト写像においては、

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0 \pmod{1} \\ &= 0.y_2y_3 \dots y_n 0000000 \dots \end{aligned}$$

またテント写像においては、 $x_0 \in [0, 0.5)$ の場合、

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0 \\ &= 0.y_2y_3 \dots y_n 0000000 \dots \end{aligned}$$

また $x_0 \in [0.5, 1)$ の場合、

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_0 \\ &= 10.0 - 1.y_2y_3 \dots y_n 0000000 \dots \text{(2進数表記)} \\ &= 0.(1 - y_2)(1 - y_3) \dots (1 - y_n) 0000000 \dots \end{aligned}$$

となる。ここで $(1 - y_i)$ は y_i のビット反転を表す。

いずれにしても、 x_1 の有効精度は 1 ビット減ることになり、結局 $x_i = 0$ ($i \geq n$) となる。この問題に対し、不変測度が $\rho(x) = 1$ を保持したまま、有効数字が有限桁の初期値 x_0 を用いても周期軌道に落ち込まない写像が知られている [16][17][18]。

最初に紹介するのは、ベルヌーイシフト写像に関連して構成した次の写像である。

$$x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{2x_n} & (0 \leq x_n < 1/2) \\ 1 - \sqrt{2(1 - x_n)} & (1/2 \leq x_n < 1) \end{cases} \quad (1)$$

この写像の図を図 7 に示す。

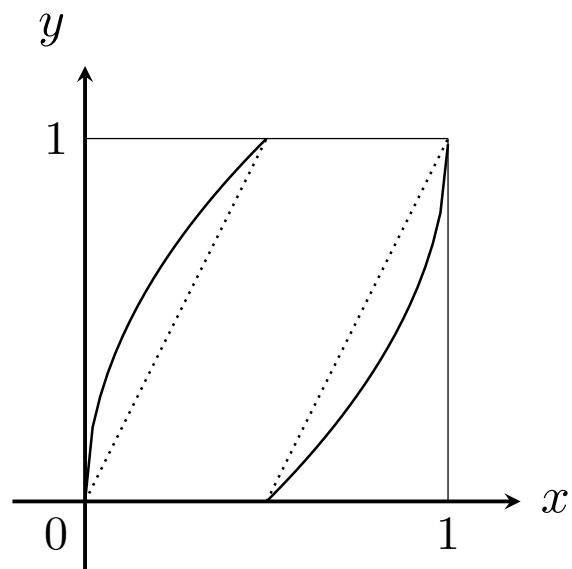


図 7 ベルヌーイシフト写像に関連して構成した写像

次に示すのは、テント写像に関連して構成した次の写像である。

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+16x_n}-1}{2} & (0 \leq x_n < 1/2) \\ \frac{3-\sqrt{16x_n-7}}{2} & (1/2 \leq x_n < 1) \end{cases} \quad (2)$$

この写像の図を図 8 に示す。

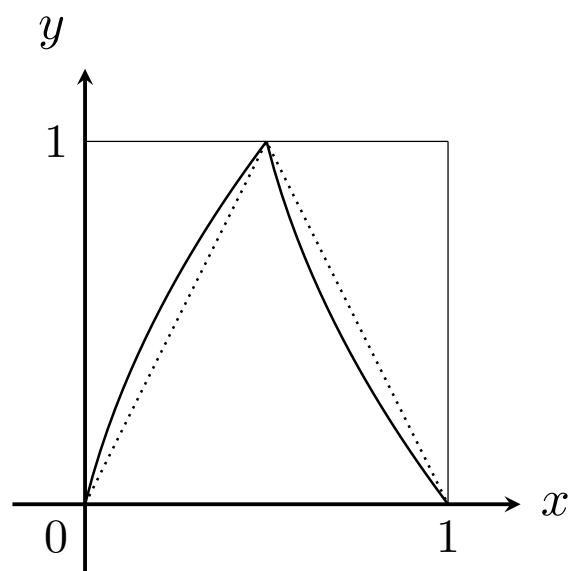


図 8 テント写像に関連して構成した写像

次に示すのは、テント写像に関連して構成した別の写像である。条件分岐を用いず、単一の式で表現することができる。

$$x_{n+1} = 1 - \left| 1 - \frac{x_n(3 + x_n)}{1 + x_n} \right| = 1 - \left| x_n + 1 - \frac{2}{x_n + 1} \right| \quad (3)$$

この写像の図を図 9 に示す。

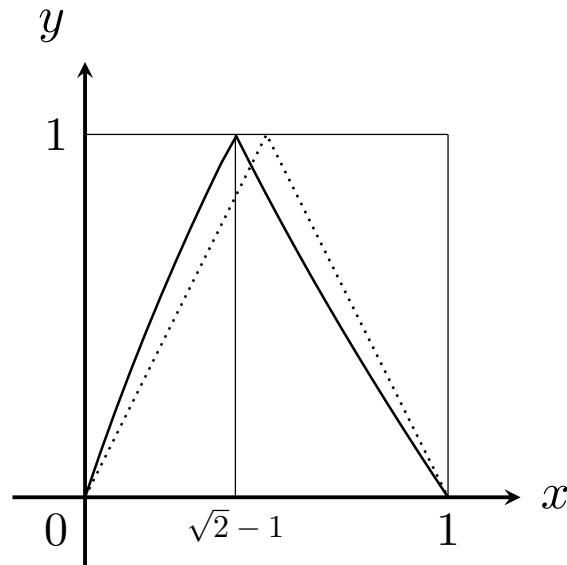


図 9 テント写像に関連して構成した別の写像

5.5 低食い違い量列 (準乱数)

モンテカルロ法において、一様乱数 (疑似乱数) ではなく低食い違い量列 (超一様分布列)[19] を用いる方法がよく知られており、準モンテカルロ法と呼ばれている。低食い違い量列を用いることで、少ない試行数で精度を上げられる場合がある。

低食い違い量列で最も基礎的なのは、1 次元の列の一つである van der Corput 列である。base が b の場合、自然数を b 進数で表しその逆読みを行って構成する。base が 2、3、5 の場合の例を次の表 1 に示す。

Delphi 言語 (Object Pascal 言語) にて記述した関数のリストを次に例示する。

Listing 1 van der Corput sequence

```

1 function vanderCorput(i:Integer;base:Integer):Double; // van der Corput sequence
2 var
3   h, factor, f: Double;
4 begin
5   h := 0.0;
6   factor := 1.0 / base;
7   f := factor;
8   while i > 0 do
9     begin
10      h := h + (i mod base) * factor;
11      i := Floor(i / base);
12      factor := factor * f;
13    end;
14   Result := h;
15 end;
```

表 1 van der Corput 列の例

10 進数	<i>base</i> = 2		<i>base</i> = 3		<i>base</i> = 5	
	2 進数	vdC 列	3 進数	vdC 列	5 進数	vdC 列
1	1	0.1 ₂	1	0.1 ₃	1	0.1 ₅
2	10	0.01 ₂	2	0.2 ₃	2	0.2 ₅
3	11	0.11 ₂	10	0.01 ₃	3	0.3 ₅
4	100	0.001 ₂	11	0.11 ₃	4	0.4 ₅
5	101	0.101 ₂	12	0.21 ₃	10	0.01 ₅
6	110	0.011 ₂	20	0.02 ₃	11	0.11 ₅
7	111	0.111 ₂	21	0.12 ₃	12	0.21 ₅
8	1000	0.0001 ₂	22	0.22 ₃	13	0.31 ₅
9	1001	0.1001 ₂	100	0.001 ₃	14	0.41 ₅
10	1010	0.0101 ₂	101	0.101 ₃	20	0.02 ₅
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

この van der Corput 列を用いて Halton 列 $\mathcal{S}_{2,3}$ と Hammersley 列 $\mathcal{H}_2$ を構成し、アプリに組み込んだ。Halton 列 $\mathcal{S}_{2,3}$ は、平面上に $(vdC(i, 2), vdC(i, 3)) \in [0, 1)^2, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ の点を取り、Hammersley 列 $\mathcal{H}_2$ は、平面上に $(i/N, vdC(i, 2)) \in [0, 1)^2, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ の点を取る。Hammersley 列を用いた結果のスクリーンショットを図 11 に後述する。

5.6 一様乱数、低食い違い量列 (準乱数) のまとめ

モンテカルロ法に用いることが可能な、いくつかの疑似乱数・低食い違い量列の生成法に関し、まとめてアプリに実装した。

また紙幅の関係上省略するが、今回用いた疑似乱数の統計的検定として、頻度検定 (frequency test)[5][6] を実施した。2000 個の疑似乱数を生成し、区間 $[0, 1)$ を 100 等分したヒストグラムにまとめて、一様分布の「当てはまりの良さ」を χ^2 検定した。いずれの疑似乱数も一様分布するとみなしてよいことが確認できた。

6 アプリの作成

以上紹介した事項をもとに、 $\sqrt{5}$ と黄金比 ϕ を推定するモンテカルロ法のアプリを作成した。作成は Embarcadero 社の統合開発環境である RADstudio の Delphi 言語を用いて実施した。

ここでは、いくつかのスクリーンショットを示して説明することにする。最初に紹介するのは「当たりはずれのモンテカルロ法」のアプリである。画面中央の試行回数を入力し、関数番号 (1 から 84) を選択ののち、画面右側の「クリア」ボタンを押下後、「計算実行」を押下すると、画面左側のキャンバスに点が打たれ、ヒットした (青色の) 点の数と試行回数をもとに、 $\sqrt{5}$ とその 95% 信頼区間、ま

た黄金比 ϕ の推定値を表示する (図 10 参照)。

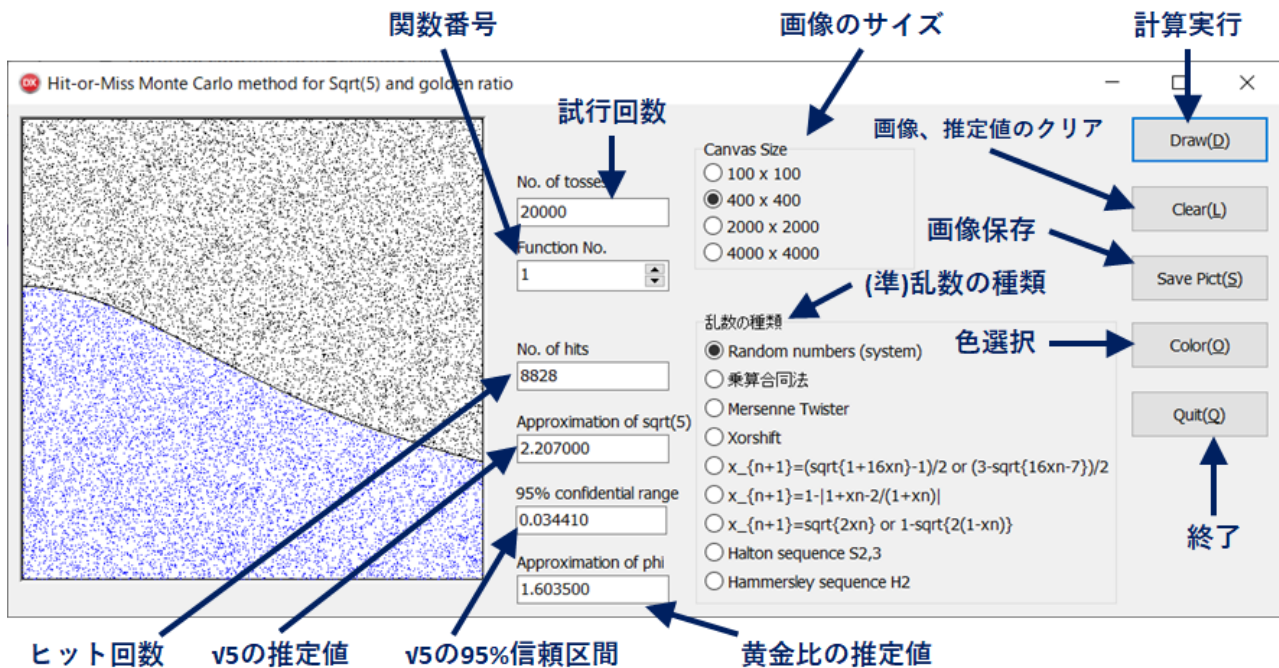


図 10 当たりはずれのモンテカルロ法 (システムの乱数)

次に紹介するのは、同じアプリで低食い違い量列の Hammersley 列を用いた場合である。上の疑似乱数の場合と比較して $\sqrt{5}$ と ϕ の推定値の精度が高くなっていることが確認できる (図 11 参照)。

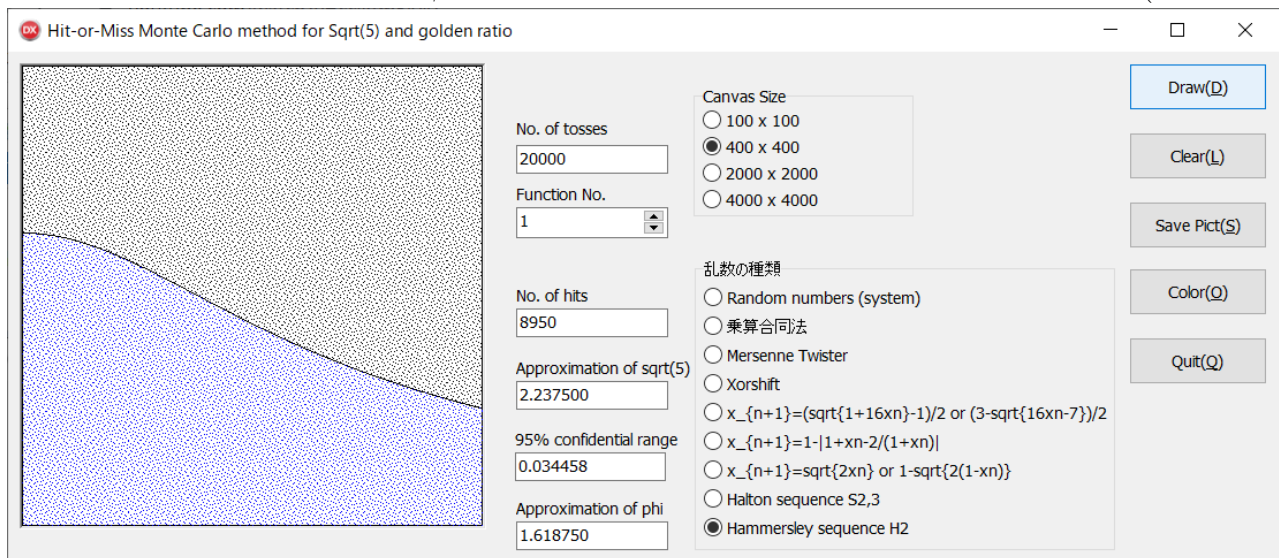


図 11 当たりはずれのモンテカルロ法 (Hammersley 列)

次に示すのは、「標本平均モンテカルロ法」のアプリのスクリーンショットである。図 12 は高精度化の手法を用いていない例である。

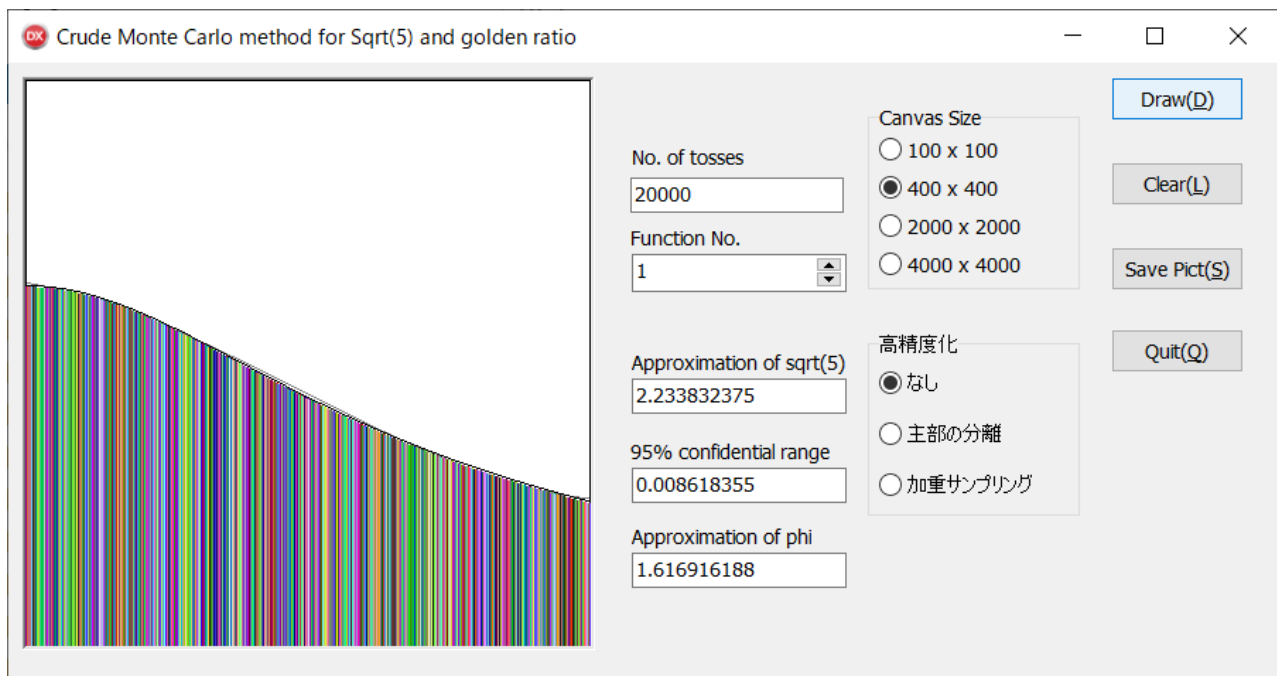


図 12 標本平均モンテカルロ法 (通常の方法)

