日本フィボナッチ協会
第21回研究集会報告書

2023年8月

日本フィボナッチ協会

フィボナッチ数に関心のある皆様へ

第 21 回日本フィボナッチ研究集会

3 年ぶりに対面での研究集会を開催することができました．ここに，当日（8 月 25 日，東京理科大学）の講演者 11 名の発表論文を掲載しました．今回は特別に，「日本フィボナッチ協会の２５年」と題して，本研究集会がどのように始まったかを中村滋先生に書いていただきました．

研究集会では，新しく参加された方々から，来年は我々も準備をして喋りたいとのお声をいただき，また，今回は懇親会を催すことが叶わなかったために，集会が終わった後も長時間有意義な意見交換があったと聞きおよぶにいたり，やはり懇親会というものが重要な時間を提供していたことをあらためて認識しました．

『第 21 回フィボナッチ数とその応用に関する国際会議』は 2024 年 7 月 8 日〜7 月 12 日に *Harvey Mudd College*（ロサンゼルス近く）で開かれます．参加する予定の方連絡をください．

日本フィボナッチ協会代表　　大関清太

日本フィボナッチ協会／第21回研究集会　プログラム

10:30～10:35　開会の辞

司会 大関清太

10:35～ 11:00　久保田和臣（放送大学教養学部　心理と教育コース）

$\sqrt{5}$ の求め方(2)

11:00～11:25　岩淵 勇樹

フィボナッチ平方数144による円の分割

11:25～11:50　中村　滋　（元東京海洋大学）

フィボナッチ数とドジスンの公式との関係

11:50～13:20 昼食、展示、数学体験館・近代科学資料館見学

司会　飯高茂

13:20～13:45　小松尚夫（浙江理工大学）

フィボナッチ三つ組みのフロベニウス問題

13:45～14:10　津野祐司（和歌山工業高等専門学校　総合教育科）

フィボナッチ多項式の生成関数を整数係数多項式にする有理関数について

14:10～14:35　後藤良彰（小樽商科大学），渋川元樹（神戸大学）

実定数係数二階線型常差分方程式の解の単調性について

14:35～15:05　休憩

司会　中村 滋

15:05～15:30　飯高茂　（元学習院大学）

1文字完全数

15:30～15:45　齋藤之理（麻布中学校2年）

ϕ^2　完全数について

15:45～16:10　澤田晴丈（津山高専4年）,岡崎莉輝斗（津山高専4年），松田修（津山高専）

交代完全数の研究

16:10～16:35　片山真一（徳島大学）

一次不定方程式と油分け算

16:35～17:00　萩原幸男（元東京大学・元日本大学），立井博子（元津田塾大）

リュカ数さがし

17:00～17:05 事務連絡

17:05～17:10　閉会の辞

中村　滋　「日本フィボナッチ協会の２５年」

2023年8月25日(金)

$\sqrt{5}$の求め方 (2)

日本フィボナッチ協会／第21回研究集会

放送大学教養学部4年
心理と教育コース
久保田 和臣

放送大学教養学部学生で心理と教育コース専攻、千葉学習センター所属の久保田と申します。

本日は、「$\sqrt{5}$の求め方(2)」というタイトルで発表させていただきます。内容的には中学生向きかとも存じますが、お気軽にお付き合いいただければと存じます。

それでは、始めさせていただきます。

黄金比の数値計算

- 黄金比：$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$

- 黄金比の数値計算
  1. $\sqrt{5}$の計算
  2. 1を足す
  3. 2で割る

このステップが最も時間を要する

2進数の計算機では高速

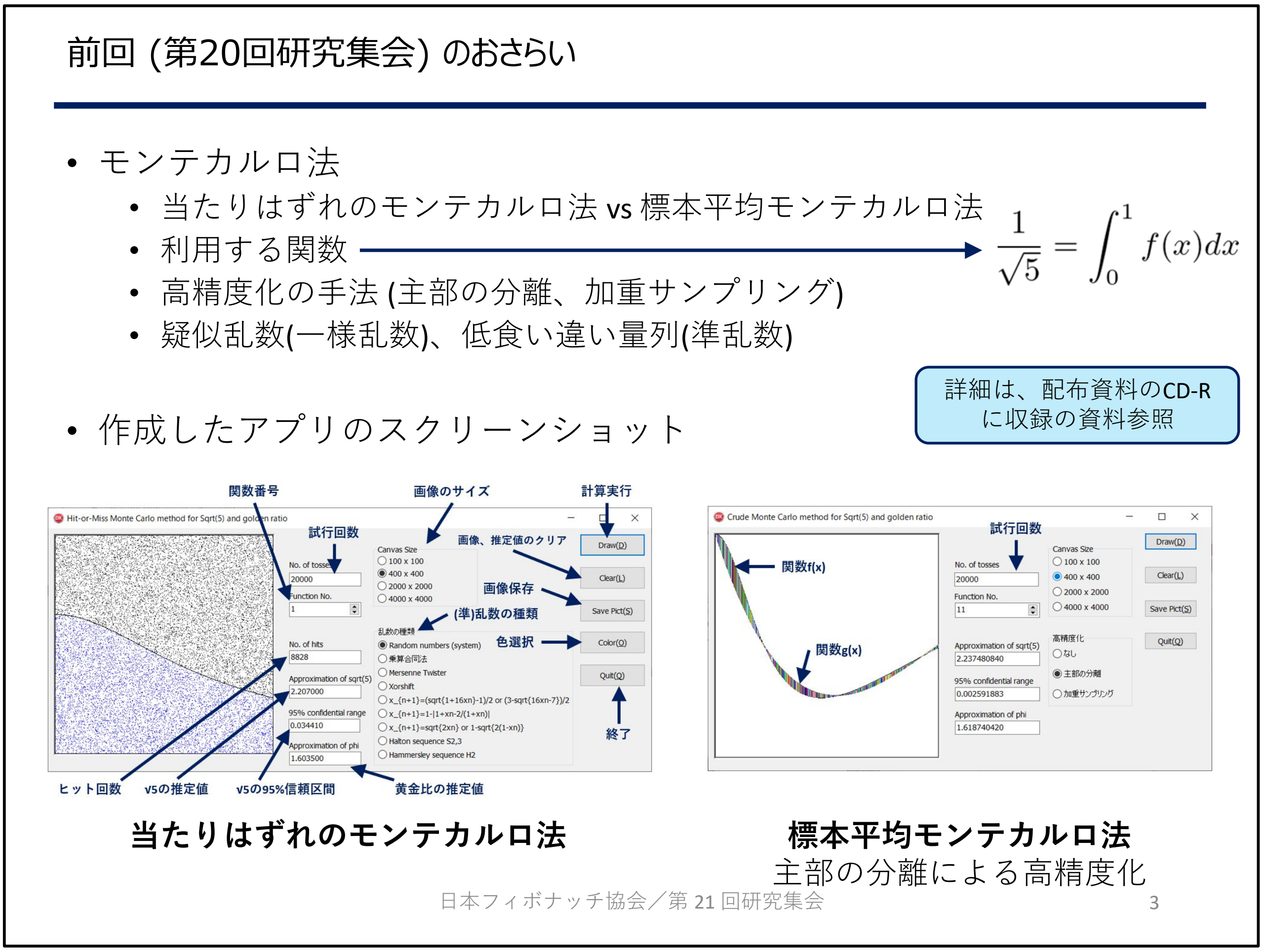
- 前回(第20回研究集会)
  - モンテカルロ法による$\sqrt{5}$の計算
  - 小数点以下10桁ほどまで

- 今回(第21回研究集会)
  - Spigot Algorithm
  - $\sqrt{5}$を小数点以下10000桁ほど計算するのに適した方法
  - Embarcadero社のRAD Studioを使い、Windows用のアプリを作成

フィボナッチ数に関係の深い黄金比ϕは、ここに示しました通り約1.618で、無理数です。ϕを計算するためには、$\sqrt{5}$を求めたのち、1を足して2で割る必要があります。この計算で最も時間を要するのは$\sqrt{5}$を求めるステップであり、もっとも重要です。