次の例 (図 13) は、図 12 と同じ試行回数・関数番号で高精度化の手法として「主部の分離」を選択した場合である。95% 信頼区間が狭くなり、精度が上がっていることが確認できる。

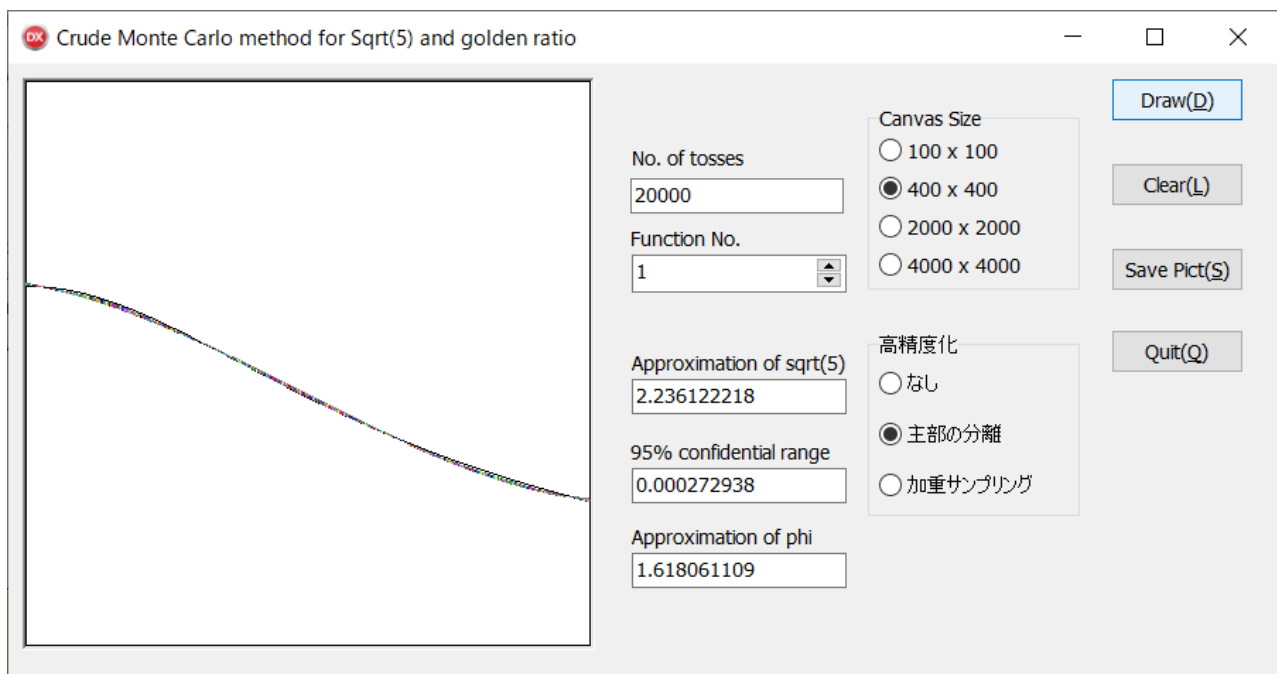


図 13 標本平均モンテカルロ法 (主部の分離による高精度化)

次の例 (図 14) は、図 12 と同じ試行回数・関数番号で高精度化の手法として「主部の分離」を選択した場合である。95% 信頼区間が狭くなり、精度が上がっていることが確認できる。

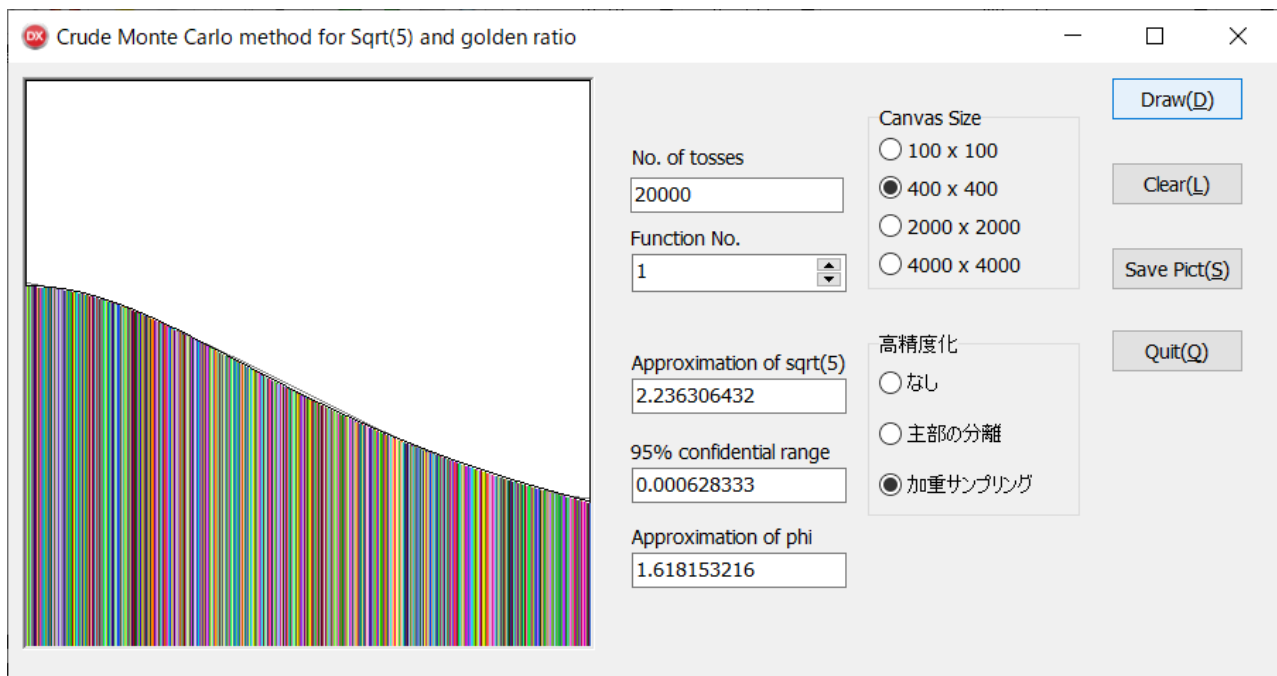


図 14 標本平均モンテカルロ法 (加重サンプリングによる高精度化)

次の例 (図 15) は、図 13 と同じ試行回数であるが関数番号が No.11

$$\left(f(x) = 1 + \frac{4(x^2 + 1)}{\pi(x^4 + 18x^2 + 1)} - \frac{4}{\pi(x^2 + 1)} \right)$$
の場合で、高精度化の手法として「主部の分離」を選択した場合である。図 13 と比較して関数近似の度合いが低いので 95% 信頼区間が広がっていることが確認できる。

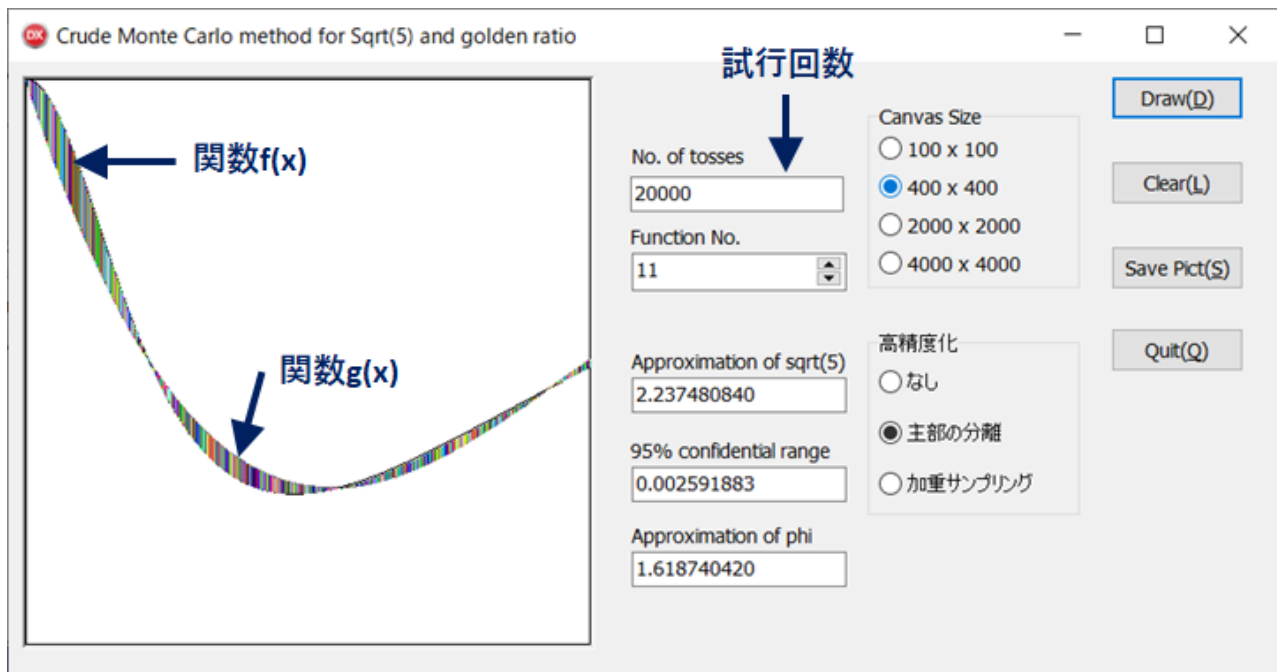


図 15 標本平均モンテカルロ法 (関数 No.11、主部の分離による高精度化)

次の例 (図 16) は、図 13 と同じ試行回数であるが関数番号が No.47

$$\left(f(x) = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{5-x}} + 8 \right) \right)$$
の場合で、高精度化の手法として「主部の分離」を選択した場合である。定義域全体にわたり関数の変動が少なく高精度が期待できるうえに図 13 と比較して関数近似の度合いが高いため 95% 信頼区間が狭くなっていることが確認できる。

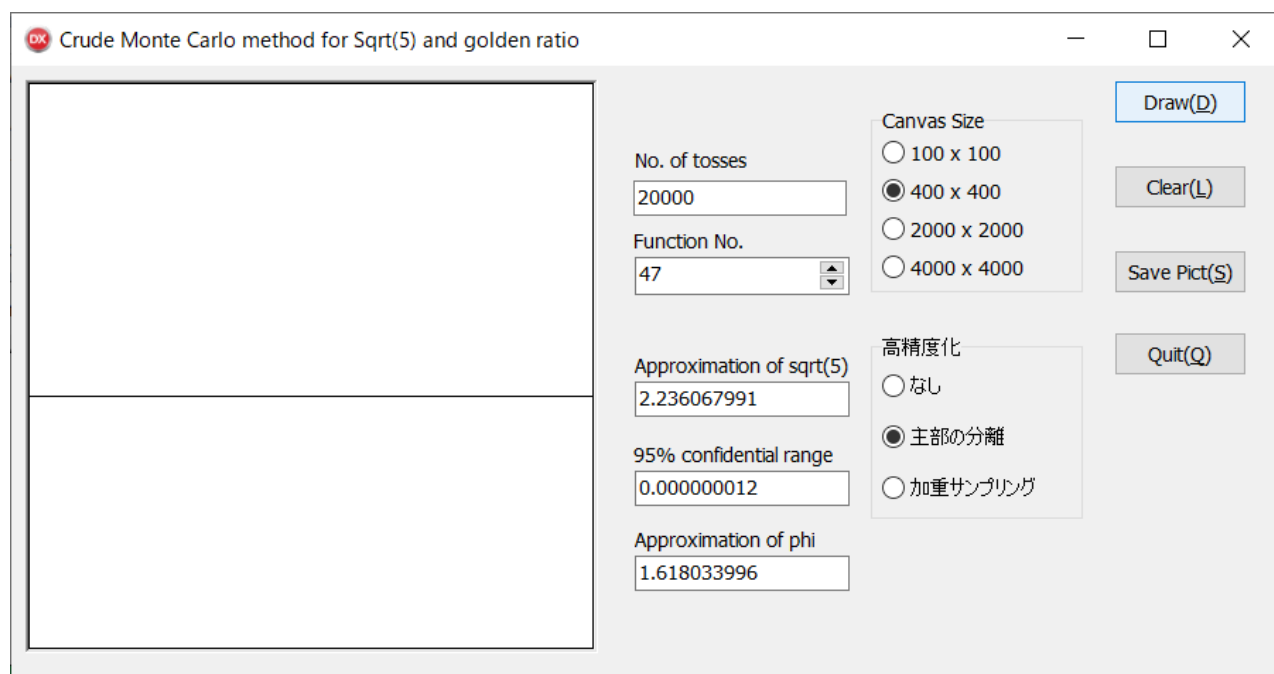


図 16 標本平均モンテカルロ法 (関数 No.47、主部の分離による高精度化)

ここでスクリーンショットを紹介しなかった関数、高精度化法についてもアプリで確認することが可能である。

7 まとめ

今回、 $\sqrt{5}$ 並びに黄金比 ϕ の値を、(準) モンテカルロ法を用いて求める Windows のアプリを作成した。 $\int_0^1 f(x)dx = 1/\sqrt{5}$ を求めるための関数 $f(x)$ を 84 種類用意した (アプリ画面での Function No. にて選択。この文書の最後の表 2 にまとめている)。当たりはずれのモンテカルロ法のアプリに関しては、(準) 乱数発生法を選択することができる。一方標本平均モンテカルロ法のアプリでは、高精度化の方法として「主部の分離」と「加重サンプリング」の 2 つの手法を選択することが可能である。

今後は作成したアプリを複数回実行し、試行回数と誤差 (95% 信頼区間) との関係や高精度化手法と誤差 (精度) との関係を調べることを予定している。また今回作成した 2 つのアプリは、ご興味をお持ちの方に頒布してもよいと考えている。

参考文献

- [1] 中村滋著、改訂版 フィボナッチ数の^{ミクロコスモス}小宇宙—フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割、日本評論社、2008, ISBN 978-4-535-78492-5
- [2] T.Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, 2nd ed. Vol.1, Wiley, 2018, ISBN 978-1-118-74212-9
- [3] 細矢治夫著、数学のかんどころ 6 ピタゴラスの三角形とその数理、共立出版、2011, ISBN 978-4-320-01986-7
- [4] 細矢治夫著、トポロジカル・インデックス フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学、日本評論社、2012, ISBN 978-4-535-78666-0

- [5] 宮武修、脇本和昌著、乱数とモンテカルロ法 (POD 版)、森北出版、2007, ISBN 978-4-627-00479-5
- [6] 津田孝夫著、モンテカルロ法とシミュレーション < 三訂版 > 電子計算機の確率論的応用、培風館、1995, ISBN 4-563-00878-8
- [7] 竹内啓著、特集/シミュレーションの世界、モンテカルロ法、数学セミナー、1990 年 11 月号、pp15-19
- [8] モンテカルロ法による円周率計算
<http://www.kk62526.server-shared.com/pi/MonteCarlo.html>
- [9] 森口繁一、宇田川銑久^{かね}、一松信著、岩波数学公式 I 微分積分・平面曲線、岩波書店、1987, ISBN 4-00-005507-0
- [10] P.L'Ecuyer, P.Hellekalek, Random Number Generators: Selection Criteria and Testing, in P.Hellekalek, G.Larcher eds., Random and Quasi-Random Point Sets, Springer, 1998, ISBN 978-0-387-98554-1
- [11] P.L'Ecuyer, Tables of Linear Congruential Generators of Different Sizes and Good Lattice Structure, Math. Comp., 68(225), 1999, Pages 249-260
- [12] Mersenne Twister Home Page
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/m-mat/MT/mt.html>
- [13] S.Vigna, An experimental exploration of Marsaglia' s xorshift generators, scrambled
<https://arxiv.org/pdf/1402.6246.pdf>
- [14] Pseudo-random numbers/Xorshift star (Rosetta code)
https://rosettacode.org/wiki/Pseudo-random_numbers/Xorshift_star
- [15] 合原一幸著、カオスの数理と技術ーカオス、そしてフラクタル、複雑系への序章ー、放送大学教育振興会、1997, ISBN 4-595-56259-4
- [16] W. Huang, Constructing an opposite map to a specified chaotic map, *Nonlinearity*, 18 (2005), 1375–1391
- [17] W. Huang, On complete chaotic maps with tent-map like structures, *Chaos, Solitons and Fractals*, 24 (2005), 287–299
- [18] W. Huang, Characterizing chaotic processes that generate uniform invariant density, *Chaos, Solitons and Fractals*, 25, (2005), 449–460
- [19] G.Leobacher, F.Pillichshammer, Introduction to Quasi-Monte Carlo Integration and Applications, Birkhäuser, 2010, ISBN 978-3-319-03424-9

表 2: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる関数とその近似関数 $g(x)$ 並びに $\int_0^1 g(x)dx$

No	$f(x)$	$g(x)^{*1}$	$\int_0^1 g(x)dx$
1	$\frac{2(x^2+1)}{\pi(x^4+3x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.6419088692$, $c_1 = -0.1646122553$, $c_2 = -0.7036993693$, $c_3 = 0.4857061138$	0.4464628136
2	$\frac{8(x^2+1)}{\pi(5x^4+6x^2+5)}$	関数 1, $c_0 = 0.5099303252$, $c_1 = 0.0170046583$, $c_2 = -0.2128504670$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4474824987
3	$\frac{4(x^2+1)}{\pi(5x^4-6x^2+5)}$	関数 1, $c_0 = 0.2701487679$, $c_1 = -0.4477397931$, $c_2 = 2.2900967460$, $c_3 = -1.4590145816$	0.4448908080
4	$\frac{10}{3\pi} \left(\frac{(x^2+1)^3}{(5x^4-6x^2+5)^2} + \frac{(x^2-2x+2)^3}{(5x^4-20x^3+24x^2-8x+4)^2} \right)$	関数 2, $c_0 = 0.5723182991$, $c_1 = 0.8668978875$, $c_2 = -8.0701436462$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4477964921
5	$\frac{115}{256} - \frac{\pi(x^2+1)^5(x^4+3x^2+1)}{x^2+1} + \frac{x^2-2x+2}{x^4+18x^2+1} + \frac{x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{x^4-20x^3+24x^2-8x+4}$	関数 1, $c_0 = 0.4490268795$, $c_1 = 0.0073796335$, $c_2 = -0.0322735686$, $c_3 = 0.0210803943$	0.4472289386
6	$\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^4+18x^2+1}{x^4+18x^2+1} + \frac{x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{x^4-20x^3+24x^2-8x+4} \right)$	関数 2, $c_0 = 0.7260997970$, $c_1 = -1.1663573094$, $c_2 = -2.5527507667$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4466152199
7	$\frac{-5(x^2+1)(x^2-2x-1)(x^2+2x-1)}{\pi(5x^4-6x^2+5)^2} + \frac{-5(x^2-2)(x^2-2x+2)(x^2-4x+2)}{\pi(5x^4-20x^3+24x^2-8x+4)^2}$	関数 2, $c_0 = 0.7317007018$, $c_1 = 1.3393127748$, $c_2 = -15.2051189516$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4480821992
8	$\frac{2}{5} + \frac{2(x^2+1)}{\pi(x^4+3x^2+1)} - \frac{8}{5\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.5319079740$, $c_1 = -0.1512805792$, $c_2 = -0.1852317454$, $c_3 = 0.2082632962$	0.4465895933
9	$\frac{1}{5} + \frac{8(x-1)^2(x+1)^2}{5\pi(x^2+1)(x^4+18x^2+1)} + \frac{8x^2(2-x)^2}{5\pi((1-x)^2+1)((1-x)^4+18(1-x)^2+1)}$	関数 2, $c_0 = 0.7147844174$, $c_1 = -0.9619268311$, $c_2 = -3.2823661119$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4450510752
10	$\frac{1}{2} + \frac{2(x^2+1)}{\pi(x^4+3x^2+1)} - \frac{2}{\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.5044077502$, $c_1 = -0.1479476600$, $c_2 = -0.0556148398$, $c_3 = 0.1389025920$	0.4466212883
11	$1 + \frac{4(x^2+1)}{\pi(x^4+18x^2+1)} - \frac{4}{\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 1.0000000000$, $c_1 = -3.0833503130$, $c_2 = 3.9925520320$, $c_3 = -1.4047334258$	0.4379921644
12	$\frac{1}{2} + \frac{8(x^2+1)}{\pi(5x^4+6x^2+5)} - \frac{2}{\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.3699490956$, $c_1 = 0.0730754556$, $c_2 = 0.3318961202$, $c_3 = -0.2779115603$	0.4476409734
13	$1 - \frac{8(x-1)^2(x+1)^2}{\pi(x^2+1)(5x^4-6x^2+5)} - \frac{8x^2(2-x)^2}{\pi(x^2-2x+2)(5x^4-20x^3+24x^2-8x+4)}$	関数 2, $c_0 = 0.4899567103$, $c_1 = 0.1567849691$, $c_2 = -2.0564733425$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4475384271
14	$\frac{2}{5} + \frac{8(x^2+1)}{\pi(5x^4+6x^2+5)} - \frac{8}{5\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.3974493194$, $c_1 = 0.0697425368$, $c_2 = 0.2022792136$, $c_3 = -0.2085508555$	0.4476092785
15	$\frac{1}{5} + \frac{4(x^2+1)}{\pi(5x^4-6x^2+5)} - \frac{4}{5\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.2151483201$, $c_1 = -0.4410739530$, $c_2 = 2.5493305539$, $c_3 = -1.5977359882$	0.4449541978
16	$\frac{4}{9} + \frac{8(x^2+1)}{\pi(5x^4+6x^2+5)} - \frac{16}{9\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.3852269977$, $c_1 = 0.0712238340$, $c_2 = 0.2598867277$, $c_3 = -0.2393778356$	0.4476233650
17	$\frac{1}{3} + \frac{4(x^2+1)}{\pi(5x^4-6x^2+5)} - \frac{4}{3\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.1784813535$, $c_1 = -0.4366300390$, $c_2 = 2.7221530403$, $c_3 = -1.6902168920$	0.4449964578
18	$\frac{4}{9} + \frac{2(x^2+1)}{\pi(x^4+3x^2+1)} - \frac{16}{9\pi(x^2+1)}$	関数 1, $c_0 = 0.5196856523$, $c_1 = -0.1497992813$, $c_2 = -0.1276242333$, $c_3 = 0.1774363175$	0.4466036799
19	$\frac{1}{3} + \frac{4(x^2-2x-1)(x^2+2x-1)}{3\pi(x^2+1)(x^4+18x^2+1)} + \frac{4(x^2-4x+2)(x^2-2)}{3\pi(x^2-2x+2)(x^4-4x^3+24x^2-40x+20)}$	関数 2, $c_0 = 0.7208036622$, $c_1 = -1.0062176419$, $c_2 = -3.2416074016$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4450471418
20	$\frac{2(x^2-1)^2(x^2+1)}{\pi(x^4+3x^2+1)^2} + \frac{2x^2(x-2)^2(x^2-2x+2)}{\pi(x^4-4x^3+9x^2-10x+5)^2}$	関数 2, $c_0 = 0.6362236276$, $c_1 = 0.1495141654$, $c_2 = -6.4098283305$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4474817108
21	$\frac{20x^2(x^2+1)}{\pi(x^4+3x^2+1)^2}$	関数 1, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 1.2624350888$, $c_2 = 0.2572992366$, $c_3 = -1.0436739669$	0.4560654649
22	$\frac{160x^2(x^2+1)}{\pi(x^4+18x^2+1)^2}$	関数 1, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 4.8252680646$, $c_2 = -10.0741379321$, $c_3 = 5.5579250443$	0.4440693160

次ページに続く

No	$f(x)$	$g(x)$	$\int_0^1 g(x)dx$
23	$\frac{40(x^2-1)^2(x^2+1)}{\pi(5x^4+6x^2+5)^2} + \frac{40x^2(x-2)^2(x^2-2x+2)}{\pi(5x^4-20x^3+36x^2-32x+16)^2}$	関数 2, $c_0 = 0.5087117785$, $c_1 = 0.1012660870$, $c_2 = -2.3446550643$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4474342909
24	$\frac{40(x^2-1)^2(x^2+1)}{\pi(5x^4-6x^2+5)^2}$	関数 1, $c_0 = 0.4741924682$, $c_1 = 0.7051169164$, $c_2 = -0.8729116983$, $c_3 = -0.3063976861$	0.4591809388
25	$\frac{256x^2(x^2+1)}{\pi(5x^4+6x^2+5)^2}$	関数 1, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 0.2626234651$, $c_2 = 2.7944546124$, $c_3 = -2.4451611186$	0.4515063237
26	$\frac{16(x-1)^2(x^2-2x+2)}{\pi(5x^4-20x^3+24x^2-8x+4)^2} + \frac{16x^2(x^2+1)}{\pi(5x^4-6x^2+5)^2}$	関数 2, $c_0 = 0.6360712601$, $c_1 = 1.0558638439$, $c_2 = -10.9241337739$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4479107750
27	$\frac{2\pi}{25} \cos \frac{\pi x}{10} + \frac{1}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.4513339895$, $c_1 = -0.0000907951$, $c_2 = -0.0122246476$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472137094
28	$\frac{6\pi}{25} \cos \frac{3\pi x}{10} - \frac{1}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.5555165729$, $c_1 = -0.0212929481$, $c_2 = -0.2928949944$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472384340
29	$\frac{4\pi}{5} - \frac{25}{8\pi} \sin \frac{5\pi x}{25}$	関数 1, $c_0 = 0.5961524121$, $c_1 = -0.2968662626$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4477192808
30	$1 - \frac{25}{5} \sin \frac{5\pi x}{25}$	関数 1, $c_0 = 1.0000000000$, $c_1 = -1.3889595155$, $c_2 = 0.4217306479$, $c_3 = 0.0000000000$	0.0000000000
31	$\frac{\pi}{25} \cos \frac{\pi x}{10} + \frac{3\pi}{25} \cos \frac{3\pi x}{10}$	関数 1, $c_0 = 0.5034259493$, $c_1 = -0.0106959839$, $c_2 = -0.1525558527$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472260064
32	$\frac{4}{5} - \frac{2\pi}{25} \sin \frac{\pi x}{5} - \frac{4\pi}{25} \sin \frac{2\pi x}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.8052814529$, $c_1 = -0.8768041577$, $c_2 = 0.2408993288$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4471791503
33	$\frac{\pi}{2} + \frac{25}{3\pi} \cos \frac{10\pi x}{3\pi} - \frac{25}{4\pi} \sin \frac{5\pi x}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.5246600494$, $c_1 = -0.1545908525$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4473646232
34	$\frac{\pi}{5} + \frac{25}{12} \cos \frac{10\pi x}{10} - \frac{25}{25} \sin \frac{2\pi x}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.7707960057$, $c_1 = -0.6445661496$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4485129309
35	$\frac{25}{4} - \frac{125}{12\pi} \sin^3 \frac{5\pi x}{10}$	関数 1, $c_0 = 0.4768562807$, $c_1 = 0.0566970221$, $c_2 = -0.1737695518$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472816078
36	$\frac{25}{4} + \frac{125}{25} \cos^3 \frac{10\pi x}{10}$	関数 1, $c_0 = 0.4617523826$, $c_1 = -0.0022118325$, $c_2 = -0.0402908890$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472161700
37	$\frac{5}{5} - \frac{24\pi}{125} \left(\sin^3 \frac{2\pi x}{5} + \sin^3 \frac{2\pi(1-x)}{5} \right)$	関数 2, $c_0 = 0.2671736613$, $c_1 = 1.0931574163$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4493665640
38	$\frac{36\pi}{125} \cos^3 \frac{3\pi x}{10} - \frac{4}{25}$	関数 1, $c_0 = 0.7728813344$, $c_1 = -0.4044626228$, $c_2 = -0.3684187116$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4478437856
39	$\frac{1}{875} \left(96\pi \cos^5 \left(\frac{\pi x}{10} \right) + 113 \right)$	関数 1, $c_0 = 0.4743577441$, $c_1 = -0.0074960637$, $c_2 = -0.0701647964$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472214468
40	$\frac{1}{875} \left(144\pi \cos^5 \left(\frac{3\pi x}{10} \right) + 144\pi \cos^5 \left(\frac{3\pi(1-x)}{10} \right) - 113 \right)$	関数 2, $c_0 = 0.4240596699$, $c_1 = 0.2521610438$, $c_2 = -0.5651184682$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472492283
41	$\frac{1}{875} \left(399 - 192\pi \sin^5 \left(\frac{\pi x}{5} \right) \right)$	関数 1, $c_0 = 0.4565074603$, $c_1 = -0.0177255025$, $c_2 = 0.0860352402$, $c_3 = -0.1167325544$	0.4471399838
42	$\frac{1}{875} \left(625 - 192\pi \sin^5 \left(\frac{2\pi x}{5} \right) - 192\pi \sin^5 \left(\frac{2\pi(1-x)}{5} \right) \right)$	関数 2, $c_0 = 0.1577996515$, $c_1 = 1.7551125225$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4503184052
43	$\frac{\pi}{25} \frac{\sin \left(\frac{\pi x}{5} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{5} \right)} + \frac{2}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.4016461433$, $c_1 = 0.0552253699$, $c_2 = 0.0539553555$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472439468
44	$\frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{5}}$	関数 1, $c_0 = 0.0249003471$, $c_1 = 1.6922663891$, $c_2 = -2.0422167183$, $c_3 = 1.0074072619$	0.4421464510
45	$\frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{x(1-x)}{5}}$	関数 2, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 4.2692478688$, $c_2 = -8.2068896687$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4379783225
46	$\frac{1}{10\sqrt{x+4}} + \frac{2}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.4498617338$, $c_1 = -0.0052668405$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472283136
47	$\frac{1}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{5-x}} + 8 \right)$	関数 2, $c_0 = 0.4473604497$, $c_1 = -0.0008809077$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472136318

No	$f(x)$	$g(x)$	$\int_0^1 g(x)dx$
48	$\frac{2}{5\sqrt{4x+1}} + \frac{1}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.5963489953$, $c_1 = -0.6017098678$, $c_2 = 0.6810279525$, $c_3 = -0.2991094641$	0.4477260129
49	$\frac{1}{50}(3\sqrt{x+4}+16)$	関数 1, $c_0 = 0.4401215635$, $c_1 = 0.0141577453$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472004362
50	$\frac{1}{25}(6\sqrt{4x+1}+1)$	関数 1, $c_0 = 0.2836719440$, $c_1 = 0.3997201290$, $c_2 = -0.1092445490$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4471171588
51	$\frac{x}{5\sqrt{x^2+4}} + \frac{2}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.4019773894$, $c_1 = 0.0899761597$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4469654692
52	$\frac{4x}{5\sqrt{4x^2+1}} + \frac{1}{5}$	関数 1, $c_0 = 0.2076938604$, $c_1 = 0.7578465415$, $c_2 = -0.4176238118$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4474091939
53	$\frac{1}{35}\left(16 - \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4}}\right)$	関数 1, $c_0 = 0.4559658076$, $c_1 = 0.0197640383$, $c_2 = -0.0558722757$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472237348
54	$\frac{1}{5}\left(\frac{12x^3}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{12(1-x)^3}{\sqrt{4(1-x)^2+1}} - 1\right)$	関数 2, $c_0 = 0.8794237271$, $c_1 = -2.5992827337$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4462099382
55	$\frac{1}{25}\left(3x\sqrt{x^2+4}+8\right)$	関数 1, $c_0 = 0.3146604260$, $c_1 = 0.2664943158$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4479075839
56	$\frac{1}{25}\left(6x\sqrt{4x^2+1}+6(1-x)\sqrt{4(1-x)^2+1}+1\right)$	関数 2, $c_0 = 0.5784526260$, $c_1 = -0.7891388064$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4469294916
57	$\frac{1}{10}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+4}}+4\right)$	関数 1, $c_0 = 0.3987380691$, $c_1 = 0.0164989714$, $c_2 = 0.1205860105$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4471828916
58	$\frac{1}{5}\left(\frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}+1\right)$	関数 1, $c_0 = 0.1965004770$, $c_1 = 0.0621609922$, $c_2 = 1.2240568767$, $c_3 = -0.7510641972$	0.4478338827
59	$\frac{1}{50}\left(9x^2\sqrt{x^3+4}+16\right)$	関数 1, $c_0 = 0.3235261209$, $c_1 = -0.0453683226$, $c_2 = 0.4394369232$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4473209340
60	$\frac{1}{25}\left(9x^2\sqrt{4x^3+1}+9(1-x)^2\sqrt{4(1-x)^3+1}+1\right)$	関数 2, $c_0 = 0.8380227769$, $c_1 = -2.3383177515$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4483031516
61	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(x+4)^{3/2}}\right)$	関数 1, $c_0 = 0.4375485668$, $c_1 = 0.0226156946$, $c_2 = -0.0049295532$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472132297
62	$\frac{1}{5}\left(\frac{6x}{\sqrt{4x+1}} + \frac{6(1-x)}{\sqrt{5-4x}} - 1\right)$	関数 2, $c_0 = 0.3425943763$, $c_1 = 0.6216570074$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4462038775
63	$\frac{1}{70}\left(32 - \frac{3x}{\sqrt{x+4}}\right)$	関数 1, $c_0 = 0.4568189983$, $c_1 = -0.0191415446$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472482260
64	$\frac{4}{(x^2+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.5025427764$, $c_1 = -0.5025427764$, $c_2 = -0.1106147178$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472283115
65	$30\left(\frac{x^2}{(x^2+4)^{5/2}} + \frac{(1-x)^2}{[(1-x)^2+4]^{5/2}}\right)$	関数 2, $c_0 = 0.5365141866$, $c_1 = -0.5357070637$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472296760
66	$\frac{x+8}{2(x+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.4961566694$, $c_1 = -0.0970787685$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4476172852
67	$\frac{2x+1}{(4x+1)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 1.0000000000$, $c_1 = -2.6810473388$, $c_2 = 3.7211965408$, $c_3 = -1.7890350056$	0.4526164261
68	$\frac{x(3x+16)}{2(x+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 0.9856113148$, $c_2 = -0.1371514982$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4470884913
69	$\frac{2x(3x+1)}{(4x+1)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 1.2735437490$, $c_2 = -0.5820706399$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4427483279
70	$\frac{3x^2+17x+8}{4(x+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.2586672020$, $c_1 = 0.3752583741$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4462963890
71	$\frac{6x^2+4x+1}{2(4x+1)^{3/2}}$	関数 3, $c_0 = 0.0283500234$, $c_1 = 0.1492373751$, $c_2 = 0.1580228969$, $c_3 = 0.3101893718$	0.4470721678