前回の第20回研究集会では、モンテカルロ法を用いた$\sqrt{5}$の計算についてまとめました。この方法ではおよそ10桁までの精度で計算できます。

そこで今回は、$\sqrt{5}$を10000桁程度計算するのに適したSpigot Algorithmについて報告させていただきます。
さらに、Embarcadero(エンバカデロ)社のRAD Studioという統合開発環境に含まれるC++Builderを用いて、Windows用のアプリを作成いたしましたので、併せて報告いたします。



Spigot Algorithmについて報告申し上げる前に、口頭発表できなかった前回のモンテカルロ法のおさらいを、簡潔に述べさせていただきます。

手法としましては、「当たりはずれのモンテカルロ法」と「標本平均モンテカルロ法」について、高精度化の手法や疑似乱数・準乱数も含めて報告いたしました。

作成したアプリのスクリーンショットを挙げさせていただきますが、これらのアプリとプレゼン資料は配布資料のCD-Rに収録いたしましたので、ご興味がございましたらお手に取っていただきたく存じます。

今回のプレゼンの前に ($\sqrt{5}$の多数桁計算)

- 従来の手法
  - 多数桁の数値計算：必要な桁数の多倍長数を用意して計算
  - 多倍長数のライブラリ(例：GMP)を用意する必要
- 例 ($\sqrt{5}$を20桁の精度で計算)

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= 2\left(1-\frac{1}{5}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 2\left(1+\frac{1}{10}\left(1+\frac{3}{20}\left(1+\frac{5}{30}\left(1+\cdots\right)\right)\right)\right) \\ &= 2+\frac{1}{10}\left(2+\frac{3}{20}\left(2+\frac{5}{30}\left(2+\cdots+\frac{2n-1}{10n}\left(2+\cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{10(n+1)}a_n \quad (n \geq 0) \\ \sqrt{5} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{cases}$$

実際の計算では、Newton法その他の繰り返し法にbinary splitting 法を組み合わせるなどの手法が用いられる。

n	a_n	S_n	n	a_n	S_n
0	2.00000000000000000000	2.00000000000000000000	8	0.00000100546875000000	2.23606774296875000000
1	0.20000000000000000000	2.20000000000000000000	9	0.00000018992187500000	2.23606793289062500000
2	0.03000000000000000000	2.23000000000000000000	10	0.00000003608515625000	2.23606796897578125000
3	0.00500000000000000000	2.23500000000000000000	11	0.00000000688898437500	2.23606797586476562500
4	0.00087500000000000000	2.23587500000000000000	12	0.00000000132038867187	2.23606797718515429687
5	0.00015750000000000000	2.23603250000000000000	13	0.00000000025392089843	2.23606797743907519531
6	0.00002887500000000000	2.23606137500000000000	14	0.00000000004897045898	2.23606797748804565429
7	0.00000536250000000000	2.23606673750000000000	15	0.00000000000946762207	2.23606797749751327636

従来、そして現在でも主流の多数桁計算法は、多倍長ライブラリを利用・自作して必要な桁数で(繰り返し収束)計算をして求める方法です。

ここでは、例として√5を20桁の精度で計算したいと存じます。数億桁、数兆桁の数値計算も、同様の原理で実施します。
本格的な計算にはいろいろテクニックがあり、ここで説明するには時間が足りないのですが、興味がおありの場合は調べてみてください。

ここでの計算は、スライドに示した無限級数(後述のスライド13のNo.1参照)をもとにした漸化式を用いました。ゆっくりではありますが、√5に収束する模様が示されております。

Spigot Algorithm のあけぼの

- Spigot Algorithm (こつこつアルゴリズム[3])
  - 次のプログラム(C言語)で、円周率を15000桁計算可能[2][8]

```
a[52514],b,c=52514,d,e,f=1e4,g,h;
main(){for(;b=c-=14;h=printf("%04d",e+d/f))
for(e=d%=f;g=--b*2;d/=g)d=d*b+f*(h?a[b]:f/5),a[b]=d%--g;}
```

  - 1995年にRabinowitzとWagonは、円周率計算のアルゴリズム(Spigot Algorithm)と円周率を1000桁計算できるPascalプログラムを発表[1]

	Digits of π		1/3	2/5	3/7	4/9	5/11	6/13	7/15	8/17	9/19	10/21	11/23	12/25
Initialize		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
×10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Carry	3	+10	+12	+12	+12	+10	+12	+7	+8	+9	+0	+0	+0	
		30	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20	20	20
Remainders		0	2	2	4	3	10	1	13	12	1	20	20	20
×10		0	20	20	40	30	100	10	130	120	10	200	200	200
Carry	1	+13	+20	+33	+40	+65	+48	+98	+88	+72	+150	+132	+96	
		13	40	53	80	95	148	108	218	192	160	332	296	200
Remainders		3	1	3	3	5	5	4	8	5	8	17	20	0
×10		30	10	30	30	50	50	40	80	50	80	170	200	0
Carry	4	+11	+24	+30	+40	+40	+42	+63	+64	+90	+120	+88	+0	
		41	34	60	70	90	92	103	144	140	200	258	200	0
Remainders		1	1	0	0	0	4	12	9	4	10	6	16	0
×10		10	10	0	0	0	40	120	90	40	100	60	160	0
Carry	1	+4	+2	+9	+24	+55	+84	+63	+48	+72	+60	+66	+0	
		14	12	9	24	55	124	183	138	112	160	126	160	0

$$\pi = 2 + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{5}\left(2 + \frac{3}{7}\left(2 + \cdots + \frac{n}{2n+1}\left(2 + \cdots\right)\right)\right)\right)$$

$$\begin{cases} a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3} a_n \quad (n \geq 0) \\ \pi = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{cases}$$

  - 多倍長数の計算を使わずに多数桁の数値計算が可能 → アプリ化が楽

<references>
[1] S. Rabinowitz and S. Wagon, A spigot algorithm for the digits of π, Amer. Math. Monthly 102 (1995) 195–203
https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/amm_supplements/Monthly_Reference_12.pdf
[2] J.Arndt, C.Haenel, π Unleashed, Springer, 2001, ISBN 3-540-66572-2
[3] J.-P. ドゥラエ、畑政義訳、π-魅惑の数、朝倉書店、2001、ISBN 978-4-254-11086-9
[8]円周率.jp - Spigot アルゴリズム
http://xn--w6q13e505b.jp/program/spigot.html

さて、いよいよSpigot Algorithmについての解説に話を進めます。「Spigot」というのは、蛇口から水道水が1滴1滴ぽたぽたと滴るように、1桁ずつ定数の値が求められることに由来しています。ここに示しましたのは、C言語にて書かれた短いプログラムですが、その短さにも拘わらず、円周率を15000桁計算できます。

また、1995年にRabinowitzとWagonは、円周率を求めるための新たなアルゴリズムを発表し、「Spigot Algorithm」と名付け、広く一般に知られるようになりました。彼らはこの論文で、多倍長数の計算を使わずに多数桁の円周率計算をすることができることを示しました。

Spigot Algorithm の特長

- Spigot Algorithm の特徴
    - 多倍長計算が不要。
    - アルゴリズムが単純。アプリ作成が容易。
    - 無限級数をもとに計算。
    - 平方根のほか、円周率等の定数も計算可能。
    - 10000桁程度を高速(概ね1秒以内に)に計算可能。
- 教育上のメリット
    - 平方根、円周率等の導入に使用可能。
    - プログラミング教育の題材に最適。

<references>
[1] S. Rabinowitz and S. Wagon, A spigot algorithm for the digits of π, Amer. Math. Monthly 102 (1995) 195–203
https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/amm_supplements/Monthly_Reference_12.pdf
[2] J.Arndt, C.Haenel, π Unleashed, Springer, 2001, ISBN 3-540-66572-2
[3] J.-P. ドゥラエ、畑政義訳、π-魅惑の数、朝倉書店、2001、ISBN 978-4-254-11086-9
[8]円周率.jp - Spigot アルゴリズム
http://xn--w6q13e505b.jp/program/spigot.html

今回の発表では、「Spigot Algorithm」のアルゴリズムと特徴について報告させていただきます。特に●アルゴリズムが単純なこと、●無限級数をもとに計算すること、●平方根のほか、円周率等の定数も計算できること、●10000桁程度を高速に計算できること、について説明申し上げます。
したがって、「Spigot Algorithm」について理解することは、中高生に対する教育上のメリットもあると感じております。

Spigot Algorithm の原理

- 次の級数をもとに計算

$$
\begin{aligned}
S_n &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{j=1}^{k} \frac{a_j}{b_j} \\
&= c_0 + \frac{a_1}{b_1} c_1 + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} c_2 + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} c_n \\
&= c_0 + \frac{a_1}{b_1}\left(c_1 + \frac{a_2}{b_2}\left(c_2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\left(c_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}\left(c_n\right)\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

- 抽出のステップ
  - div を整数商、mod を剰余とすると (例えば、10 div 3 = 3 、10 mod 3 = 1 となる。)、次の式が成立する。

$$
c_{k-1} + \frac{a_k}{b_k}\left(c_k + \cdots\right) = (c_{k-1} + a_k(c_k \ \mathbf{div}\ b_k)) + \frac{a_k}{b_k}\left((c_k \ \mathbf{mod}\ b_k) + \cdots\right)
$$

<references>
[5] Dang-Khoa Do, Spigot algorithm and root computing, Reliable Computing, vol.7 (2001), 247–273
https://doi.org/10.1023/A:1011403105587
[7] Dang-Khoa Do, Zuverlässige numerische Berechnungen mit dem Spigot-Ansatz, 学位論文, Technische Universität Dresden, Dresden, Datum der Verteidigung: 20.09.2005
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:swb:14-1157654863971-67714

Spigot Algorithmで数学定数、特に平方根を計算するときには、ここに示した級数を利用します。
他にも、次の級数も同じ形式で表示できます。
$S_n = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots\cdots + s_n$
$\quad = s_0(1 + s_1/s_0(1 + s_2/s_1(1 + \cdots\cdots + s_n/s_{n-1}(1))))$

一方、divとmodをそれぞれ整数商、剰余とすると次のように変形できることを確認しておきます。これだけでは分かりにくいかと存じますので、次スライド以降で例示したいと存じます。

Spigot Algorithm の例

- 円周率の例
  - 次の無限級数を利用

$$\pi = 3 + \frac{1\cdot 1}{3\cdot 4\cdot 5}\left(8 + \frac{2\cdot 3}{3\cdot 7\cdot 8}\left(13 + \frac{3\cdot 5}{3\cdot 10\cdot 11}\left(18 + \frac{4\cdot 7}{3\cdot 13\cdot 14}\left(23 + \frac{5\cdot 9}{3\cdot 16\cdot 17}\left(28 + \cdots \right.\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\left.\cdots + \frac{n(2n-1)}{3(3n+1)(3n+2)}\left(5n+3+\cdots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

導出は、配布資料のCD-R
に収録の補足資料参照

  - ここでは、次の部分和を利用して、円周率を小数点以下6桁求めてみる。

$$\pi_5 = 3 + \frac{1}{60}\left(8 + \frac{6}{168}\left(13 + \frac{15}{330}\left(18 + \frac{28}{546}\left(23 + \frac{45}{816}\left(28\right)\right)\right)\right)\right)$$

π_5=<u>3.141592</u>49...

この部分和では、小数点以下7桁目以降は不正確

<reference>
[9] R.W.Gosper, Acceleration of series, Technical Report AIM-304, AI Laboratory, MIT, (March 1974)
ftp://publications.ai.mit.edu/ai-publications/pdf/AIM-304.pdf
http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/6088/AIM-304.pdf

ここでは、分かりやすさのために、円周率の例を挙げさせていただきます。Gosperによる次の無限級数を利用します。この無限級数の導出に関しましては、配布資料のCD-Rに収録の補足資料に記載してあります。

ここでは、次の部分和を利用して、円周率を小数点以下6桁求めてみます。ここに示しましたように、この部分和では小数点以下7桁目以降は不正確です。

Spigot Algorithm による円周率の計算例 (1)

- 最初の3桁

$$
\begin{aligned}
\pi_5 &= 3 + \frac{1}{1000}\left[1000\left(\frac{1}{60}\left(8 + \frac{6}{168}\left(13 + \frac{15}{330}\left(18 + \frac{28}{546}\left(23 + \frac{45}{816}\left(28\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3 + \frac{1}{1000}\left[\frac{1}{60}\left(8000 + \frac{6}{168}\left(13000 + \frac{15}{330}\left(18000 + \frac{28}{546}\left(23000 + \frac{45}{816}\left(28000\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3 + \frac{1}{1000}\left[\frac{1}{60}\left(8000 + \frac{6}{168}\left(13000 + \frac{15}{330}\left(18000 + \frac{28}{546}\left(24530 + \frac{45}{816}\left(256\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3 + \frac{1}{1000}\left[\frac{1}{60}\left(8000 + \frac{6}{168}\left(13000 + \frac{15}{330}\left(19232 + \frac{28}{546}\left(506 + \frac{45}{816}\left(256\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3 + \frac{1}{1000}\left[\frac{1}{60}\left(8000 + \frac{6}{168}\left(13870 + \frac{15}{330}\left(92 + \frac{28}{546}\left(506 + \frac{45}{816}\left(256\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3 + \frac{1}{1000}\left[\frac{1}{60}\left(8492 + \frac{6}{168}\left(94 + \frac{15}{330}\left(92 + \frac{28}{546}\left(506 + \frac{45}{816}\left(256\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3 + \frac{1}{1000}\left[141 + \frac{1}{60}\left(32 + \frac{6}{168}\left(94 + \frac{15}{330}\left(92 + \frac{28}{546}\left(506 + \frac{45}{816}\left(256\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141 + \frac{1}{1000}\left[\frac{1}{60}\left(32 + \frac{6}{168}\left(94 + \frac{15}{330}\left(92 + \frac{28}{546}\left(506 + \frac{45}{816}\left(256\right)\right)\right)\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

円周率が3桁抽出できた

最初に、円周率を小数点以下3桁目まで求めてみます。

まず部分和の小数部分を1000倍して1000で割ります。次いで1000を分配します。次式の右端の青色で記した部分について、28000を816で割った余り256を残し、商34に45を掛けた値を前に出し23000に足し合わせます。この手続きを繰り返し、小数点以下3桁の141を抽出します。

なお、既にご理解のことと思いますが、最初に小数部分を10倍して10で割ると、円周率を1桁ずつ求めることも可能です。

Spigot Algorithm による円周率の計算例 (2)

- 次の3桁

$$
\begin{aligned}
\pi_5 &= 3.141 + \frac{1}{1000000}\left[1000\left(\frac{1}{60}\left(32+\frac{6}{168}\left(94+\frac{15}{330}\left(92+\frac{28}{546}\left(506+\frac{45}{816}\left(256\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141 + \frac{1}{1000000}\left[\frac{1}{60}\left(32000+\frac{6}{168}\left(94000+\frac{15}{330}\left(92000+\frac{28}{546}\left(506000+\frac{45}{816}\left(256000\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141 + \frac{1}{1000000}\left[\frac{1}{60}\left(32000+\frac{6}{168}\left(94000+\frac{15}{330}\left(92000+\frac{28}{546}\left(520085+\frac{45}{816}\left(592\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141 + \frac{1}{1000000}\left[\frac{1}{60}\left(32000+\frac{6}{168}\left(94000+\frac{15}{330}\left(118656+\frac{28}{546}\left(293+\frac{45}{816}\left(592\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141 + \frac{1}{1000000}\left[\frac{1}{60}\left(32000+\frac{6}{168}\left(99385+\frac{15}{330}\left(186+\frac{28}{546}\left(293+\frac{45}{816}\left(592\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141 + \frac{1}{1000000}\left[\frac{1}{60}\left(35546+\frac{6}{168}\left(97+\frac{15}{330}\left(186+\frac{28}{546}\left(293+\frac{45}{816}\left(592\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141 + \frac{1}{1000000}\left[592+\frac{1}{60}\left(26+\frac{6}{168}\left(97+\frac{15}{330}\left(186+\frac{28}{546}\left(293+\frac{45}{816}\left(592\right)\right)\right)\right)\right)\right] \\
&= 3.141592 + \frac{1}{1000000}\left[\frac{1}{60}\left(26+\frac{6}{168}\left(97+\frac{15}{330}\left(186+\frac{28}{546}\left(293+\frac{45}{816}\left(592\right)\right)\right)\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