前ページからの続き

No	$f(x)$	$g(x)$	$\int_0^1 g(x)dx$
72	$\frac{3x+8}{10\sqrt{x+4}}$	関数 1, $c_0 = 0.4011608824$, $c_1 = 0.0918560886$, $c_2 = 0.0000000000$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4470889267
73	$\frac{6x+1}{5\sqrt{4x+1}}$	関数 1, $c_0 = 0.2081946663$, $c_1 = 0.6073049749$, $c_2 = -0.1946466254$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4469649453
74	$\frac{1}{2} - \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.5007957366$, $c_1 = -0.1401216302$, $c_2 = 0.0493699962$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4471915869
75	$\frac{1}{(x^2+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.5025427764$, $c_1 = -0.0368857843$, $c_2 = -0.1106147181$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472283116
76	$\frac{1}{(4x^2+1)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 1.0000000000$, $c_1 = -0.9834464012$, $c_2 = -1.1036122509$, $c_3 = 1.2007876707$	0.4406029668
77	$\frac{x(x^2+8)}{(x^2+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 1.0684183561$, $c_2 = -0.2591740371$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4478178324
78	$\frac{2x(2x^2+1)}{(4x^2+1)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.0000000000$, $c_1 = 2.2664485822$, $c_2 = -3.0581491756$, $c_3 = 1.3330040048$	0.4470922338
79	$\frac{x^3+8x+4}{2(x^2+4)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.2489454464$, $c_1 = 0.5245935871$, $c_2 = -0.1919001722$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472755159
80	$\frac{4x^3+2x+1}{2(4x^2+1)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.5158246982$, $c_1 = 0.5306348396$, $c_2 = -1.8708183409$, $c_3 = 1.1501945198$	0.4450846343
81	$\frac{2(x^2+2)}{5\sqrt{x^2+4}}$	関数 1, $c_0 = 0.3992046465$, $c_1 = 0.0112974342$, $c_2 = 0.1270556749$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4472052552
82	$\frac{8x^2+1}{5\sqrt{4x^2+1}}$	関数 1, $c_0 = 0.1821893346$, $c_1 = 0.3217443665$, $c_2 = 0.3136391856$, $c_3 = 0.0000000000$	0.4476079130
83	$1 - \frac{4x}{(4x^2+1)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.9926718382$, $c_1 = -4.5348708788$, $c_2 = 8.1914386670$, $c_3 = -4.0276621744$	0.4488004109
84	$\frac{3}{5} - \frac{1}{2(x^2+3x+1)^{3/2}}$	関数 1, $c_0 = 0.1125503111$, $c_1 = 1.5814012593$, $c_2 = -2.1014132275$, $c_3 = 0.9707292537$	0.4454621783
			これで終わり

*1:近似関数 $g(x)$ は次のとおりである。関数 1 : $g(x) = c_0 + (c_1 + (c_2 + c_3 \cdot x)x)x$, 関数 2 : $g(x) = c_0 + c_1 \cdot x(1-x) + c_2 \cdot x^2(1-x)^2$, 関数 3 : $g(x) = \frac{c_0}{x+c_1} + c_2 \cdot x + c_3$

INTEGER VALUES OF GENERATING FUNCTIONS FOR LUCAS SEQUENCES

NORIYUKI SUWA^{*)}

ABSTRACT. It is known that the generating function of the Fibonacci sequence, $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k t^k = t/(1-t-t^2)$, attains an integer value if and only if $t = F_k/F_{k+1}$ for some $k \in \mathbb{Z}$. In this article, we generalize this result for the Lucas sequences and the companion Lucas sequences associated to $(P, \pm 1)$, clarifying a role of the arithmetic of real quadratic number fields.

Introduction

The Lucas sequences, including the Fibonacci sequence, have been studied widely for a long time. There is left an enormous accumulation of research, and it seems that there remains an abundance of ore to mine.

For example, let $\{F_k\}_{k \geq 0}$ and $\{\Lambda_k\}_{k \geq 0}$ denote the Fibonacci sequence and the Lucas sequence, respectively, and put

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k t^k = \frac{t}{1-t-t^2}, \quad G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k t^k = \frac{2-t}{1-t-t^2}.$$

It was recently that Hong [1] observed that $F(F_n/F_{n+1})$, $G(F_n/F_{n+1})$ and $G(\Lambda_n/\Lambda_{n+1})$ are integers for $n \geq 0$ and posed a question which rational number q assures $F(q) \in \mathbb{Z}$ or $G(q) \in \mathbb{Z}$. Soon after, Pongsriiam [3] answered the question, establishing the following results:

- (1) Let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $F(q)$ is an integer if and only if $q = F_n/F_{n+1}$ or $-F_{n+1}/F_n$ for some n ;
- (2) Let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $G(q)$ is an integer if and only if $q = F_n/F_{n+1}$, $-F_{n+1}/F_n$, Λ_n/Λ_{n+1} or $-\Lambda_{n+1}/\Lambda_n$ for some n .

Tsuno ([6],[7]) generalized Pongsriiam's result to the generating functions for sequences given by the Pell equations. Their argument depends on skillful combination of various formulas for the sequences defined by recurrence relation of order 2.

In this article, we reexamine their results and generalize (1) and (2) for the Lucas sequences and the companion Lucas sequences associated to $(P, \pm 1)$.

Main Result I (=Theorem 2.3) *Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ with $P \neq 0$, $Q = \pm 1$, $P^2 - 4Q > 0$ and $(P, Q) \neq (\pm 3, 1)$. Put $f(t) = t/(1 - Pt + Qt^2)$, the generating function of the Lucas sequence associated to (P, Q) . Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.*

^{*)} Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research No.19K03408

2005 *Mathematics Subject Classification* Primary 13B05; Secondary 14L15, 12G05.

Main Result II (=Theorem 3.5) *Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ with $P \neq 0$, $Q = \pm 1$ and $P^2 - 4Q > 0$. Put $f(t) = (2 - Pt)/(1 - Pt + Qt^2)$, the generating function of the companion Lucas sequence associated to (P, Q) .*

(1) *Assume $Q = -1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ or S_n/S_{n+1} for some $n \in \mathbb{Z}$.*

(2) *Assume $Q = 1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$, S_n/S_{n+1} , $(L_{n+1} - L_n)/(L_{n+2} - L_{n+1})$ or $(L_n + L_{n+1})/(L_{n+2} + L_{n+1})$ for some $n \in \mathbb{Z}$.*

Now we explain the organization of the article. In the Section 1, we recall needed facts on the Lucas sequences though most of them are well known. We treat linear recurrence sequences also for negative indices, which simplifies formulas and the argument. Main Result I and Main Result II are proven in the Section 2 and in the Section 3, respectively. It should be mentioned that two main results follow from Dirichlet's unit theorem for real quadratic number fields. In the Section 4, we compare preceeding results and ours. In the Section 5, we remark upon an unlooked-for relation between our main result and the group $G_{P,Q}(\mathbb{Q})/\Theta$ investigated in [4] and [5].

Notation

For a ring R , $R^\times$ denotes the multiplicative group of invertible elements of R .

$\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Z})$, $\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$: defined in 1.1

$\{L_k\}_{k \geq 0}$: the Lucas sequence associated to (P, Q) , recalled in 1.1

$\{S_k\}_{k \geq 0}$: the companion Lucas sequence associated to (P, Q) , recalled in 1.1

$\{F_k\}_{k \geq 0}$: the Fibonacci sequence

$\{\Lambda_k\}_{k \geq 0}$: the Lucas sequence, recalled in 1.2

(a, b) : the greatest common divisor of $a, b \in \mathbb{Z}$

$G_{P,Q}(\mathbb{Q})$: defined in 5.3

$G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})$: defined in 5.3

$U_{P,Q}(\mathbb{Q})$: defined in 5.3

$G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})/\Theta$: defined in 5.3

1. Recall: Lucas sequences

In the section, we fix $P, Q \in \mathbb{Z}$ and put $D = P^2 - 4Q$.

Notation 1.1. For $P, Q \in \mathbb{Z}$, we put

$$\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Z}) = \{\{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}; w_{k+2} - Pw_{k+1} + Qw_k = 0 \text{ for each } k \geq 0\}$$

and

$$\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q}) = \{\{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}; w_{k+2} - Pw_{k+1} + Qw_k = 0 \text{ for each } k \geq 0\}.$$

The sequence $\{L_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Z})$ defined by $(L_0, L_1) = (0, 1)$ is called the *Lucas sequence* associated to (P, Q) , and $\{S_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Z})$ defined by $(S_0, S_1) = (2, P)$ is called the *companion Lucas sequence* associated to (P, Q) .

As is well known, for $\{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$, we have

$$w_{n+1}^2 - Pw_{n+1}w_n + Qw_n^2 = (w_1^2 - Pw_1w_0 + Qw_0^2)Q^n.$$

Example 1.2. The Lucas sequence associated to $(P, Q) = (1, -1)$ is nothing but the Fibonacci sequence $\{F_k\}_{k \geq 0}$. On the other hand, the companion Lucas sequence associated to $(P, Q) = (1, -1)$ is traditionally called the Lucas sequence and denoted by $\{L_k\}_{k \geq 0}$. To avoid the confusion, we shall denote by $\{\Lambda_k\}_{k \geq 0}$ the Lucas sequence.

Definition 1.3. Assume that $Q \neq 0$. Let $\{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$. Then we can define terms w_k for $k < 0$ inductively by the recurrence relation

$$w_k = \frac{P}{Q}w_{k+1} - \frac{1}{Q}w_{k+2}.$$

Hereinafter we enumerate several formulas concerning Lucas sequences.

Formulas 1.4. Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ with $Q \neq 0$. Then we have:

- (1) $w_{-n}w_{n+1} - Qw_{-n-1}w_n = w_0(2w_1 - Pw_0)$ for $\{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$.
- (2) $L_{-n} = -\frac{L_n}{Q^n}$, $S_{-n} = \frac{S_n}{Q^n}$.
- (3) $\frac{L_{-n-1}}{L_{-n}} = \frac{1}{Q} \frac{L_{n+1}}{L_n}$, $\frac{S_{-n-1}}{S_{-n}} = \frac{1}{Q} \frac{S_{n+1}}{S_n}$.

Proof. We can easily verify the formulas (1) and (2) by induction on $n > 0$. The formula (3) is an immediate consequence of (2).

Formulas 1.5. Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ with $P^2 - 4Q \neq 0$. Let α, β denote the roots of the quadratic equation $t^2 - Pt + Q = 0$. Then we have:

- (1) $w_n = \frac{1}{\alpha - \beta} \{(w_1 - \beta w_0)\alpha^n - (w_1 - \alpha w_0)\beta^n\}$ for $\{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$.

In particular,

- (2) $L_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $S_n = \alpha^n + \beta^n$.

Defintion 1.6. Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ and $\{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Z})$. The generating function for $\{w_k\}_{k \geq 0}$ is defined by

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} w_k t^k \in \mathbb{Z}[[t]].$$

As is well known, we have

$$f(t) = \frac{w_0 + (w_1 - Pw_0)t}{1 - Pt + Qt^2}.$$

For example, the generating function for the Lucas sequence $\{L_k\}_{k \geq 0}$ is given by

$$f(t) = \frac{t}{1 - Pt + Qt^2},$$

and the generating function for the companion Lucas sequence $\{S_k\}_{k \geq 0}$ is given by

$$f(t) = \frac{2 - Pt}{1 - Pt + Qt^2}.$$

Formulas 1.7. Put $f(t) = \frac{w_0 + (w_1 - Pw_0)t}{1 - Pt + Qt^2}$. Then we have:

- (1) $f\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{r\{w_0r + (w_1 - Pw_0)s\}}{r^2 - Prs + Qs^2}$ for $r, s \in \mathbb{Z}$.
- (2) $f\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) = \frac{v_{n+1}\{w_0v_{n+1} + (w_1 - Pw_0)v_n\}}{(v_1^2 - Pv_1v_0 + Qv_0^2)Q^n}$ for $\{v_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$.

Formulas 1.8. Put $f(t) = \frac{t}{1 - Pt + Qt^2}$. Then we have:

- (1) $f\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{rs}{r^2 - Prs + Qs^2}$ for $r, s \in \mathbb{Z}$.
- (2) $f\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) = \frac{v_{n+1}v_n}{(v_1^2 - Pv_1v_0 + Qv_0^2)Q^n}$ for $\{v_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$.
- (3) $f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \frac{L_{n+1}L_n}{Q^n}$.
- (4) $f\left(\frac{L_{-n-1}}{L_{-n}}\right) = f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right)$.

Proof. We can easily deduce the formula (3) from (2), noting $L_1^2 - PL_1L_0 + QL_0^2 = 1$. The formula (4) follows from (3) and 1.4 (2).

Formulas 1.9. Put $f(t) = \frac{2 - Pt}{1 - Pt + Qt^2}$. Then we have:

- (1) $f\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{r(2r - Ps)}{r^2 - Prs + Qs^2}$ for $r, s \in \mathbb{Z}$.
- (2) $f\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) = \frac{v_{n+1}(2v_{n+1} - Pv_n)}{(v_1^2 - Pv_1v_0 + Qv_0^2)Q^n}$ for $\{v_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Z})$.
- (3) $f\left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right) = -\frac{S_{n+1}L_n}{Q^n}$.
- (4) $f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \frac{L_{n+1}S_n}{Q^n}$.
- (5) $f\left(\frac{S_{-n-1}}{S_{-n}}\right) = f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right)$.
- (6) $f\left(\frac{L_{-n-1}}{L_{-n}}\right) = f\left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right)$.

Proof. We can easily deduce the formulas (3) and from (2), noting

$$S_1^2 - PS_1S_0 + QS_0^2 = -P^2 + 4Q = D, \quad 2S_{n+1} - PS_n = DL_n, \quad 2L_{n+1} - L_n = S_n.$$

The formulas (5) and (6) are combinations (3), (4) and 1.4 (2).

2. Main result I

Lemma 2.1. *Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ with $P \neq 0$, $Q = \pm 1$ and $P^2 - 4Q > 0$. Let α be a root of the quadraic equation $t^2 - Pt + Q = 0$. Then α generates the multiplicative group $\mathbb{Z}[\alpha]^\times / \{\pm 1\}$ except for $(P, Q) = (\pm 3, 1)$.*

Proof. The multiplicative group $\mathbb{Z}[\alpha]^\times / \{\pm 1\}$ is cyclic as is well known. Assume that α does not generate the multiplicative group $\mathbb{Z}[\alpha]^\times / \{\pm 1\}$. Then there exists $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\alpha]^\times$ such that $\alpha = \pm \varepsilon^k$ for some $k \geq 2$. Then we obtain $\mathbb{Z}[\varepsilon^k] = \mathbb{Z}[\varepsilon]$, which implies

$$\varepsilon^2 - \varepsilon - 1 = 0, \varepsilon^2 + \varepsilon - 1 = 0, \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0 \text{ or } \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

However, the latter two cases are excluded since ε is real. In the first case we have $\varepsilon = (1 \pm \sqrt{5})/2$, and in the second case we have $\varepsilon = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. These correspond to the cases of $(P, Q) = (3, 1)$ and $(P, Q) = (-3, 1)$, respectively.

Lemma 2.2. *Let $P, Q, r, s \in \mathbb{Z}$ with $(r, Q) = 1$, $(r, s) = 1$ and $r \neq 0$. Put $f(t) = t/(1 - Pt + Qt^2)$. Then, $f(s/r)$ is an integer if and only if $r^2 - Prs + Qs^2 = \pm 1$.*

Proof. We can easily verify the assertion, noting that (a) $f(s/r) = rs/(r^2 - Prs + Qs^2)$, (b) $(r^2 - Prs + Qs^2, r) = (Qs^2, r) = 1$ and (c) $(r^2 - Prs + Qs^2, s) = (r^2, s) = 1$.

Theorem 2.3. *Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ with $P \neq 0$, $Q = \pm 1$, $P^2 - 4Q > 0$ and $(P, Q) \neq (\pm 3, 1)$. Put $f(t) = t/(1 - Pt + Qt^2)$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.*

Proof. As is remarked in Formula 1.8, we have

$$f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \frac{L_{n+1}L_n}{Q^n} \in \mathbb{Z}$$

for $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq 0$).

Conversely, assume that $f(q)$ is an integer. Put

$$D = P^2 - 4Q, \quad \alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{2}, \quad \beta = \frac{P - \sqrt{D}}{2}.$$

Then α is invertible in the ring $\mathbb{Z}[\alpha]$ since $\alpha\beta = Q = \pm 1$. Furthermore, α generates the multiplicative group $\mathbb{Z}[\alpha]^\times / \{\pm 1\}$ since $(P, Q) \neq (\pm 3, 1)$.

Now put

$$q = \frac{s}{r}, \quad r, s \in \mathbb{Z} \text{ with } (r, s) = 1.$$

Then, by Lemma 2.2, we obtain $r^2 - Prs + Qs^2 = \pm 1$, which implies that $r - \alpha s$ is invertible in $\mathbb{Z}[\alpha]$. Hence there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that

$$r - \alpha s = \beta^n, \quad r - \beta s = \alpha^n$$

or

$$r - \alpha s = -\beta^n, \quad r - \beta s = -\alpha^n.$$

Hence, by Lemma 2.1, we obtain

$$(r, s) = (L_{n+1}, L_n) \text{ or } (-L_{n+1}, -L_n),$$

noting the formula $L_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$.