円周率が6桁抽出できた

さらに同様の手続きを繰り返し、小数点以下4から6桁目の592を抽出することができます。

ここで用いた部分和では、小数点以下7桁以降は不正確なので、これ以上の抽出は意味がありません。

Spigot Algorithm による平方根･立方根の計算

- 次の無限級数展開 (二項展開) を利用

$$\frac{p}{q}\left(1\pm\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{p}{q}\left(1\mp\frac{(0k-1)u}{kv}\left(1\mp\frac{(1k-1)u}{2kv}\left(1\mp\frac{(2k-1)u}{3kv}\left(1\mp\cdots\right)\right)\right)\right)$$
$$= \frac{p}{q}\mathop{\mathrm{R}}_{n=0}^{\infty} \mp\frac{(nk-1)u}{(n+1)kv}$$

$$\frac{p}{q}\left(1\pm\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{k}} = \frac{p}{q}\left(1\mp\frac{(0k+1)u}{kv}\left(1\mp\frac{(1k+1)u}{2kv}\left(1\mp\frac{(2k+1)u}{3kv}\left(1\mp\cdots\right)\right)\right)\right)$$
$$= \frac{p}{q}\mathop{\mathrm{R}}_{n=0}^{\infty} \mp\frac{(nk+1)u}{(n+1)kv} = \frac{p}{q}\mathop{\mathrm{R}}_{n=2}^{\infty} \mp\frac{((n-2)k+1)u}{(n-1)kv}$$

- Spigot Algorithm に利用可能なのは、次の無限級数である

$$\boxed{\sqrt[k]{r} = \frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{k}} = \frac{p}{q}\mathop{\mathrm{R}}_{n=2}^{\infty} \frac{((n-2)k+1)u}{(n-1)kv}}$$

p, q, u, v をうまく見つけることが必要
見つけ方は、配布CD-Rに収録の補足資料参照

- 例

$$\sqrt{5} = \frac{11}{5}\left(1-\frac{4}{125}\right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{11}{5}\left(1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 250}\left(1+\frac{3\cdot 4}{2\cdot 250}\left(1+\frac{5\cdot 4}{3\cdot 250}\left(1+\cdots\right)\right)\right)\right)$$

<references>
[5] Dang-Khoa Do, Spigot algorithm and root computing, Reliable Computing, vol.7 (2001), 247–273
[7] R.W.Gosper, Acceleration of series, Technical Report AIM-304, AI Laboratory, MIT, (March 1974)

Spigot Algorithmで平方根・立方根を計算するためには、次の無限級数展開(二項展開)を利用します。この方法は、参考文献に示しましたDang-Khoa Do によって研究されました。
また簡便のため、Gosperにより導入されたR表記法を併記いたします。

計算には、特にここに囲った式が適しています。式中のp, q, u, v をうまく見つけることが必要になります。見つける方法は配布資料に収録しています。ご参照ください。
ここでは、一つの例を挙げさせていただきます。

平方根の Spigot Algorithm 計算に有用な式

- 次の変換が可能 (導出は配布資料のCD-R中の補足資料文書)

$$\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{u+v}\right)^{\frac{-1}{k}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{k}}=\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{u+v}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v-u}\right)^{\frac{-1}{k}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{k}}=\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v-u}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}=\frac{vp}{(u+v)q}\left(1-\frac{u}{u+v}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}=\frac{vp}{(v-u)q}\left(1+\frac{u}{v-u}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(v-u)p}{vq}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(u+v)p}{vq}\left(1-\frac{u}{u+v}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(v-u)p}{vq}\left(1+\frac{u}{v-u}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(u+v)p}{vq}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(v-u)p}{vq}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

- 次の式も有用

$$\sqrt{a}=\frac{p}{q}\left(1-\frac{aq^2-p^2}{aq^2}\right)^{\frac{-1}{2}}\qquad p^2<aq^2\ (\sqrt{a}>p/q)\text{のとき}$$

$$\sqrt{a}=\frac{aq}{p}\left(1-\frac{p^2-aq^2}{p^2}\right)^{\frac{-1}{2}}\qquad p^2>aq^2\ (\sqrt{a}<p/q)\text{のとき}$$

平方根のSpigot Algorithm計算に有用な変換には、ここに挙げたものがあります。それぞれの導出に関しましては、配布資料のCD-R中の補足資料の文書を参照してください。

$\sqrt{5}$の表現 $\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$

No.	p	q	u	v	p/qの正則連分数	u/v
1	2	1	1	5	[2]	0.2
2	5	3	4	9	[1,1,2]	0.444444444
3	11	5	4	125	[2,4,1]	0.032
4	15	7	4	49	[2,7]	0.081632653
5	20	9	1	81	[2,4,2]	0.012345679
6	29	13	4	845	[2,4,3]	0.004733728
7	25	13	44	169	[1,1,12]	0.26035503
8	35	16	11	256	[2,5,3]	0.04296875
9	38	17	1	1445	[2,4,4]	0.000692042
10	55	27	124	729	[2,27]	0.170096022
11	75	34	31	1156	[2,4,1,6]	0.026816609
12	95	43	44	1849	[2,4,1,3,2]	0.023796647
13	105	47	4	2209	[2,4,3,1,2]	0.001810774
14	143	64	31	20480	[2,4,3,1,3]	0.001513672
15	195	88	139	7744	[2,4,1,1,1,2,2]	0.01794938
16	199	89	4	39605	[2,4,4,4,1]	0.000100997
17	223	100	271	50000	[2,4,2,1,7]	0.00542
18	275	123	4	15129	[2,4,4,7]	0.000264393
19	360	161	1	25921	[2,4,4,4,2]	3.85788E-05
20	447	200	191	200000	[2,4,3,1,11]	0.000955

$\sqrt{5}$の表現に利用できるp, q, u, v について、表にまとめました。

$\sqrt{5}$の表現 $\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$

No.	p	q	u	v	p/qの正則連分数	u/v
21	512	229	61	262205	[2,4,4,6,2]	0.000232642
22	521	233	4	271445	[2,4,4,4,3]	1.4736E-05
23	682	305	1	465125	[2,4,4,4,4]	2.14996E-06
24	1397	625	1516	1953125	[2,4,3,1,36]	0.000776192
25	1431	640	239	2048000	[2,4,4,5,7]	0.000116699
26	1460	653	89	426409	[2,4,4,6,6]	0.00020872
27	1630	729	61	531441	[2,4,4,5,8]	0.000114782
28	1885	843	4	710649	[2,4,4,4,3,1,2]	5.62866E-06
29	3195	1429	436	2042041	[2,4,4,6,4,3]	0.000213512
30	3571	1597	4	12752045	[2,4,4,4,4,4,1]	3.13675E-07
31	4935	2207	4	4870849	[2,4,4,4,4,7]	8.21212E-07
32	6460	2889	1	8346321	[2,4,4,4,4,4,2]	1.19813E-07
33	9349	4181	4	87403805	[2,4,4,4,4,4,3]	4.57646E-08
34	12238	5473	1	149768645	[2,4,4,4,4,4,4]	6.67696E-09
35	17887	8000	55231	320000000	[2,4,4,5,1,2,1,1,2,4]	0.000172597
36	21947	9815	316	481671125	[2,4,4,4,4,6,5]	6.56049E-07
37	33825	15127	4	228826129	[2,4,4,4,4,4,3,1,2]	1.74805E-08
38	36635	16384	10811	268435456	[2,4,4,4,1,1,19,1,4]	4.02741E-05
39	64079	28657	4	4106118245	[2,4,4,4,4,4,4,4,1]	9.74156E-10
40	88555	39603	4	1568397609	[2,4,4,4,4,4,4,7]	2.55037E-09