Proposition 2.4.1. (The case of $P = 3$ and $Q = 1$) Put $f(t) = t/(1 - 3t + t^2)$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $f(q)$ is an integer if and only if $q = F_n/F_{n+2}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. We can deduce

$$f\left(\frac{F_n}{F_{n+2}}\right) = (-1)^n F_{n+2} F_n$$

for $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq -2$) immediately from the equality $F_{n+2}^2 - 3F_{n+2}F_n + F_n^2 = (-1)^n$.

Conversely, put $\varepsilon = (1 + \sqrt{5})/2$. Then the roots of the quadratic equation $t^2 - 3t + 1 = 0$ are given by $\alpha = \varepsilon^2 = (3 + \sqrt{5})/2$ and $\beta = \varepsilon^{-2} = (3 - \sqrt{5})/2$. Furthermore, ε generates the multiplicative group $\mathbb{Z}[\varepsilon^2]^\times / \{\pm 1\} = \mathbb{Z}[\varepsilon]^\times / \{\pm 1\}$.

Now, let $\{L_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ denote the Lucas sequence associated to $(P, Q) = (3, 1)$. Then we have $L_k = F_{2k}$ for each $k \in \mathbb{Z}$. Now put

$$q = \frac{s}{r}, \quad r, s \in \mathbb{Z} \text{ with } (r, s) = 1.$$

Then, by Lemma 2.2, we obtain $r^2 - 3rs + s^2 = \pm 1$, which implies that $r - \alpha s$ is invertible in $\mathbb{Z}[\alpha]$. Hence there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that

$$r - \alpha s = \varepsilon^{-n}, \quad r - \beta s = \varepsilon^n$$

or

$$r - \alpha s = -\varepsilon^{-n}, \quad r - \beta s = -\varepsilon^n.$$

Then we obtain

$$(r, s) = (F_{n+2}, F_n) \text{ or } (-F_{n+2}, -F_n),$$

noting $F_k = \frac{\varepsilon^k - \varepsilon^{-k}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}$ and $\alpha - \beta = \varepsilon - \varepsilon^{-1}$.

Remark 2.4.2. Let $\{L_k\}_{k \geq 0}$ denote the Lucas sequence associated to $(P, Q) = (3, 1)$. Then we have $\{F_{2k}\}_{k \geq 0} = \{L_k\}_{k \geq 0}$ and $\{F_{2k+1}\}_{k \geq 0} = \{L_{k+1} - L_k\}_{k \geq 0}$.

Proposition 2.5.1. (The case of $P = -3$ and $Q = 1$) Put $f(t) = t/(1 + 3t + t^2)$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then $f(q)$ is an integer if and only if $q = -F_n/F_{n+2}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. We can verify

$$f\left(-\frac{F_n}{F_{n+2}}\right) = (-1)^{n-1} F_{n+2} F_n$$

for $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq -2$) and prove the assertion as in Proposition 2.4.1.

Remark 2.5.2. Let $\{L_k\}_{k \geq 0}$ denote the Lucas sequence associated to $(P, Q) = (-3, 1)$. Then we have $\{(-1)^{k-1} F_{2k}\}_{k \geq 0} = \{L_k\}_{k \geq 0}$ and $\{(-1)^k F_{2k+1}\}_{k \geq 0} = \{L_{k+1} + L_k\}_{k \geq 0}$.

3. Main result II

Lemma 3.1. *Let $P, Q \in \mathbb{Z}$, and put*

$$D = P^2 - 4Q, \quad \alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{2}, \quad \beta = \frac{P - \sqrt{D}}{2}.$$

Assume that D is not a square. Let $r, s, r', s' \in \mathbb{Q}$. Then, $(r - s\alpha)/(r - s\beta) = (r' - s'\alpha)/(r' - s'\beta)$ if and only if $(r : s) = (r' : s')$.

Proof. We obtain the conclusion immediately, simplifying $(r - s\alpha)(r' - s'\beta) = (r - s\beta)(r' - s'\alpha)$ and noting that α and β are linearly independent over $\mathbb{Q}$.

Lemma 3.2. *Let $P, Q, r, s \in \mathbb{Z}$ with $(r, Q) = 1$, $(r, s) = 1$ and $r \neq 0$, and put $f(t) = (2 - Pt)/(1 - Pt + Qt^2)$. Then, $f(s/r)$ is an integer if and only if $2r - Ps$ is divisible by $r^2 - Prs + Qs^2$.*

Proof. First note $f(s/r) = r(2r - Ps)/(r^2 - Prs + Qs^2)$. Then, $f(s/r)$ is an integer if and only if $r(2r - Ps)$ is divisible by $r^2 - Prs + Qs^2$. In this case, $2r - Ps$ is divisible by $r^2 - Prs + Qs^2$ since $(r, r^2 - Prs + Qs^2) = 1$.

Corollary 3.3. *Let $P, Q, r, s \in \mathbb{Z}$ with $P^2 - 4Q \neq 0$, $Q = \pm 1$, $(r, s) = 1$ and $r \neq 0$, and put $f(t) = (2 - Pt)/(1 - Pt + Qt^2)$, $D = P^2 - 4Q$ and $\alpha = (P + \sqrt{D})/2$. If $f(s/r)$ is an integer, then $(r - s\alpha)/(r - s\beta)$ is an invertible element of $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.*

Proof. By Lemma 3.2, $2r - Ps$ is divisible by $r^2 - Prs + Qs^2$. Put now $\eta = r - s\alpha$ and $\bar{\eta} = r - s\beta$. Then, we have $\text{Nr } \eta = \text{Nr } \bar{\eta} = r^2 - Prs + Qs^2$ and $\eta + \bar{\eta} = 2r - Ps$. These imply that $\text{Nr } \eta/\bar{\eta} = 1$ and $1/\eta + 1/\bar{\eta} \in \mathbb{Z}$, and therefore, $\eta/\bar{\eta} \in \mathbb{Z}[\eta] \subset \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Hence the result.

Lemma 3.4. *Let $P, Q \in \mathbb{Z}$. Assume that $P^2 - 4Q \neq 0$. Let α and β be the roots of the quadratic equation $t^2 - Pt + Q = 0$. Then we have:*

- (1) $\frac{L_{n+1} - \alpha L_n}{L_{n+1} - \beta L_n} = \frac{\beta^n}{\alpha^n} = \frac{\beta^{2n}}{Q^n},$
- (2) $\frac{S_{n+1} - \alpha S_n}{S_{n+1} - \beta S_n} = -\frac{\beta^n}{\alpha^n} = -\frac{\beta^{2n}}{Q^n},$
- (3) $\frac{(L_{n+2} - L_{n+1}) - \alpha(L_{n+1} - L_n)}{(L_{n+2} - L_{n+1}) - \beta(L_{n+1} - L_n)} = -\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^n} = -\beta^{2n+1} \text{ if } Q = 1,$
- (4) $\frac{(L_{n+2} + L_{n+1}) - \alpha(L_{n+1} + L_n)}{(L_{n+2} + L_{n+1}) - \beta(L_{n+1} + L_n)} = \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^n} = \beta^{2n+1} \text{ if } Q = 1.$

Proof. We can readily verify (1) and (2), noting

$$\begin{aligned} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha(\alpha^n - \beta^n) &= (\alpha - \beta)\beta^n, \quad (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \beta(\alpha^n - \beta^n) = (\alpha - \beta)\alpha^n, \\ (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha(\alpha^n + \beta^n) &= -(\alpha - \beta)\beta^n, \quad (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \beta(\alpha^n + \beta^n) = (\alpha - \beta)\alpha^n. \end{aligned}$$

Assume now $Q = 1$. Then we obtain $\alpha\beta = 1$, and therefore,

$$\begin{aligned}
(L_{n+2} - L_{n+1}) - \alpha(L_{n+1} - L_n) &= \frac{\beta^{n+1} - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^{n+1}(1 - \alpha)}{\alpha - \beta}, \\
(L_{n+2} - L_{n+1}) - \beta(L_{n+1} - L_n) &= \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n(\alpha - 1)}{\alpha - \beta}, \\
(L_{n+2} + L_{n+1}) - \alpha(L_{n+1} + L_n) &= \frac{\beta^{n+1} + \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^{n+1}(1 + \alpha)}{\alpha - \beta}, \\
(L_{n+2} + L_{n+1}) - \beta(L_{n+1} + L_n) &= \frac{\alpha^{n+1} + \alpha^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n(\alpha + 1)}{\alpha - \beta}.
\end{aligned}$$

Theorem 3.5. Let $P, Q \in \mathbb{Z}$ with $P \neq 0$, $Q = \pm 1$ and $P^2 - 4Q > 0$. Put $f(t) = (2 - Pt)/(1 - Pt + Qt^2)$.

(1) Assume $Q = -1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ or S_n/S_{n+1} for some $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Assume $Q = 1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$, S_n/S_{n+1} , $(L_{n+1} - L_n)/(L_{n+2} - L_{n+1})$ or $(L_n + L_{n+1})/(L_{n+2} + L_{n+1})$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. As is remarked in Formulas 1.9, we have

$$f\left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right) = -\frac{S_{n+1}L_n}{Q^n} \in \mathbb{Z}, \quad f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \frac{L_{n+1}S_n}{Q^n} \in \mathbb{Z}.$$

Moreover, in the case of $Q = 1$, we can verify

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{L_{n+1} - L_n}{L_{n+2} - L_{n+1}}\right) &= -(L_{n+2} - L_{n+1})(L_{n+1} + L_n) \in \mathbb{Z}, \\
f\left(\frac{L_{n+1} + L_n}{L_{n+2} + L_{n+1}}\right) &= (L_{n+2} + L_{n+1})(L_{n+1} - L_n) \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

noting

$$\begin{aligned}
(L_{n+2} - L_{n+1})^2 - P(L_{n+2} - L_{n+1})(L_{n+1} - L_n) + (L_{n+1} - L_n)^2 &= 2 - P, \\
2(L_{n+2} - L_{n+1}) - P(L_{n+1} - L_n) &= -(2 - P)(L_{n+1} + L_n),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(L_{n+2} + L_{n+1})^2 - P(L_{n+2} + L_{n+1})(L_{n+1} + L_n) + (L_{n+1} + L_n)^2 &= 2 + P, \\
2(L_{n+2} + L_{n+1}) - P(L_{n+1} + L_n) &= (2 + P)(L_{n+1} - L_n),
\end{aligned}$$

repectively.

Conversely, assume that $f(q)$ is an integer. Put

$$D = P^2 - 4Q, \quad \alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{2}, \quad \beta = \frac{P - \sqrt{D}}{2}.$$

Then α is invertible in the ring $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Now we assume $(P, Q) \neq (\pm 3, 1)$, which implies that α generates the multiplicative group $\mathbb{Z}[\alpha]^\times / \{\pm 1\}$ by Lemma 2.1. Put

$$q = \frac{s}{r}, r, s \in \mathbb{Z} \text{ with } (r, s) = 1.$$

Then, by Corollary 3.3, $(r - s\alpha)/(r - s\beta)$ is an invertible element of $\mathbb{Z}[\alpha]$.

First assume $Q = -1$. Then we have

$$\frac{r - s\alpha}{r - s\beta} = \pm(-1)^n \beta^{2n}$$

for some $n \in \mathbb{Z}$ since $\text{Nr}(r - \alpha s) = \text{Nr}(r - \beta s)$ and $\text{Nr} \beta = -1$. Hence we obtain

$$(s : r) = (L_n : L_{n+1}) \text{ or } (S_n : S_{n+1})$$

by Lemma 3.1 and Lemma 3.4.

Assume now $Q = 1$. Then we have

$$\frac{r - s\alpha}{r - s\beta} = \pm \beta^{2n} \text{ or } \frac{r - s\alpha}{r - s\beta} = \mp \beta^{2n+1}$$

for some $n \in \mathbb{Z}$. Then we obtain

$$(s : r) = (L_n : L_{n+1}), (S_n : S_{n+1}), (L_{n+1} - L_n : L_{n+2} - L_{n+1}) \text{ or } (L_{n+1} + L_n : L_{n+2} + L_{n+1})$$

again by Lemma 3.1 and Lemma 3.4.

We treat the case of $(p, Q) = (\pm 3, 1)$ separately in 3.6 and 3.7.

Remark 3.5.1. In the case of $Q = 1$, we have

$$\frac{L_{-n-1} - L_{-n-2}}{L_{-n} - L_{-n-1}} = \frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n}, \quad \frac{L_{-n-1} + L_{-n-2}}{L_{-n} + L_{-n-1}} = \frac{L_{n+2} + L_{n+1}}{L_{n+1} + L_n}$$

and

$$f\left(\frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n}\right) = f\left(\frac{L_{n+1} + L_n}{L_{n+2} + L_{n+1}}\right), \quad f\left(\frac{L_{n+1} + L_n}{L_{n+2} + L_{n+1}}\right) = f\left(\frac{L_{n+1} - L_n}{L_{n+2} - L_{n+1}}\right).$$

Proposition 3.6.1. (The case of $P = 3$ and $Q = 1$) Put $f(t) = (2t - 3)/(1 - 3t + t^2)$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then $f(q)$ is an integer if and only if $q = F_n/F_{n+2}$ or Λ_n/Λ_{n+2} for some $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. Put $\varepsilon = (1 + \sqrt{5})/2$. Then the roots of the quadratic equation $t^2 - 3t + 1 = 0$ are given by $\alpha = \varepsilon^2 = (3 + \sqrt{5})/2$ and $\beta = \varepsilon^{-2} = (3 - \sqrt{5})/2$. Furthermore, ε generates the multiplicative group $\mathbb{Z}[\varepsilon^2]^\times / \{\pm 1\} = \mathbb{Z}[\varepsilon]^\times / \{\pm 1\}$.

Now put

$$q = \frac{s}{r}, r, s \in \mathbb{Z} \text{ with } (r, s) = 1,$$

and assume that $f(q)$ is an integer. Then, By Corollary 3.3, there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that

$$\frac{r - s\alpha}{r - s\beta} = \pm \varepsilon^{-2n}$$

since $\text{Nr}(r - \alpha s) = \text{Nr}(r - \beta s)$ and $\text{Nr} \varepsilon = -1$. That is to say, there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that

$$\frac{r - s\alpha}{r - s\beta} = \pm \beta^n.$$

Hence we obtain

$$(s : r) = (L_n : L_{n+1}), (S_n : S_{n+1}), (L_{n+1} - L_n : L_{n+2} - L_{n+1}) \text{ or } (L_{n+1} + L_n : L_{n+2} + L_{n+1})$$

by Lemma 3.1 and Lemma 3.4. At last, we obtain the result, noting

$$L_n = F_{2n}, S_n = \Lambda_{2n}, L_{n+1} - L_n = F_{2n+1}, L_{n+1} + L_n = \Lambda_{2n+1}.$$

Remark 3.6.2. Let $\{L_k\}_{k \geq 0}$ denote the Lucas sequence associated to $(P, Q) = (3, 1)$. Then we have $\{F_{2k}\}_{k \geq 0} = \{L_k\}_{k \geq 0}$ and $\{F_{2k+1}\}_{k \geq 0} = \{L_{k+1} - L_k\}_{k \geq 0}$, as is remarked in 2.4.2, and $\{\Lambda_{2k}\}_{k \geq 0} = \{S_k\}_{k \geq 0}$ and $\{\Lambda_{2k+1}\}_{k \geq 0} = \{L_{k+1} + L_k\}_{k \geq 0}$.

We can similarly prove the following:

Proposition 3.7.1. (The case of $P = -3$ and $Q = 1$) Put $f(t) = (2t + 3)/(1 + 3t + t^2)$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then $f(q)$ is an integer if and only if $q = -F_n/F_{n+2}$ or $-\Lambda_n/\Lambda_{n+2}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

Remark 3.7.2. Let $\{L_k\}_{k \geq 0}$ denote the Lucas sequence associated to $(P, Q) = (-3, 1)$. Then we have $\{(-1)^{k-1}F_{2k}\}_{k \geq 0} = \{L_k\}_{k \geq 0}$ and $\{(-1)^k F_{2k+1}\}_{k \geq 0} = \{L_{k+1} + L_k\}_{k \geq 0}$, as is remarked in 2.5.2, and $\{(-1)^k \Lambda_{2k}\}_{k \geq 0} = \{S_k\}_{k \geq 0}$ and $\{(-1)^k \Lambda_{2k+1}\}_{k \geq 0} = \{L_{k+1} - L_k\}_{k \geq 0}$.

4. Preceeding results

4.1. Let N be a positive integer. Assume that N is not a square. Let (a, b) denote the minimal solution of the Pell equation $x^2 - Ny^2 = \pm 1$. Define two integer sequences $\{U_n\}_{n \geq 0}$ and $\{V_n\}_{n \geq 0}$ by

$$U_n = \frac{(a + b\sqrt{N})^n - (a - b\sqrt{N})^n}{2\sqrt{N}}$$

and

$$V_n = \frac{(a + b\sqrt{N})^n + (a - b\sqrt{N})^n}{2}.$$

Put $P = 2a$ and $Q = a^2 - Nb^2 = \pm 1$. Then $\{U_n\}_{n \geq 0}, \{V_n\}_{n \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Z})$. The generating functions of $\{U_n\}_{n \geq 0}$ and $\{V_n\}_{n \geq 0}$ are given by

$$\frac{bt}{1 - Pt + Qt^2}$$

and

$$\frac{1}{2} \frac{1 - at}{1 - Pt + Qt^2},$$

respectively. We have also

$$U_n = bL_n, V_n = \frac{1}{2}S_n$$

for each $n \in \mathbb{Z}$, where $\{L_n\}_{n \geq 0}$ and $\{S_n\}_{n \geq 0}$ denote the Lucas sequence and the companion Lucas sequence associated to (P, Q) , respectively.