表は、まだまだ続きます。

$\sqrt{5}$ の表現 $\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$

No.	p	q	u	v	p/qの正則連分数	u/v
41	115920	51841	1	2687489281	[2,4,4,4,4,4,4,4,2]	3.72095E-10
42	167761	75025	4	28143753125	[2,4,4,4,4,4,4,4,3]	1.42127E-10
43	219602	98209	1	48225038405	[2,4,4,4,4,4,4,4,4]	2.07361E-11
44	245395	109744	4331	12043745536	[2,4,4,4,5,7,2,4]	3.59606E-07
45	1589055	710647	4	5050019158609	[2,4,4,4,4,4,4,4,4,7]	7.92076E-13
46	10891545	4870847	4	23725150497409	[2,4,4,4,4,4,4,4,4,3,1,2]	1.68597E-13
47	37325880	16692641	1	278644263554881	[2,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,2]	3.58881E-15

p, q, u, vの詳細(導出)に関しては、配布資料のCD-R中の補足資料参照。

$\sqrt{5}$ の正則連分数展開 [2,4,4,4,.......] に近いほど、p/q の近似度が高い。

No. 45, 46, 47 はvの値が大きいため、変数が64byte整数型のアプリでは正確な値が求められない。

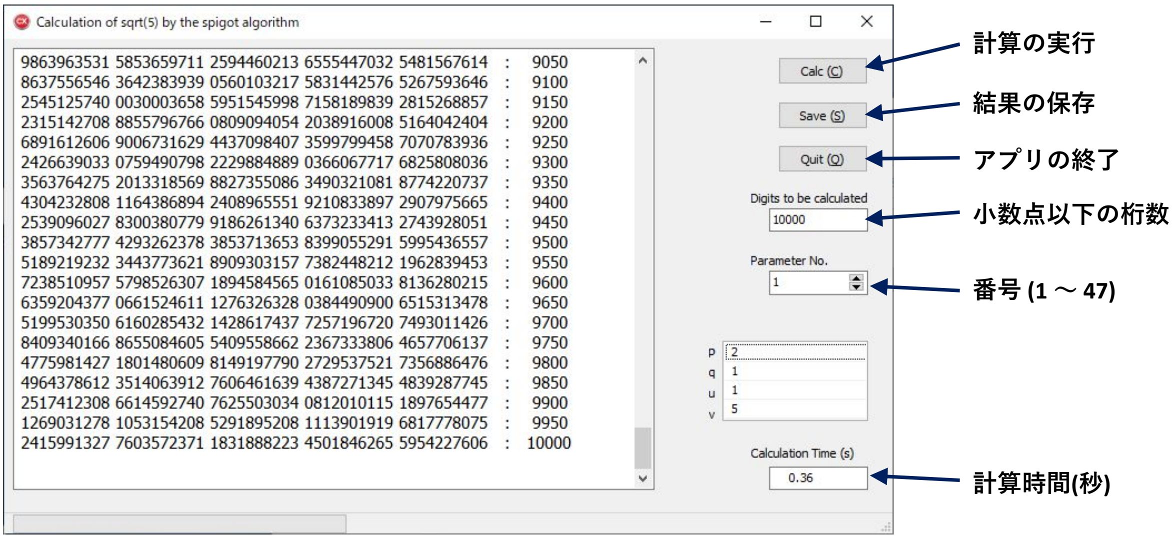
以上、得られたデータをもとに、Windows用のアプリを作成した

p, q, u, v の詳細(導出)に関しては、配布資料のCD-R中の補足資料を参照願います。
また、p/q の正則連分数展開 [2,4,4,4,…….] に近いほど、p/q の近似度が高いことが分かります。

さらに、No. 45, 46, 47 はvの値が大きいため、変数が64byte整数型のアプリでは正確な値が求められないことが確認できます。
以上、得られたデータをもとに、Windows用のアプリを作成いたしました。

$\sqrt{5}$ を求めるためのアプリの作成

- $\sqrt{5}$を求めるためのWindowsアプリ「Spigot5r5」
  - 64bit版と32bit版のアプリを、配布資料のCD-Rに収録



※ 計算桁数が大きすぎると、多大な時間がかかるので注意。
※ 番号 45 ～ 47 は、計算結果が不正確

ここにスクリーンショットを示しましたのは、$\sqrt{5}$を求めるためのWindowsアプリ「Spigot5r5」です。配布資料のCD-Rにも収録してあります。
64bit版のアプリが使える場合は、より高速に動作いたします。

注意点としましては、計算桁数が大きくなると、計算に多大な時間を要します。Spigot AlgorithmはO(n^2)なので、計算桁数が10倍になると、約100倍の計算時間を要します。
また番号45 ～ 47 は、先に示しました通り、計算結果が不正確になります。理由はv の値が大きすぎて桁あふれ(オーバーフロー)を生じてしまうからです。ご注意ください。

Wingler による $\sqrt{1+x}$ の式変形

- 以下のが式変形が知られている
  - W2 $$\sqrt{1+x}=\frac{2x+2}{x+2}\sqrt{(1+x)\left(\frac{x+2}{2x+2}\right)^2}=\frac{2x+2}{x+2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4x+4}}=\frac{2x+2}{x+2}\left(1-\frac{x^2}{(x+2)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
  - W3 $$\sqrt{1+x}=\frac{3x+4}{x+4}\sqrt{1+\frac{x^3}{(3x+4)^2}}=\frac{3x+4}{x+4}\left(1-\frac{x^3}{(x+1)(x+4)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
  - W4 $$\sqrt{1+x}=\frac{4(x+1)(x+2)}{x^2+8x+8}\sqrt{1+\frac{x^4}{16(x+1)(x+2)^2}}=\frac{4(x+1)(x+2)}{x^2+8x+8}\left(1-\frac{x^4}{(x^2+8x+8)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
  - W5 $$\sqrt{1+x}=\frac{5x^2+20x+16}{x^2+12x+16}\sqrt{1+\frac{x^5}{(5x^2+20x+16)^2}}=\frac{5x^2+20x+16}{x^2+12x+16}\left(1-\frac{x^5}{(x+1)(x^2+12x+16)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
  - W6 $$\sqrt{1+x}=\frac{2(x+1)(x+4)(3x+4)}{(x+2)(x^2+16x+16)}\sqrt{1+\frac{x^6}{4(x+1)(x+4)^2(3x+4)^2}}=\frac{2(x+1)(x+4)(3x+4)}{(x+2)(x^2+16x+16)}\left(1-\frac{x^6}{(x+2)^2(x^2+16x+16)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
  - W7 $$\sqrt{1+x}=\frac{7x^3+56x^2+112x+64}{x^3+24x^2+80x+64}\sqrt{1+\frac{x^7}{(7x^3+56x^2+112x+64)^2}}=\frac{7x^3+56x^2+112x+64}{x^3+24x^2+80x+64}\left(1-\frac{x^7}{(x+1)(x^3+24x^2+80x+64)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$\sqrt{1+x}$ が $\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$ の形に変形できる。

<reference>
[10] E.Wingler, An Infinite Product Expansion for the Square Root Function, Amer. Math. Monthly, 1990, Vol. 97, No. 9, pp. 836-839
https://www.jstor.org/stable/2324754

√5を求めるアプリだけではなく、より一般に√nを求めることができるWindows用のアプリも作成してみることにしました。そのために利用しましたのは、E.Winglerにより導入されました√(1+x) の式変形です。
Spigot Algorithmの計算で利用するのは、ここに示しましたW2 ～ W7の式変形です。これにより√(1+x) が、p/q(1-u/v)^(-1/2) の形に変形できます。

次に考えなければならないことは、収束を速めるために、0 < u/v << 1となるようなxをいかに選択するかになります。次ページで説明いたします。

Wingler による式変形を利用した $\sqrt{a}$ の表現

- $m : m^2 \leq a < (m+1)^2$ となる正の整数

$$\boxed{\sqrt{a} = m\sqrt{\frac{a}{m^2}} = m\sqrt{1 + \frac{a-m^2}{m^2}}}$$

  - W2 $\quad \sqrt{a} = \dfrac{2am}{m^2+a}\left(1 - \dfrac{(a-m^2)^2}{(m^2+a)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$
  - W3 $\quad \sqrt{a} = \dfrac{m(m^2+3a)}{3m^2+a}\left(1 - \dfrac{(a-m^2)^3}{a(3m^2+a)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$
  - W4 $\quad \sqrt{a} = \dfrac{4am(m^2+a)}{m^4+6am^2+a^2}\left(1 - \dfrac{(a-m^2)^4}{(m^4+6am^2+a^2)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$
  - W5 $\quad \sqrt{a} = \dfrac{m(m^4+10am^2+5a^2)}{5m^4+10am^2+a^2}\left(1 - \dfrac{(a-m^2)^5}{a(5m^4+10am^2+a^2)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$
  - W6 $\quad \sqrt{a} = \dfrac{2am(m^2+3a)(3m^2+a)}{(m^2+a)(m^4+14am^2+a^2)}\left(1 - \dfrac{(a-m^2)^6}{(m^2+a)^2(m^4+14am^2+a^2)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$
  - W7 $\quad \sqrt{a} = \dfrac{m(m^6+21am^4+35a^2m^2+7a^3)}{7m^6+35am^4+21a^2m^2+a^3}\left(1 - \dfrac{(a-m^2)^7}{a(7m^6+35am^4+21a^2m^2+a^2)^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$

例

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \dfrac{7}{5}\left(1 - \dfrac{1}{50}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ \sqrt{5} = \dfrac{38}{17}\left(1 - \dfrac{1}{1445}\right)^{\frac{-1}{2}} \end{cases}$$

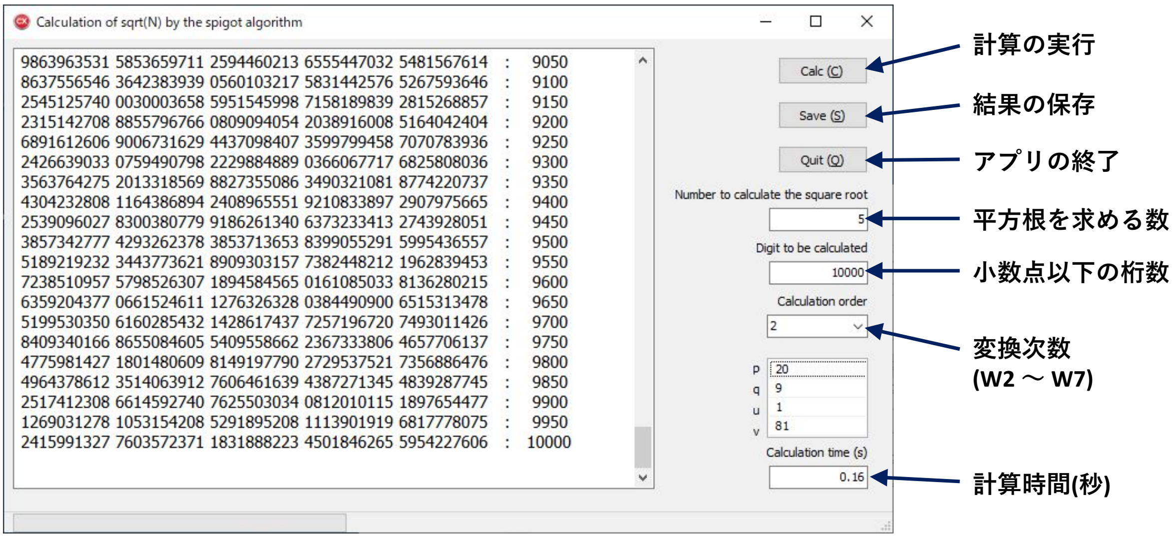
以上、得られた表現をもとに、Windows用のアプリを作成した

日本フィボナッチ協会／第21回研究集会 18

Winglerの式変形をSpigot Algorithmによる平方根の計算に適用することを考えます。正の整数aに対し、mを$m^2 <= a < (m+1)^2$ となる正の整数とします。するとここに青で囲った式が成り立つため、$x=(a-m^2)/m^2$と置くと、次のW2 ～ W7 が得られます。
入力したaに対しmを求めると、Spigot Algorithmで利用可能な無限級数展開が得られるため、アプリ化してみます。

アプリの作成

- $\sqrt{n}$を求めるためのWindowsアプリ「Spigot5N」
  - 64bit版と32bit版のアプリを、配布資料のCD-Rに収録



※ 計算桁数が大きすぎると、多大な時間がかかるので注意。
※ 変換次数が大きいとき、計算結果が不正確になる場合がある。
※ 平方根を求める数 n が大きいときも、計算結果が不正確になる場合がある。

ここにスクリーンショットを示しましたのは、√nを求めるためのWindowsアプリ「Spigot5N」です。配布資料のCD-Rにも収録してあります。
64bit版のアプリが使える場合は、より高速に動作いたします。

注意点としましては、計算桁数が大きくなると、計算に多大な時間を要しますので、ご注意ください。また、変換次数が大きいとき、計算結果が不正確になる場合があります。さらに、平方根を求める数nが大きいときも、計算結果が不正確になる場合があります。

発表時は、これらの注意点は欠点だと思っておりましたが、飯高先生から「逆に、計算機による数値計算に対し、一歩深く考えるための動機づけになる」とのご助言をいただきました。ありがとうございました。

平方根以外の定数も含めた計算

- いくつかの定数を求めるアプリ「SpigotDo5R」
  - 計算できる定数は、$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{125}, \sqrt[3]{2}, \phi, \log 2, e$
  - 各定数の無限級数は、次の通り

$$\pi = 2 + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{5}\left(2 + \cdots + \frac{n}{2n+1}\left(2 + \cdots\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{7}{5}\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 0 + \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100}\left(1 + \frac{3}{200}\left(1 + \cdots + \frac{2n-3}{100(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \frac{5}{3}\left(1 - \frac{2}{27}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 0 + \frac{5}{3}\left(1 + \frac{1}{27}\left(1 + \frac{3}{54}\left(1 + \cdots + \frac{2n-3}{27(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \frac{20}{9}\left(1 - \frac{1}{81}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 0 + \frac{20}{9}\left(1 + \frac{1}{162}\left(1 + \frac{3}{324}\left(1 + \cdots + \frac{2n-3}{162(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} &= \frac{12}{5}\left(1 - \frac{1}{25}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 0 + \frac{12}{5}\left(1 + \frac{1}{50}\left(1 + \frac{3}{100}\left(1 + \cdots + \frac{2n-3}{50(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{7} &= \frac{5}{2}\left(1 - \frac{3}{28}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 0 + \frac{5}{2}\left(1 + \frac{3}{56}\left(1 + \frac{9}{112}\left(1 + \cdots + \frac{6n-9}{56(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{10} &= \frac{3}{1}\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 0 + \frac{3}{1}\left(1 + \frac{1}{20}\left(1 + \frac{3}{40}\left(1 + \cdots + \frac{2n-3}{20(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{125} &= \frac{100}{9}\left(1 - \frac{1}{81}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= 0 + \frac{100}{9}\left(1 + \frac{1}{162}\left(1 + \frac{3}{324}\left(1 + \cdots + \frac{2n-3}{162(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &= \frac{5}{4}\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{-1}{3}} \\ &= 0 + \frac{5}{4}\left(1 + \frac{1}{128}\left(1 + \frac{4}{256}\left(1 + \cdots + \frac{3n-5}{128(n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{20}{18}\left(1 - \frac{1}{81}\right)^{\frac{-1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{18}\left(20 + \frac{1}{162}\left(20 + \frac{3}{324}\left(20 + \cdots + \frac{2n-3}{162(n-1)}\left(20 + \cdots\right)\right)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{18}\left(11 + \frac{1}{162}\left(20 + \frac{3}{324}\left(20 + \cdots + \frac{2n-3}{162(n-1)}\left(20 + \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\log 2 = 0 + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{27}\left(1 + \frac{3}{45}\left(1 + \cdots + \frac{2n-3}{9(2n-1)}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)$$

$$e = 1 + \frac{1}{1}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)\right)$$