Tsuno [6] proves the following assertions:

(1) Put $f(t) = \frac{bt}{1 - Pt + Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $f(q)$ is an integer if and only if $q = U_n/U_{n+1}$ or QU_{n+1}/U_n for some $n \geq 0$.

(2) Put $f(t) = \frac{1}{2} \frac{1-at}{1-Pt+Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $f(q)$ is an integer if and only if $q = U_n/U_{n+1}$, V_n/V_{n+1} , $q = QU_{n+1}/U_n$ or QV_{n+1}/V_n for some $n \geq 0$.

Noting

$$U_n/U_{n+1} = L_n/L_{n+1}, U_{n+1}/U_n = L_{n+1}/L_n, V_n/V_{n+1} = S_n/S_{n+1}, V_{n+1}/V_n = S_{n+1}/S_n$$

and

$$L_{n+1}/L_n = QL_{-n-1}/L_{-n}, S_{n+1}/S_n = QS_{-n-1}/S_{-n},$$

we can restate the above assertions as follows:

(1)' Put $f(t) = \frac{bt}{1-Pt+Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $f(q)$ is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

(2)' Put $f(t) = \frac{1}{2} \frac{1-at}{1-Pt+Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $f(q)$ is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ or S_n/S_{n+1} for some $n \in \mathbb{Z}$.

Now we deduce these assertions from ours.

In the case of (1)' we have

$$f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \frac{bL_{n+1}L_n}{Q^n} \in \mathbb{Z}.$$

Conversely, put $q = s/r$ ($r, s \in \mathbb{Z}$ with $(r, s) = 1$), and assume that $f(q)$ is an integer. Then b is divisible by $r^2 - Prs + Qs^2$ since brs is divisible by $r^2 - Prs + Qs^2$ and $(rs, r^2 - Prs + Qs^2) = 1$. Put now $\eta = (r + sa) - sb\sqrt{N}$ and $d = (r + sa, sb)$. Then $\text{Nr } \eta = r^2 - Prs + Qs^2$. Moreover, η/d is invertible in $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]$,

Indeed, b is divisible by d^2 and b/d^2 is divisible by $\text{Nr}(\eta/d)$ since b is divisible by $\text{Nr } \eta$. Assume now $\text{Nr}(\eta/d) \neq \pm 1$, and let p be a prime divisor of $\text{Nr}(\eta/d)$. Then, we could conclude that b/d and $(r + sa)/d$ are both divisible by p , noting

$$\text{Nr } \frac{\eta}{d} = \left(\frac{r + sa}{d}\right)^2 - s^2\left(\frac{b}{d}\right)^2.$$

However, this contradicts the fact that $(r + sa)/d$ and b/d are prime to each other.

The multiplicative group $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]^\times / \{\pm 1\}$ is generated by $\alpha = a + b\sqrt{N}$ since (a, b) is the minimal solution of the Pell equation $x^2 - Ny^2 = \pm 1$. Hence, we obtain $(r - s\alpha)/d = \pm \beta^n$ and $(r - s\beta)/d = \pm \alpha^n$, and therefore $r/s = L_{n+1}/L_n$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

On the other hand, in the case of (2)' we have

$$\begin{aligned} f\left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right) &= \frac{S_{n+1}L_n}{2}, \quad f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = -\frac{L_{n+1}S_n}{2}, \\ f\left(\frac{L_{n+1} - L_n}{L_{n+2} - L_{n+1}}\right) &= -\frac{1}{2}(L_{n+2} - L_{n+1})(L_{n+1} + L_n), \\ f\left(\frac{L_{n+1} + L_n}{L_{n+2} + L_{n+1}}\right) &= \frac{1}{2}(L_{n+2} + L_{n+1})(L_{n+1} - L_n). \end{aligned}$$

Hence, we can conclude

$$f\left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right), f\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) \in \mathbb{Z},$$

noting that S_k is even for each $k \in \mathbb{Z}$ since $S_0 = 2$ and $S_1 = 2$. Furthermore, we can verify $L_k \equiv k \pmod{2}$ for each k , noting $L_0 = 0$, $L_1 = 1$ and $L_2 \equiv 0 \pmod{2}$. Hence we obtain

$$f\left(\frac{L_{n+1} - L_n}{L_{n+2} - L_{n+1}}\right), f\left(\frac{L_{n+1} + L_n}{L_{n+2} + L_{n+1}}\right) \notin \mathbb{Z}.$$

4.2. Let N be a positive integer. Assume that N is not a square. Let (a, b) denote the minimal solution of the Pell equation $x^2 - Ny^2 = \pm 4$. Define two integer sequences $\{U_n\}_{n \geq 0}$ and $\{V_n\}_{n \geq 0}$ by

$$U_n = \frac{(a + b\sqrt{N})^n - (a - b\sqrt{N})^n}{2^n \sqrt{N}}$$

and

$$V_n = \frac{(a + b\sqrt{N})^n + (a - b\sqrt{N})^n}{2^n}.$$

Put $P = a$ and $Q = (a^2 - Nb^2)/4 = \pm 1$. Then $\{U_n\}_{n \geq 0}, \{V_n\}_{n \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q, \mathbb{Z})$. The generating functions of $\{U_n\}_{n \geq 0}$ and $\{V_n\}_{n \geq 0}$ are given by

$$\frac{bt}{1 - Pt + Qt^2}$$

and

$$\frac{2 - at}{1 - Pt + Qt^2},$$

respectively. We have also

$$U_n = bL_n, \quad V_n = S_n$$

for each $n \in \mathbb{Z}$, where $\{L_n\}_{n \geq 0}$ and $\{S_n\}_{n \geq 0}$ denote the Lucas sequence and the companion Lucas sequence associated to (P, Q) , respectively.

Tsuno [7] proves the following assertions, under the assumption $N \geq 5$:

- (1) Put $f(t) = \frac{bt}{1 - Pt + Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $f(q)$ is an integer if and only if $q = U_n/U_{n+1}$ or QU_{n+1}/U_n for some $n \geq 0$.
- (2) Put $f(t) = \frac{1}{2} \frac{1 - at}{1 - Pt + Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then:
 - (a) Assume $Q = -1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = U_n/U_{n+1}$, $-U_{n+1}/U_n$, V_n/V_{n+1} or $-V_{n+1}/V_n$ for some $n \in \mathbb{Z}$.
 - (b) Assume $Q = 1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = \pm 1$ or $q = U_n/U_{n+1}$, U_n/U_{n+1} , V_n/V_{n+1} , V_{n+1}/V_n , $U_{2n-1}/(U_{2n} \pm U_1)$ or $U_{2n+1}/(U_{2n+1} \pm U_1)$ some $n \in \mathbb{Z}$.

We can restate (1) and (2) as follows:

- (1)' Put $f(t) = \frac{bt}{1 - Pt + Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then, $f(q)$ is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.
- (2)' Put $f(t) = \frac{2 - at}{1 - Pt + Qt^2}$, and let $q \in \mathbb{Q}$. Then:
 - (a) Assume $Q = -1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$ or S_n/S_{n+1} for some $n \in \mathbb{Z}$.
 - (b) Assume $Q = 1$. Then, $f(q)$ ($q \in \mathbb{Q}$) is an integer if and only if $q = L_n/L_{n+1}$, S_n/S_{n+1} , $(L_n - L_{n-1})/(L_{n+1} - L_n)$ or $(L_n - L_{n-1})/(L_{n+1} - L_n)$ some $n \in \mathbb{Z}$.

Indeed, we can deduce the assertion (1)' from Theorem 2.3 as in 4.1. Now we deduce the assertion (2)' from Theorem 3.5. First note

$$U_n/U_{n+1} = L_n/L_{n+1}, \quad U_{n+1}/U_n = L_{n+1}/L_n, \quad V_n/V_{n+1} = S_n/S_{n+1}, \quad V_{n+1}/V_n = S_{n+1}/S_n$$

and

$$L_{n+1}/L_n = QL_{-n-1}/L_{-n}, \quad S_{n+1}/S_n = QS_{-n-1}/S_{-n},$$

Furthermore, if $Q = 1$, then we have

$$\frac{L_0 - L_{-1}}{L_1 - L_0} = 1, \quad \frac{L_0 + L_{-1}}{L_1 - L_0} = -1$$

and

$$\begin{aligned} \frac{L_n - L_{n-1}}{L_{n+1} - L_n} &= \frac{L_{2n-1}}{L_{2n} - 1}, \quad \frac{L_n + L_{n-1}}{L_{n+1} + L_n} = \frac{L_{2n-1}}{L_{2n} + 1}, \\ \frac{L_{n+1} + L_n}{L_n + L_{n-1}} &= \frac{L_{2n+1}}{L_{2n} - L_1}, \quad \frac{L_{n+1} - L_n}{L_n - L_{n-1}} = \frac{L_{2n+1}}{L_{2n} + L_1}, \end{aligned}$$

which follow from

$$(L_n - L_{n-1})(L_{2n} - 1) = L_{2n-1}(L_{n+1} - L_n), \quad (L_n + L_{n-1})(L_{2n} + 1) = L_{2n-1}(L_{n+1} + L_n),$$

$$(L_{n+1} + L_n)(L_{2n} - L_1) = L_{2n+1}(L_n + L_{n-1}), \quad (L_{n+1} - L_n)(L_{2n} + L_1) = L_{2n+1}(L_n - L_{n-1}),$$

respectively. We can honestly verify these equalities, using the formula

$$L_n L_m = \frac{S_{n+m} - S_{n-m}}{D}.$$

Hence, the assertion (2)' is nothing but Theorem 3.5.

5. An observation

In this section, we fix $P, Q \in \mathbb{Z}$ and put $D = P^2 - 4Q$.

Notation 5.1. Let $P, Q \in \mathbb{Z}$. As is well known, the map $\{w_k\}_{k \geq 0} \mapsto (w_0, w_1)$ gives rise to a $\mathbb{Q}$ -linear isomorphism $\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^2$.

Now put $\tilde{R} = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q)$ and $\theta = t \pmod{(t^2 - Pt + Q)}$. We define a $\mathbb{Q}$ -linear map $\omega : \tilde{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ by $\omega(a + b\theta) = b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Moreover, we define a $\mathbb{Q}$ -linear map $\tilde{\omega} : \tilde{R} \rightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ by $\tilde{\omega}(\eta) = \{\omega(\eta\theta^k)\}_{k \geq 0}$. For $\eta = a + b\theta \in \tilde{R}$, we have $\tilde{\omega}(\eta) = \{b, a + Pb, \dots\}$.

We can verify the following statements, paraphrasing the proofs of [4, Prop.3.2 and Cor.3.3].

- (1) The $\mathbb{Q}$ -linear map $\tilde{\omega} : \tilde{R} \rightarrow \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ is bijective.
- (2) A $\mathbb{Q}$ -algebra structure of $\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$ is defined through the $\mathbb{Q}$ -linear isomorphism $\tilde{\omega} : \tilde{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$. Then the Lucas sequence $\{L_k\}_{k \geq 0} = \tilde{\omega}(1)$ is the unit of the ring $\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$.

More precisely, let $\mathbf{w} = \{w_k\}_{k \geq 0}, \mathbf{w}' = \{w'_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$. Then the product of $\mathbf{w}$ and $\mathbf{w}'$ is given by

$$(w_0 w'_1 + w_1 w'_0 - P w_0 w'_0, w_1 w'_1 - Q w_0 w'_0, \dots).$$

It is readily seen that the multiplication by θ on $\tilde{R}$ induces the shift operation $\{w_k\}_{k \geq 0} \mapsto \{w_{k+1}\}_{k \geq 0}$ on $\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$ through the isomorphism $\tilde{\omega} : \tilde{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$.

(3) Let $\eta = a + b\theta \in \tilde{R} = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q)$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Then $\eta \mapsto \bar{\eta}$ gives rise to a $\mathbb{Q}$ -automorphism of $\tilde{R}$. Moreover, we define $\text{Nr } \eta \in \mathbb{Q}$ by $\text{Nr } \eta = \eta\bar{\eta} = a^2 + Pab + Qb^2$. For example, we have $\text{Nr } \theta = Q$. Obviously, η is invertible in $\tilde{R}$ if and only if $\text{Nr } \eta \neq 0$.

Now let $\mathbf{w} = \{w_k\}_{k \geq 0} \in \mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$. Define $\Delta(\mathbf{w}) \in \mathbb{Q}$ by $\Delta(\mathbf{w}) = w_1^2 - Pw_0w_1 + Qw_0^2$. If $\eta \in \tilde{R}$ and $\mathbf{w} = \tilde{\omega}(\eta)$, then we have $\text{Nr } \eta = \Delta(\mathbf{w})$. Therefore, the sequence $\mathbf{w} = \{w_k\}_{k \geq 0}$ is invertible in $\mathcal{L}(P, Q; \mathbb{Q})$ if and only if $\Delta(\mathbf{w}) = w_1^2 - Pw_0w_1 + Qw_0^2 \neq 0$.

Notation 5.2. We put $\delta = -P + 2\theta \in \tilde{R}$. Then we have $\delta^2 = D$ and $\text{Nr } \delta = -D$. The sequence $\tilde{\omega}(\delta)$ is nothing but the companion Lucas sequence $(S_k)_{k \geq 0}$ associated to (P, Q) .

Notation 5.3. We define groups $G_{P,Q}(\mathbb{Q})$, $G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})$ and $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ by

$$\begin{aligned} G_{P,Q}(\mathbb{Q}) &= (\mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q))^\times, \\ G_{(P,Q)}(\mathbb{Q}) &= \text{Coker}[i : \mathbb{Q}^\times \rightarrow (\mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q))^\times], \\ U_{P,Q}(\mathbb{Q}) &= \text{Ker}[\text{Nr} : (\mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q))^\times \rightarrow \mathbb{Q}^\times]. \end{aligned}$$

Here $i : \mathbb{Q}^\times \rightarrow (\mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q))^\times$ denotes the inclusion map. Moreover, we define a homomorphism of groups $\gamma : G_{P,Q}(\mathbb{Q}) \rightarrow U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ by $\gamma(\eta) = \eta/\bar{\eta} = \eta^2/\text{Nr } \eta$. Then we have $\text{Ker}[\gamma : G_{P,Q}(\mathbb{Q}) \rightarrow U_{P,Q}(\mathbb{Q})] = \mathbb{Q}^\times$, and γ is surjective by Hilbert 90. Hence γ induces an isomorphism of groups $\tilde{\gamma} : G_{(P,Q)}(\mathbb{Q}) = G_{P,Q}(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}^\times \xrightarrow{\sim} U_{P,Q}(\mathbb{Q})$. It is readily seen:

- (a) If D is a square in $\mathbb{Q}^\times$, then $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ is isomorphic to the multiplicative group $\mathbb{Q}^\times$;
- (b) If $D = 0$, then $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ is isomorphic to the additive group $\mathbb{Q}$;
- (c) If D is not a square in $\mathbb{Q}$, then $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ is isomorphic to the multiplicative group $\text{Ker}[\text{Nr} : \mathbb{Q}(\sqrt{D})^\times \rightarrow \mathbb{Q}^\times]$.

Hence, if $D \neq 0$, then we obtain $\gamma(\delta) = -1$, which is a unique element of order 2 of $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$.

Assume now $Q \neq 0$. Then θ is invertible in $\tilde{R} = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q)$. Let Θ denote the subgroup of $G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})$ generated by θ . Then the group $G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is isomorphic to the group $G(f)$ defined by Laxton [2] under the assumptions: $(P, Q) = 1$ and $D = P^2 - 4Q \neq 0$ ([4, Th.4.2] and [5, Th.4.2]). Here $f(t) = t^2 - Pt + Q$.

Remark 5.3.1. The groups $G_{P,Q}(\mathbb{Q})$, $G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})$ and $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ are the $\mathbb{Q}$ -rational points of the group schemes $G_{P,Q}$, $G_{(P,Q)}$ and $U_{P,Q}$, respectively. For details, we refer to [4, Section 1] and [5, Section 1].

Hereafter, we investigate the elements of order 2 of $G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})/\Theta$.

Proposition 5.4. *Let $\eta \in G_{P,Q}(\mathbb{Q})$. Then:*

- (1) *There exists $\xi \in U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ such that $\xi^2 = \gamma(\eta)$ if and only if $\text{Nr } \eta$ is a square in $\mathbb{Q}$. In this case, the solutions of the equation $\xi^2 = \gamma(\eta)$ in $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ are given by $\xi = \pm\eta/\sqrt{\text{Nr } \eta}$.*
- (2) *Assume that $\text{Nr } \eta$ is a square in $\mathbb{Q}$, and put $\eta = u + v\delta$ ($u, v \in \mathbb{Q}$). If $Dv \neq 0$, then we have $\pm\eta/\sqrt{\text{Nr } \eta} = \gamma(\eta \pm \sqrt{\text{Nr } \eta})$.*

Proof. (1) Assume first that $\text{Nr } \eta$ is a square in $\mathbb{Q}$. Then we have $\pm\eta/\sqrt{\text{Nr } \eta} \in U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ and $(\pm\eta/\sqrt{\text{Nr } \eta})^2 = \eta^2/\text{Nr } \eta = \gamma(\eta)$.

Conversely, assume that there exists $\xi \in U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ such that $\xi^2 = \gamma(\eta)$. Taking $\tilde{\xi} \in G_{P,Q}(\mathbb{Q})$ such that $\gamma(\tilde{\xi}) = \xi$, we obtain $\eta = a\xi^2$ for some $a \in \mathbb{Q}^\times$. This implies $\text{Nr } \eta = a^2(\text{Nr } \xi)^2$.

(2) Put $\tilde{\xi} = \eta \pm \sqrt{\text{Nr } \eta}$. Then we obtain $\tilde{\xi}^2 = 2(u \pm \sqrt{\eta})\eta$, and therefore $\gamma(\tilde{\xi})^2 = \gamma(\eta)$ since $\text{Nr } \eta = u^2 - Dv^2 \neq u^2$.

Remark 5.5. Assume $D = 0$. Let $\eta = u + v\delta \in \tilde{R} = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - Pt + Q)$ ($u, v \in \mathbb{Q}$). Then we obtain $\eta^2 = u^2 + 2uv\delta$ and $\text{Nr } \eta = u^2$, noting $\delta^2 = D$. Hence, η is invertible in $\tilde{R}$ if and only if $u \neq 0$. In this case, we have $\gamma(\eta) = 1 + 2v\delta/u$, and the solutions of $\xi^2 = \gamma(\eta)$ in $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ are given by $\xi = \pm(1 + v\delta/u)$.

Corollary 5.6. Assume that $Q \neq 0$ and $D \neq 0$. Then there exists $\xi \in U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ such that $\xi^2 = \gamma(\theta)$ in $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ if and only if $Q = \text{Nr } \theta$ is a square in $\mathbb{Q}$. In this case, the solutions of the equation $\xi^2 = \gamma(\theta)$ in $U_{P,Q}(\mathbb{Q})$ are given by $\xi = \pm\theta/\sqrt{Q} = \gamma(\theta \pm \sqrt{Q})$.

The following assertion is a direct consequence of Corollary 5.6.

Corollary 5.7. Assume that $Q \neq 0$ and $D \neq 0$. Then:

- (1) If Q is a square in $\mathbb{Q}$ and $P \neq 0, \pm\sqrt{Q}$, then the kernel of the square map on $G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (2) If Q is not a square in $\mathbb{Q}$, then the kernel of the square map on $G_{(P,Q)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Example 5.8. Assume $Q = 1$ and $P \neq 0, \pm 1, \pm 2$. Then we have

$$\begin{aligned} (\theta + 1)^2 &= (P + 2)\theta, \quad \text{Nr}(\theta + 1) = P + 2, \quad \gamma(\theta + 1) = \theta, \\ (\theta - 1)^2 &= (P - 2)\theta, \quad \text{Nr}(\theta - 1) = -P + 2, \quad \gamma(\theta - 1) = -\theta, \\ (\theta + 1)(\theta - 1) &= P\theta - 2 = \theta\delta. \end{aligned}$$

Furthermore, the kernel of the square map on $G_{(P,1)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is given by $\{[\theta] = 1, [\theta + 1], [\theta - 1], [\delta]\}$.

Observation 5.9. Put $f(t) = (2 - t)/(1 - Pt + t^2)$, the generating function of the companion Lucas sequence associated to $(P, 1)$. Let $q \in \mathbb{Q}$. Theorem 3.5, Proposition 3.6.1 and Proposition 3.6.2 assert that $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = w_n/w_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$, where $\{w_k\}_{k \geq 0} = \tilde{\omega}(\eta)$ and $[\eta] \in \{[\theta], [\delta], [\theta + 1], [\theta - 1]\} \subset G_{(P,1)}(\mathbb{Q})/\Theta$. The author is not sure whether this is a chance or an appearance of a deeper fact. However, the following examples suggest that there is hidden something to consider.

Example 5.10.1. Let $P = 0$ and $Q = 1$. Then we have

$$\begin{aligned} \{L_k\}_{k \geq 0} &= \{0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}, \quad \{S_k\}_{k \geq 0} = \{2, 0, -2, 0, 2, 0, \dots\}, \\ \{L_{k+1} + L_k\}_{k \geq 0} &= \{1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots\}, \quad \{L_{k+1} - L_k\}_{k \geq 0} = \{1, -1, -1, 1, 1, -1, \dots\}, \end{aligned}$$

and the kernel of the square map on $G_{(P,1)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is given by $\{[\theta] = [\delta], [\theta + 1] = [\theta - 1]\}$. Moreover, let $q \in \mathbb{Q}$.

- (1) Put $f(t) = t/(1+t^2)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = 0$, i.e. $q = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.
- (2) Put $f(t) = 2/(1+t^2)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = 0, \pm 1$, i.e. $q = L_n/L_{n+1}$ or $(L_{n+1} + L_n)/(L_{n+2} + L_{n+1})$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

Example 5.10.2. Let $P = 1$ and $Q = 1$. Then we have

$$\{L_k\}_{k \geq 0} = \{0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, \dots\}, \{S_k\}_{k \geq 0} = \{2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, \dots\},$$

$$\{L_{k+1} + L_k\}_{k \geq 0} = \{1, 2, 1, -1, -2, -1, 2, 1, \dots\}, \{L_{k+1} - L_k\}_{k \geq 0} = \{1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, \dots\},$$

and the kernel of the square map on $G_{(P,1)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is given by $\{[\theta] = [\theta - 1], [\delta] = [\theta + 1]\}$. Moreover, let $q \in \mathbb{Q}$.

- (1) Put $f(t) = t/(1-t+t^2)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = 0, 1$, i.e. $q = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.
- (2) Put $f(t) = (2-t)/(1-t+t^2)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = 0, 1, 2, 1/2$, i.e. $q = L_n/L_{n+1}$ or S_n/S_{n+1} for some $n \in \mathbb{Z}$.

Example 5.10.3. Let $P = -1$ and $Q = 1$. Then we have

$$\{L_k\}_{k \geq 0} = \{0, 1, -1, 0, 1, \dots\}, \{S_k\}_{k \geq 0} = \{2, -1, -1, 2, -1, \dots\},$$

$$\{L_{k+1} + L_k\}_{k \geq 0} = \{1, 0, -1, 1, 0, \dots\}, \{L_{k+1} - L_k\}_{k \geq 0} = \{1, -2, 1, 1, -2, \dots\},$$

and the kernel of the square map on $G_{(P,1)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is given by $\{[\theta] = [\theta + 1], [\delta] = [\theta - 1]\}$. Moreover, let $q \in \mathbb{Q}$.

- (1) Put $f(t) = t/(1+t+t^2)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = 0, -1$, i.e. $q = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.
- (2) Put $f(t) = (2+t)/(1+t+t^2)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = 0, -1, -2, -1/2$, i.e. $q = L_n/L_{n+1}$ or S_n/S_{n+1} for some $n \in \mathbb{Z}$.

Example 5.10.4. Let $P = 2$ and $Q = 1$. Then we have

$$L_k = k1^{k-1}, S_k = 2 \cdot 1^k, L_{k+1} + L_k = 2k1^{k-1} + 1^k, L_{k+1} - L_k = 1^k$$

and the kernel of the square map on $G_{(P,1)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is given by $\{[\theta], [\theta + 1]\}$. Moreover, let $q \in \mathbb{Q}$.

- (1) Put $f(t) = t/(1-t)^2$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = n/(n+1) = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.
- (2) Put $f(t) = (2-2t)/(1-t)^2 = 2/(1-t)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = n/(n+1) = L_n/L_{n+1}$ or $q = (2n+1)/(2n+3) = (L_{n+1} + L_n)/(L_{n+2} + L_{n+1})$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

Example 5.10.5. Let $P = -2$ and $Q = 1$. Then we have

$$L_k = k(-1)^{k-1}, S_k = 2 \cdot (-1)^k, L_{k+1} + L_k = (-1)^k, L_{k+1} - L_k = -2k(-1)^{k-1} + (-1)^k$$

and the kernel of the square map on $G_{(P,1)}(\mathbb{Q})/\Theta$ is given by $\{[\theta], [\theta - 1]\}$. Moreover, let $q \in \mathbb{Q}$.

(1) Put $f(t) = t/(1+t)^2$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = -n/(n+1) = L_n/L_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Put $f(t) = (2+2t)/(1+t)^2 = 2/(1+t)$. Then, $f(q) \in \mathbb{Z}$ if and only if $q = -n/(n+1) = L_n/L_{n+1}$ or $q = -(2n+1)/(2n+3) = (L_{n+1} + L_n)/(L_{n+2} + L_{n+1})$ for some $n \in \mathbb{Z}$.

References.

- [1] D. S. Hong, When is the generating function for the Fibonacci numbers an integer? *College Mathematics Journal* 46 (2015) 110–112.
- [2] R. R. Laxton, On groups of linear recurrences, I. *Duke Math. J.* 36 (1969) 721–736.
- [3] P. Pongsriam, Integer values of generating functions for the Fibonacci and Lucas numbers. *College Mathematics Journal* 48 (2017) 97–101.
- [4] N. Suwa, Geometric aspects of Lucas sequences, I. *Tokyo J. Math.* 43 (2020) 75–136
- [5] N. Suwa, Geometric aspects of Lucas sequences, II. *Tokyo J. Math.* 43 (2020) 383–454
- [6] Y. Tsuno, Extended results on integer values of generating functions for sequences given by Pell's equation. *The Fibonacci Quarterly* 59 (2021) 158–166.
- [7] Y. Tsuno, Extended results on integer values of generating functions for sequences given by Pell's equation. II. (in Japanese) The 18th Conference, Tokyo, August 21, 2020, electronically published by the Fibonacci Association Japan.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, CHUO UNIVERSITY,
 1-13-27 KASUGA, BUNKYO-KU, TOKYO 112-8551, JAPAN
E-mail address: suwa@math.chuo-u.ac.jp

$\sigma(n) + \varphi(n) - 2n$ について

齋藤之理 (麻布中学 1 年生)

2022/8/25

1 はじめに

p を素数とすると、 $\sigma(n)$ を n の約数の和、 $\varphi(n)$ をオイラーのトーシェントとして、 $\sigma(p) + \varphi(p) - 2p = 0$ となるが、一般に $J(n) = \sigma(n) + \varphi(n) - 2n$ と拡張すると、 $J(n)$ の値によって整数を分類することや、 $J(n)$ の持つ性質を調べることができる。特に前者は素因数分解と深い関わりを持つ。見つけた性質について考察する。

2 関数と性質

以下、 p は素数、 $\sigma(n)$ を n の約数の和、 $\varphi(n)$ をオイラーのトーシェントとする。

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} d$$

$$\sigma(p) = \sum_{d|p} d = p + 1$$

$$\sigma(p^e) = \sum_{d|p^e} d = \sum_{i=0}^e p^i = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}$$

$$\gcd(n, m) = 1, \sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$$

$$\varphi(n) := \sum_{1 \leq m \leq n, \gcd(n, m)=1} 1$$

$$\varphi(p) = \sum_{1 \leq m \leq p, \gcd(p, m)=1} 1 = \sum_{1 \leq m < p} 1 = p - 1$$

$$\varphi(p^e) = \sum_{1 \leq m \leq p^e, \gcd(p^e, m)=1} 1 = p^e - \sum_{1 \leq m \leq p^e, p|m} 1 = p^e - p^{e-1}$$

$$\gcd(n, m) = 1, \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

3 $J(n)$ の定義

p を素数とすると、 $\sigma(p) + \varphi(p) - 2p = (p+1) + (p-1) - 2p = 0$ となる。
これを拡張して一般の自然数 n に対し、 $J(n) := \sigma(n) + \varphi(n) - 2n$ とおく。¹

4 素数冪 p^e の $J(p^e)$

p^e について考えると、

$e=1$ なら、

$$J(p^1) = J(p) = \sigma(p) + \varphi(p) - 2p = (p+1) + (p-1) - 2p = 0$$

となり、 $J(p) = 0$ 。これは、定義より当然の結果とも言える。

$e=2$ なら、

$$J(p^2) = \sigma(p^2) + \varphi(p^2) - 2p^2 = (1 + p + p^2) + (p^2 - p) - 2p^2 = 1$$

となり、 $J(p) = 1$ 。

$e > 2$ となる場合について考えると、

$$J(p^e) = \sigma(p^{e-2})$$

$$J(p^e) = \sigma(p^e) + \varphi(p^e) - 2p^e$$

$p-1$ を掛けて、

$$(p-1)J(p^e) = p^{e+1} - 1 + p^{e-1}(p-1)^2 - 2p^e(p-1)$$

$$(p-1)J(p^e) = p^{e+1} - 1 + p^{e-1}(p-1)^2 - 2p^e(p-1)$$

$$(p-1)J(n) = p^{e-1}(2p^2 - 2p + 1 - 2p^2 + 2p) - 1$$

$$(p-1)J(n) = p^{e-1} - 1$$

$$J(p^n) = \frac{p^{e-1}-1}{p-1} = \sigma(p^{e-2}) \geq 1 + p \geq 3$$

5 n と $J(n)$ がともに奇数の場合

$$J(n) = \sigma(n) + \varphi(n) - 2n$$

法を 2 とする合同式で書けば、

$$J(n) \equiv \sigma(n) + \varphi(n) - 2n \pmod{2}$$

これが奇数だから、 $\sigma(n) + \varphi(n) - 2n \equiv 1 \pmod{2}$

n は奇数なので、 n の素因数は全て奇数である。

その中で最小のものを q 、 q の冪数を e とすると、 $l = \frac{n}{q^e}$ を用いて、

$$\varphi(n) = \varphi(q^e l) = \varphi(q^e) \varphi(l) = (q-1)q^{e-1} \varphi(l)$$

$q-1$ で q は奇素数なので、 $q-1$ は偶数。よって $\varphi(n)$ は偶数。

$2n$ は当然偶数なので、

$\sigma(n) \equiv 1 \pmod{2}$ 。書き換えると、

$$\sigma(\prod_{i=1}^m p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^m \sigma(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=0}^{e_i} p_i^j \right)$$

$$\equiv \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=0}^{e_i} 1^j \right) \equiv \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=0}^{e_i} 1 \right) \equiv \prod_{j=0}^{e_i} (e_i + 1) \pmod{2}$$

¹ $J(n)$ は $I(n) = \sigma(n) - 2n$ に並ぶ記号としてこのようにしたが他に研究している方も多く、様々な記号で置かれている。

これが1と合同なので、 e_i は偶数よって n は平方数。

6 $mJ(n) < J(nm)$

$m > 1$ に対して、 $mJ(n) < J(nm)$ を示すには、
一般の素数 p に対して、 $pJ(n) < J(pn)$ を示して証明する。
そのために、 $\gcd(n, p) = 1$ の時と、それ以外 ($\gcd(n, p) > 1$) の時で場合分けする。

6.1 $\gcd(n, p) = 1$ の時

$\sigma(pn) = \sigma(p)\sigma(n) = (p+1)\sigma(n) = p\sigma(n) + \sigma(n)$ と、
 $\varphi(pn) = \varphi(p)\varphi(n) = (p-1)\varphi(n) = p\varphi(n) - \varphi(n)$ に注意し、
 $J(pn) = \sigma(pn) + \varphi(pn) - 2pn$
 $= p\sigma(n) + p\varphi(n) - 2pn + \sigma(n) - \varphi(n)$
ここで、 $\sigma(n) > n > \varphi(n)$ なので、
 $= pJ(n) + \sigma(n) - \varphi(n) > pJ(n)$

6.2 $\gcd(n, p) > 1$ の時

証明のために以下の補題を用います。

補題 3

$\gcd(p, n) > 1$ なら、
 $p\sigma(n) = p \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} pd = \sum_{p|d, d|pn} d < \sum_{d|pn} d = \sigma(pn)$

補題 4

$\gcd(p, n) > 1$ なら、 n を p で割れるだけ割り、 $n = p^e l$ (割れるだけ割るので $\gcd(p, l) = 1$) とすると、
 $p\varphi(n) = p\varphi(p^e l) = p\varphi(p^e)\varphi(l) = p(p^e - p^{e-1})\varphi(l) = (p^{e+1} - p^e)\varphi(l) = \varphi(p^{e+1}l) = \varphi(p^{e+1}l) = \varphi(pn)$

$J(pn) = \sigma(pn) + \varphi(pn) - 2pn$
 $> p\sigma(n) + p\varphi(n) - 2pn$
 $= pJ(n)$

6.3 定理の証明

$pJ(n) < J(pn)$ は、 p などの素数の積でかけるので $mJ(n) < J(nm)$
また、定理の一部として、 $m > 1$ を用いて $J(n) < J(mn)$ も成り立つ。
また、不等式は等号になることはないので、差が1以上あり、 $pJ(n) + 1 \leq J(pn)$
と書き直せて、

$m = p_1 p_2 p_3 \dots p_x$ ただし $(i < j \text{ なら } p_i > p_j)$ と書き換えると、もっと正確に、 $mJ(n) + \sum_{i=1}^x (\prod_{j=1}^i p_j) + 1 \leq J(mn)$ も言える。

7 $J(n)$ が 0 以上で 0,1,2 の時の形が決まっている

n が素数なら $J(n) = 0$ となり、
 $2 < 1 + p = J(p^3) < J(p^e) (e > 3)$ かつ、
 $2 = J(pq) < J(pqm)$ なので、 $J(n) \leq 2$ となる n は半素数か素数か素数の二乗のみ。
 $J(p) = 0, J(p^2) = 1, J(pq) = 2$ 。これは逆も言えるとわかる。
 これについては、他の方法でも既に示されている。