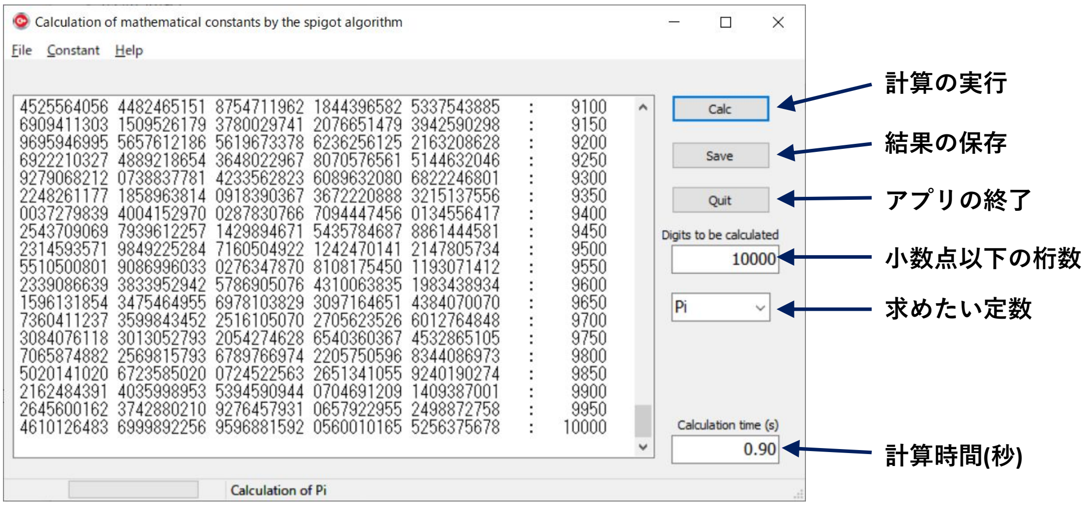
以上、得られた無限級数をもとに、
Windows用のアプリを作成した

次に、平方根以外の定数も含めたSpigot Algorithm計算のアプリ作成を目的に、無限級数展開を求めてみました。
計算できる定数は、円周率、√2、√3、√5、√6、√7、√10、√125、2の立方根、黄金比ϕ、log2、ネイピア数e、です。

円周率は、Eulerによって求められた(Mādhava-Gregory-Leibniz級数をEuler変換した)無限級数です。この無限級数の導出は、ほかにも数通りの方法がありますが、配布資料のCD-Rには、10年ほど前に一松先生に褒めていただいた方法の一つ (Gosper[9]に基づく) が記載してあります。
√2から2の立方根までは、先述のDang-Khoa Doの方法(二項展開)によって求められます。黄金比ϕは、1/2+√5/2の無限級数に基づきました。またlog2は、log(1+x)/(1-x)のMaclaurin展開
$\log(1+x)/(1-x) = 2x + 2x^3/3 + 2x^5/5 + 2x^7/7 + \cdots\cdots$
にx=1/3を代入いたしました。
ネイピア数eは、e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! +1/4! + ……
によりました。

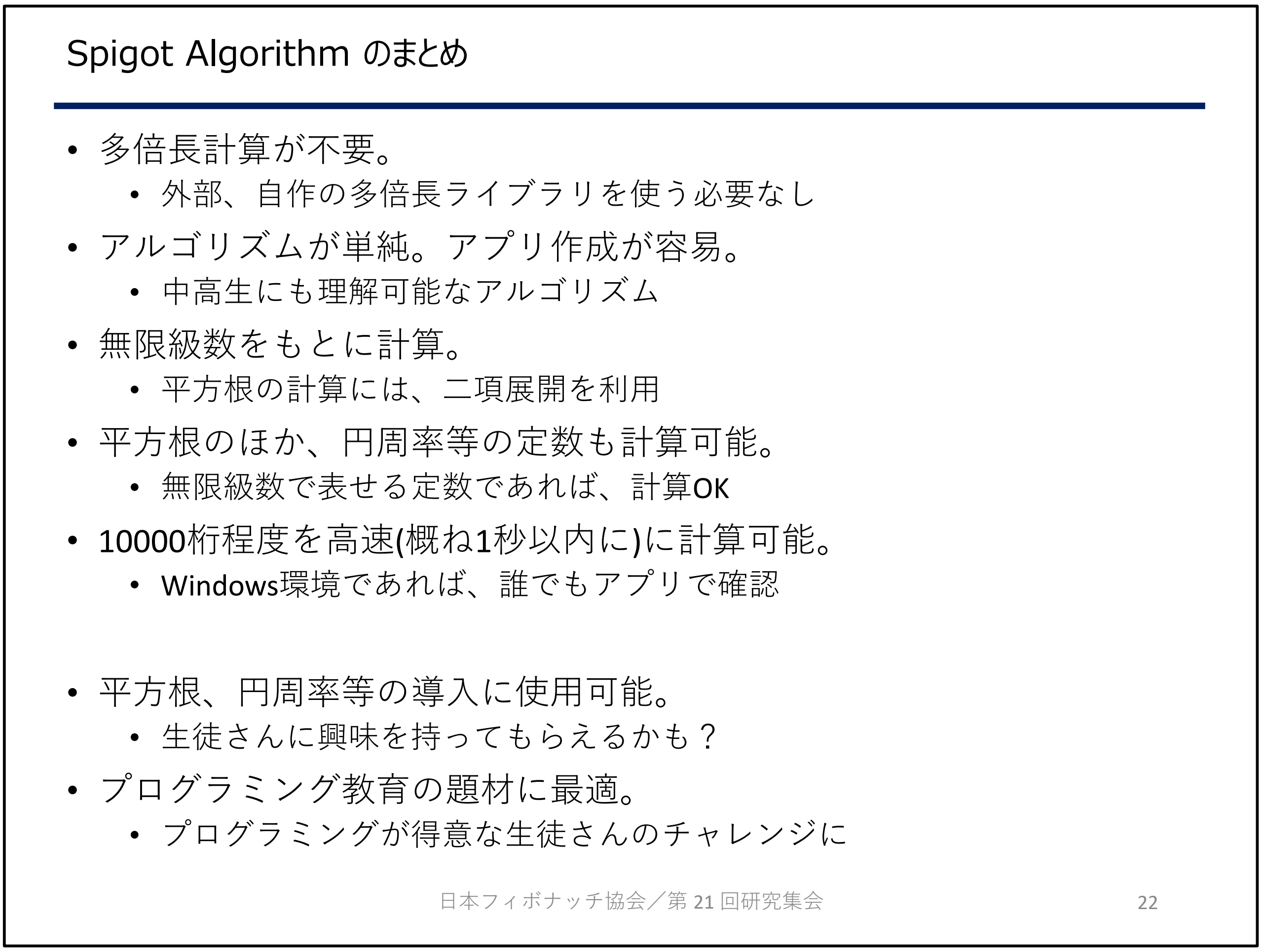
平方根以外の定数も含めた計算

- Spigot Algorithmを利用したアプリ「SpigotDo5R」
  - 64bit版と32bit版のアプリを、配布資料のCD-Rに収録



※ 計算桁数が大きすぎると、多大な時間がかかるので注意。

ここにスクリーンショットを示しましたのは、各種定数を求めるためのWindowsアプリ「SpigotDo5R」です。配布資料のCD-Rにも収録してあります。
64bit版のアプリが使える場合は、より高速に動作いたします。
注意点としましては、計算桁数が大きくなると、計算に多大な時間を要しますので、ご注意ください。



以上、Spigot Algorithmについてまとめます。
●多倍長計算が不要で、外部・自作のライブラリを使う必要がありません。
●アルゴリズムが単純で、アプリ作成が容易です。アルゴリズムは中高生でも理解可能です。
●無限級数をもとに計算します。平方根の計算には、二項展開を利用します。
●平方根のほか、円周率等の定数も計算可能です。ほかにも無限級数で表せる定数であれば、計算できます。
●10000桁程度を高速(概ね1秒以内に)計算可能です。配布CD-Rに、Windows環境で動作するアプリを収録しました。

ほかにも教育的な観点から、
●平方根、円周率等の導入に使用可能です。生徒さんに興味を持ってもらえるツールになるかもしれません。
●プログラミング教育の題材にも使えます。プログラミングが得意な生徒さんのチャレンジに使えます。