8 同じ素因数分解の形の時の $J(n)$ の値の比較

$\gcd(n, m) = 1, \gcd(n', m) = 1$ とすると、
 $J(nm) - J(n'm)$
 $= (\sigma(nm) + \varphi(nm) - 2nm) - (\sigma(n'm) + \varphi(n'm) - 2n'm)$
 $= (\sigma(n)\sigma(m) + \varphi(n)\varphi(m) - 2nm) - (\sigma(n')\sigma(m) + \varphi(n')\varphi(m) - 2n'm)$
 $= (\sigma(n) - \sigma(n'))\sigma(m) + (\varphi(n) - \varphi(n'))\varphi(m) - 2(n - n')m$
 n, n' を素数とすれば、
 $((n+1) - (n'+1))\sigma(m) + ((n-1) - (n'-1))\varphi(m) - 2(n - n')m$
 $= (n - n')\sigma(m) + (n - n')\varphi(m) - 2(n - n')m$
 $= (n - n')J(n)$
 よって、 $p > q$ として、
 $J(pm) - J(qm) > 0$ となる。
 n, n' を p^e, q^e で $p > q$ とすれば、
 $(\sigma(p^e) - \sigma(q^e))\sigma(m) + (\varphi(p^e) - \varphi(q^e))\varphi(m) - 2(p^e - q^e)m$
 $= (\sigma(p^{e-1}) + p^e - \sigma(q^{e-1}) - q^e)\sigma(m) + (p^e - p^{e-1} - q^e + q^{e-1})\varphi(m) - 2(p^e - q^e)m$
 $= (\sigma(p^{e-1}) - \sigma(q^{e-1}))\sigma(m) + (-p^{e-1} + q^{e-1})\varphi(m) + (p^e - q^e)J(n)$
 $= (\sigma(p^{e-2}) - \sigma(q^{e-2}))\sigma(m) + (p^{e-1} - q^{e-1})\sigma(m) + (-p^{e-1} + q^{e-1})\varphi(m) + (p^e - q^e)J(n)$
 $= (\sigma(p^{e-2}) - \sigma(q^{e-2}))\sigma(m) + (p^{e-1} - q^{e-1})(\sigma(m) - \varphi(m)) + (p^e - q^e)J(n) > 0$
 $p > q$ として、
 $J(p^e m) - J(q^e m) > 0$ よって、 $J(p^e m) > J(q^e m)$
 以上より、素因数分解の形が同じなら、大きな素数で作られた数の方が $J(n)$ の値が大きい。

9 $J(n)$ の下限

n の素因数の数が 2 つ以上なら、 $2 = J(2 \cdot 3) \leq J(pq) \leq J(p^e q^f) \leq J(p^e q^f m)$
 n の素因数の数が 3 つ以上なら、 $20 = J(2 \cdot 3 \cdot 5) \leq J(pqr) \leq J(p^e q^f r^g) \leq J(p^e q^f r^g m)$
 n の素因数の数が 4 つ以上なら、 $204 = J(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \leq J(pqrs) \leq J(p^e q^f r^g s^h) \leq J(p^e q^f r^g s^h \dots)$

10 $J(n) \neq 5$ の証明

n の素因数が 2 種類以上なら 20 以上になって、5 を超えてしまうので、素因数の個数は 2 個以下とわかる。

n が素数なら $J(p) = 0$ 、 n が素数の二乗なら $J(n) = 1$ となり、

$n = p^3$ なら

$$J(p^3) = p + 1$$

となり、4 は素数でないので 5 にならない。

もし $n = p^e (e > 3)$ なら

$$7 = J(2^4) \leq J(p^4) < J(n) \text{ つまり } 7 \leq J(n) \text{ となり、}$$

いずれも 5 にはならない

$n = pq$ の形ならば、

$$J(pq) = 2 \text{ これも 5 にはならない。}$$

n の素因数が 2 種類以上で pq の形でなければ、

$$8 = J(2^2 \cdot 3) < J(p^2q) < J(n)$$

5 にはならない

よって、5 は $J(n)$ の値域に含まれない。

11 $J(n) \neq 11$ の証明

n の素因数が 3 以上なら、 $J(n) > J(2 \cdot 3 \cdot 5) = \sigma(2 \cdot 3 \cdot 5) + \varphi(2 \cdot 3 \cdot 5) - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 72 + 8 - 60 = 20$ となって、11 を超えてしまうので、素因数の個数は 2 個以下とわかる。

n が素数なら $J(p) = 0$ 、 $n = p^2$ なら $J(n) = 1$ となり、

$$J(p^3) = \sigma(p) = p + 1$$

となり、10 は素数でないので 11 にならない。

$$J(p^4) = \sigma(p^2) = p^2 + p + 1$$

となり、

$$2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$3^2 + 3 + 1 = 13$$

$$p^2 + p + 1 > 13$$

より 11 にならない。もし $n = p^e (e > 3)$ なら

$$15 = J(2^5) \leq J(p^5) < J(n) \text{ つまり } 7 \leq J(n) \text{ となり、}$$

いずれも 5 にはならない

$n = pq$ の形ならば、

$$J(pq) = 2 \text{ これも 11 にはならない。}$$

$n = pq^2$ の形ならば、

$$J(pq^2) = 1 + p + 2q = 11$$

$$p + 2q = 10$$

p は偶数なので 2。

よって、 $q = 4$

4 は素数ではないので、矛盾となり、これも 11 にはならない。

$n = pq^3$ の倍数ならば、

$$J(n) \geq J(pq^3) = 1 + p + q + pq + 2q^2 \geq 1 + 3 + 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 28$$

$n = p^2 q^2$ の倍数ならば、
 $J(n) \geq J(p^2 q^2)$
 $= (p+q)^2 + (p+q) + 1 \geq (2+3)^2 + (2+3) + 1 \geq 31$ よって、11 も $J(n)$ の値域に含まれない。

12 $J(n) \neq 19$ の証明

n の素因数が 3 以上なら、
 $J(n) > J(2 \cdot 3 \cdot 5) = \sigma(2 \cdot 3 \cdot 5) + \varphi(2 \cdot 3 \cdot 5) - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
 $= 72 + 8 - 60 = 20$
 となって、19 を超えてしまうので、素因数の個数は 2 個以下とわかる。
 n の最大の素因数の乗数 e が 6 以上なら、 $J(n) \geq J(p^e) \geq J(2^e) = \sigma(2^{e-2}) \geq \sigma(2^{6-2}) = 31 > 19$ となるので、乗数は 5 以下を考える。
 $J(1) = 0$ より、1 は解にならない。
 $J(p) = 0$ より、 p は解にならない。
 $J(p^2) = 1$ より、 p^2 は解にならない。
 $J(p^3) = 99$ となる。この解は 19 までなく、以降は、20 以上になるので、存在しない。
 $J(p^4) = 99$ となる。この解は 5 までなく、以降は、31 以上になるので、存在しない。
 $J(p^5) = 99$ となる。この解は 3 までなく、以降は、40 以上になるので、存在しない。
 $J(pq) = 2$ より、 pq は解にならない。
 $n = p^2 q$ ならば、
 $J(p^2 q) = 2p + q + 1$ となる。これが 19 なら q は偶数なので、2、 p が 6 で素数ではない。 $n = p^3 q$ ならば、
 $J(p^3 q) = 2p^2 + pq + p + q + 1$ となる。よって、 $p^3 q$ の形をした n の $J(n)$ は、最低でも、 $p = 2, q = 3$ 等と置いた、20 以上である。
 よって、 $p^3 q$ の形をした n は解にならない。
 $n = p^2 q^2$ ならば、
 $J(p^2 q^2) = p^2 + 2pq + p + q^2 + q + 1$ となる。よって、 $p^2 q^2$ の形をした n の $J(n)$ は、最低でも、 $p = 2, q = 3$ 等と置いた、31 以上である。
 よって、 $p^2 q^2$ の形をした n は解にならない。

13 参考文献

「数学の研究を始めよう VI」 飯高茂 著 p.186-p.191
 「過剰指数の性質」 小林雅人 著 p.22

フィボナッチ数に関する定数の89倍と109倍について

岩淵 勇樹

2022-09-21

Abstract

フィボナッチ数を9で割った余りを数字として並べた定数に89という特別な数をかけると、ほとんど0と9だけの数を得ることができるわかりました。同様に、フィボナッチ数列を9で割った余りを逆に並べた定数に109という特別な数をかけると、これもほとんど0と9だけの数となります。この89と109は、黄金比が解となる方程式と関連があります。

1 定義

フィボナッチ数列を9の法の下で考えます。

$$F_0 = 0 \pmod{9} \quad (1)$$

$$F_1 = 1 \pmod{9} \quad (2)$$

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \pmod{9} \quad (3)$$

$$F = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1 \pmod{9} \quad (4)$$

$$2F = 0, 2, 2, 4, 6, 1, 7, 8, 6, 5, 2, 7, 0, 7, 7, 5, 3, 8, 2, 1, 3, 4, 7, 2 \pmod{9} \quad (5)$$

$$3F = 0, 3, 3, 6, 0, 6, 6, 3, 0, 3, 3, 6, 0, 6, 6, 3, 0, 3, 3, 6, 0, 6, 6, 3 \pmod{9} \quad (6)$$

$$4F = 0, 4, 4, 8, 3, 2, 5, 7, 3, 1, 4, 5, 0, 5, 5, 1, 6, 7, 4, 2, 6, 8, 5, 4 \pmod{9} \quad (7)$$

$$5F = 0, 5, 5, 1, 6, 7, 4, 2, 6, 8, 5, 4, 0, 4, 4, 8, 3, 2, 5, 7, 3, 1, 4, 5 \pmod{9} \quad (8)$$

$$6F = 0, 6, 6, 3, 0, 3, 3, 6, 0, 6, 6, 3, 0, 3, 3, 6, 0, 6, 6, 3, 0, 3, 3, 6 \pmod{9} \quad (9)$$

$$7F = 0, 7, 7, 5, 3, 8, 2, 1, 3, 4, 7, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 1, 7, 8, 6, 5, 2, 7 \pmod{9} \quad (10)$$

$$8F = 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8 \pmod{9} \quad (11)$$

9の法の下で、 F から $8F$ までの数列は $3F$ と $6F$ は項数8の循環数列、それ以外は項数24の循環数列となるので、8と24の最小公倍数である項数24の有限列として考えます。

数列 kF の第 n 項 (を9で割った余り) を上から n 桁目に割り当てた整数の定数 f_k を定義すると、 f_8 までの値は以下となります。

$$f_1 = 11235843718088764156281 \quad (12)$$

$$f_2 = 22461786527077538213472 \quad (13)$$

$$f_3 = 33606630336066303360663 \quad (14)$$

$$f_4 = 44832573145055167426854 \quad (15)$$

$$f_5 = 55167426854044832573145 \quad (16)$$

$$f_6 = 66303360663033606630336 \quad (17)$$

$$f_7 = 77538213472022461786527 \quad (18)$$

$$f_8 = 88764156281011235843718 \quad (19)$$

このうちフィボナッチ数列によって定義される f_1 を特に f と呼ぶことにします。

数列 kF の第 n 項 (を 9 で割った余り) を下から n 桁目に割り当てた整数の定数 $\tilde{f}_k$ を定義すると、 $\tilde{f}_8$ までの値は以下となります。

$$\tilde{f}_1 = 18265146788081734853211 \quad (20)$$

$$\tilde{f}_2 = 27431283577072568716422 \quad (21)$$

$$\tilde{f}_3 = 36606330366063303660633 \quad (22)$$

$$\tilde{f}_4 = 45862476155054137523844 \quad (23)$$

$$\tilde{f}_5 = 54137523844045862476155 \quad (24)$$

$$\tilde{f}_6 = 63303660633036606330366 \quad (25)$$

$$\tilde{f}_7 = 72568716422027431283577 \quad (26)$$

$$\tilde{f}_8 = 81734853211018265146788 \quad (27)$$

このうちフィボナッチ数列によって定義される $\tilde{f}_1$ を特に $\tilde{f}$ と呼ぶことにします。

2 定理

f_1 から f_8 に 89 という特別な数を掛けると、 f_1 はすべての桁が、 f_2 から f_8 は 2 桁を除いてすべての桁が 0 または 9 になります。

$$f_1 \times 89 = 11235843718088764156281 \times 89 = 09999900909099000099090090 \quad (28)$$

$$f_2 \times 89 = 22461786527077538213472 \times 89 = 19990990009099009009990080 \quad (29)$$

$$f_3 \times 89 = 33606630336066303360663 \times 89 = 29909900999099009990990070 \quad (30)$$

$$f_4 \times 89 = 44832573145055167426854 \times 89 = 39900990099099099009900060 \quad (31)$$

$$f_5 \times 89 = 55167426854044832573145 \times 89 = 49099009900099900990099050 \quad (32)$$

$$f_6 \times 89 = 66303360663033606630336 \times 89 = 59009990990099909900999040 \quad (33)$$

$$f_7 \times 89 = 77538213472022461786527 \times 89 = 6900900999009999099009030 \quad (34)$$

$$f_8 \times 89 = 88764156281011235843718 \times 89 = 79000099090099999900909020 \quad (35)$$

$\tilde{f}_1$ から $\tilde{f}_8$ に 109 という特別な数を掛けると、 $\tilde{f}_1$ は 2 桁を、 $\tilde{f}_2$ から $\tilde{f}_8$ は 3 桁を除いてすべての桁が 0 または 9 になります。

$$\tilde{f}_1 \times 109 = 18265146788081734853211 \times 109 = 1990900999900909098999999 \quad (36)$$

$$\tilde{f}_2 \times 109 = 27431283577072568716422 \times 109 = 2990009909900909990089998 \quad (37)$$

$$\tilde{f}_3 \times 109 = 36606330366063303660633 \times 109 = 3990090009900900099008997 \quad (38)$$

$$\tilde{f}_4 \times 109 = 45862476155054137523844 \times 109 = 4999009900900900990098996 \quad (39)$$

$$\tilde{f}_5 \times 109 = 54137523844045862476155 \times 109 = 5900990099000999009900895 \quad (40)$$

$$\tilde{f}_6 \times 109 = 63303660633036606330366 \times 109 = 6900099009000990090009894 \quad (41)$$

$$\tilde{f}_7 \times 109 = 72568716422027431283577 \times 109 = 7909990090000990009909893 \quad (42)$$

$$\tilde{f}_8 \times 109 = 81734853211018265146788 \times 109 = 8909099000000990900999892 \quad (43)$$

3 考察

3.1 桁上りの条件

f_1 を桁を 1 つずらして加算したとき、9 未満になる桁と 9 以上になる桁が分かります。式 (44) は繰り上がりのない筆算で、合計が 9 以上になる計算結果を $\hat{9}$ と表記しています。

$$\begin{array}{r} 011235843718088764156281 \\ + 112358437180887641562810 \\ \hline 12358\hat{9}\hat{9}7\hat{9}8\hat{9}88\hat{9}\hat{9}\hat{9}\hat{9}56\hat{9}8\hat{9}\hat{9}1 \\ \hline \hline 89f = 999990090909900009909009 \end{array} \quad (44)$$

$89f$ の各桁の値は $\hat{9}$ のときに 0、それ以外の人に 9 になることがわかりました。

3.2 89 と 109 が特別である理由

黄金比を解としてもつ方程式として、以下の 2 式があります。

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (45)$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (46)$$

この左辺に $x = 10$ を代入すると、前節までに現れた 89 と 109 が導かれます。

$$10^2 - 10 - 1 = 89 \quad (47)$$

$$10^2 + 10 - 1 = 109 \quad (48)$$

これはおそらく母関数に関係しているものと考えられます [3]。

補足

今回の研究は、千々松健氏が考案した「FLKM 系列」 [4] が巡回数としても知られる循環小数 $0.\dot{1}4285\dot{7}$ などのように捉えられるのではないかと思います、実験してみて発見したものです。

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7} \quad (49)$$

$$0.\dot{1}4285\dot{7} \times 7 = 0.\dot{9}9999\dot{9} \quad (50)$$

以下のように F によって生成される定数を循環小数として考えると、循環部の繰り上がりによって 0 と 9 以外の数が循環部に現れなくすることができます。

$$89 \times 0.\dot{0}1123584371808876415628\dot{1} \quad (51)$$

$$= 0.\dot{9}999900909090000990900\dot{9} \quad (52)$$

$$89 \times 0.\dot{0}2246178652707753821347\dot{2} \quad (53)$$

$$= 1.\dot{9}9990990009099009009990\dot{9} \quad (54)$$

$$109 \times 0.\dot{0}1826514678808173485321\dot{1} \quad (55)$$

$$= 1.\dot{9}9090099990090909900000\dot{0} \quad (56)$$

$$109 \times 0.\dot{0}2743128357707256871642\dot{2} \quad (57)$$

$$= 2.\dot{9}9000990990090999009000\dot{0} \quad (58)$$

参考文献

- [1] フィボナッチ数列と 89 と 109 @第 23 回日曜数学会 (著者発表の動画)
<https://www.nicovideo.jp/watch/sm40009365>
- [2] Sunday Math Party 23 Fibonacci 89 109 (著者によるスライド)
<https://speakerdeck.com/butchi/sunday-math-party-23-fibonacci-89-109>
- [3] 小数展開にフィボナッチ数列 etc. が出てくる分数 (後編) - tsujimotter のノートブック
<https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/fractions-with-fibonacci-sequence-in-decimal-expansion-2>
- [4] 黄金比 (Φ と ϕ) とフィボナッチ数列の関係について - FLKM 系列の誕生秘話: 千々松 健 -
http://8w1hflkm.jp/Fai_F.html