参考文献

1. S. Rabinowitz and S. Wagon, A spigot algorithm for the digits of π, Amer. Math. Monthly 102 (1995) 195–203
   https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/amm_supplements/Monthly_Reference_12.pdf
2. J.Arndt, C.Haenel, π Unleashed, Springer, 2001, ISBN 3-540-66572-2
3. J.-P. ドゥラエ、畑政義訳、π-魅惑の数、朝倉書店、2001、ISBN 978-4-254-11086-9
4. E.P.Stoschek, Abenteuer Algorithmus Teil 2, Dresden University Press, 1997, ISBN 3-931828-58-1
5. Dang-Khoa Do, Spigot algorithm and root computing, Reliable Computing, vol.7 (2001), 247–273
   https://doi.org/10.1023/A:1011403105587
6. Dang-Khoa Do, Spigot Algorithm and Reliable Computation of Natural Logarithm, Reliable Computing, vol.10 (2004), pp489–500
   https://doi.org/10.1023/B:REOM.0000047096.58634.fe
7. Dang-Khoa Do, Zuverlässige numerische Berechnungen mit dem Spigot-Ansatz, 学位論文, Technische Universität Dresden, Dresden, Datum der Verteidigung: 20.09.2005
   https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:swb:14-1157654863971-67714
8. 円周率.jp > プログラム > Spigot アルゴリズム
   http://円周率.jp/program/spigot.html (http://xn--w6q13e505b.jp/program/spigot.html)
9. R.W.Gosper, Acceleration of series, Technical Report AIM-304, AI Laboratory, MIT, (March 1974)
   ftp://publications.ai.mit.edu/ai-publications/pdf/AIM-304.pdf
   http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/6088/AIM-304.pdf
10. E.Wingler, An Infinite Product Expansion for the Square Root Function, Amer. Math. Monthly, 1990, Vol. 97, No. 9, pp. 836-839
    https://www.jstor.org/stable/2324754

参考文献を挙げておきます。

参考文献[1]は、Spigot Algorithmが広がるきっかけになった論文です。
参考文献[2][3]には、英語と日本語で読める円周率の計算法についてまとめてあります。Spigot Algorithmについての記載もあります。
参考文献[4]はドイツ語で書かれておりますが、スライド8 〜 10の例やSpigot Algorithmに用いる無限級数と連分数との関連、無限級数の縮約など、要領よくまとめられております。
参考文献[5][6][7]には、今回紹介した平方根・立方根等のSpigot Algorithmについて論じてあります。
参考文献[8]には、参考文献[1][2]のプログラムが、分かりやすくまとめてあります。
参考文献[9]には、今回用いた円周率の無限級数の導出並びに無限級数のR表記法についての記載があります。
参考文献[10]には、√nを求めるときに利用した√(1+x)の式変形について記してあります。

最後に

ご清聴ありがとうございました。

プログラミングが得意な方は、アプリの改良に挑戦してみてはいかがでしょうか。

今回、Spigot Algorithmを利用した定数の数値計算を紹介いたしましたが、いかがでしたでしょうか。またWindows用のアプリを作成できたことで、いつでも誰でも手軽に平方根等の数値計算に親しめるようになったと考えております。
今後の課題といたしましては、Windows以外でも動作するアプリの作成がありますが、力不足により完成には時間がかかりそうです。

発表は以上となります。
ご清聴ありがとうございました。

補足資料

- R表記法
  - 例をもって示す

$$\mathop{\mathrm{R}}_{k=0}^{\infty} r_k = 1 + r_0(1 + r_1(1 + r_2(1 + \cdots)))$$

$$c \mathop{\mathrm{R}}_{k=0}^{\infty} r_k = c + r_0(c + r_1(c + r_2(c + \cdots))) \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$= c\,(1 + r_0(1 + r_1(1 + r_2(1 + \cdots))))$$

$$b_k \mathop{\mathrm{R}}_{k=0}^{\infty} r_k = b_0 + r_0(b_1 + r_1(b_2 + r_2(b_3 + \cdots)))$$

  - 特に

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} \frac{a_j}{b_j} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_0}{b_0}\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0}\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{b_0}\left(1 + \frac{a_1}{b_1}\left(1 + \frac{a_2}{b_2}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)$$

$$= \frac{a_0}{b_0} \mathop{\mathrm{R}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\left(1 + \cdots\right)\right)\right)$$

$$= a_0 \mathop{\mathrm{R}}_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

R.W.Gosperの文献(参考文献[9])で導入されたR表記法について、例をもって示します。

補足資料

- R表記法
  - 次の変換も可能

$$
\begin{aligned}
a_k \overset{\infty}{\underset{k=0}{\mathrm{R}}} c_k &= a_0 + c_0(a_1 + c_1(a_2 + c_2(a_3 + \cdots))) \\
&= a_0 \left(1 + \frac{a_1 c_0}{a_0} \left(1 + \frac{a_2 c_1}{a_1} \left(1 + \cdots\right)\right)\right) \\
&= a_0 \overset{\infty}{\underset{k=0}{\mathrm{R}}} \frac{a_{k+1} c_k}{a_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a_k}{b_k} \overset{\infty}{\underset{k=0}{\mathrm{R}}} c_k &= \frac{a_0}{b_0} + c_0 \left(\frac{a_1}{b_1} + c_1 \left(\frac{a_2}{b_2} + c_2 \left(\frac{a_3}{b_3} + \cdots\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{b_0} \left(a_0 + \frac{b_0 c_0}{b_1} \left(a_1 + \frac{b_1 c_1}{b_2} \left(a_2 + \cdots\right)\right)\right) \\
&= \frac{a_k}{b_0} \overset{\infty}{\underset{k=0}{\mathrm{R}}} \frac{b_k c_k}{b_{k+1}}
\end{aligned}
$$

<reference>
[9] R.W.Gosper, Acceleration of series, Technical Report AIM-304, AI Laboratory, MIT, (March 1974)
ftp://publications.ai.mit.edu/ai-publications/pdf/AIM-304.pdf
http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/6088/AIM-304.pdf

R.W.Gosperの文献(参考文献[9])で導入されたR表記法について、例をもって示します。

円周の 144 による分割

岩淵 勇樹

2023-08-25

Abstract

12 はダースという単位であるほか、西洋では黄道十二星座、東洋では十二支、あるいは十二平均律などと、暦、時間など円や螺旋状の構造を持つ座標の一周を分割する数としてちょうどよく使われてきました。

本稿では円周をフィボナッチ数分割することの一般的な性質を紹介するとともに、12 の 2 乗である 144 で 144 支として円周を 144 分割することが自然な拡張のひとつであることを提案します。

1 定義

フィボナッチ数 F を以下のように定義します。

$$F_0 = 0 \tag{1}$$
$$F_1 = 1 \tag{2}$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n > 1) \tag{3}$$

フィボナッチ列 S を以下のように定義します。

$$S_0 = \texttt{0} \tag{4}$$
$$S_1 = \texttt{1} \tag{5}$$
$$S_n = S_{n-1}S_{n-2} \ (n > 1) \tag{6}$$

黄金比 Φ, ϕ を以下のように定義します。

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618 \tag{7}$$
$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \tag{8}$$

黄金角 θ を以下のように定義します。

$$\theta = 2\pi(1-\phi) \tag{9}$$
$$= \pi(3-\sqrt{5}) \approx 2.4\mathrm{rad} \tag{10}$$

2　性質

2.1　数的な性質

144 には以下の性質があります。

- フィボナッチ数である
- 平方数である
- 約数が多い（過剰数かつ高度過剰数である）

フィボナッチ数のうち、その数が平方数であるものは 1 と 144 だけです。
それとはまた別に、円周の分割が実用的である条件として、分割する数の約数が多いことが一つの指標になると考えられます。
暦、時間、角度の分割などに使われる 12, 60, 360 はいずれも過剰数、高度過剰数、高度合成数のいずれの性質も満たします。

2.1.1　約数の和

約数関数 $\sigma(n)$ は自然数 n の約数の総和を表します。

$$\sigma(n) \quad = \quad \sum_{n|k} n \tag{11}$$

144 の約数の総和 $\sigma(144)$ は $1+2+3+4+6+8+9+12+16+18+24+36+48+72+144 = 403$ です。

2.1.2　過剰数

過剰数は、自然数 n についてその約数の総和から n を引いた数が n より大きい数のことを言います。

$$\sigma(n) - n > n \tag{12}$$

$\sigma(144) - 144 = 259$ は 144 より大きいため、 144 は過剰数です。

2.1.3　高度過剰数

高度合成数は、自然数 n について n 未満の任意の自然数 m に対して $\sigma(m) < \sigma(n)$ が成立する数のことを言います。
144 はそれまでに多い $\sigma(120) = 360$ よりも約数の総和が上回り、高度過剰数となります。

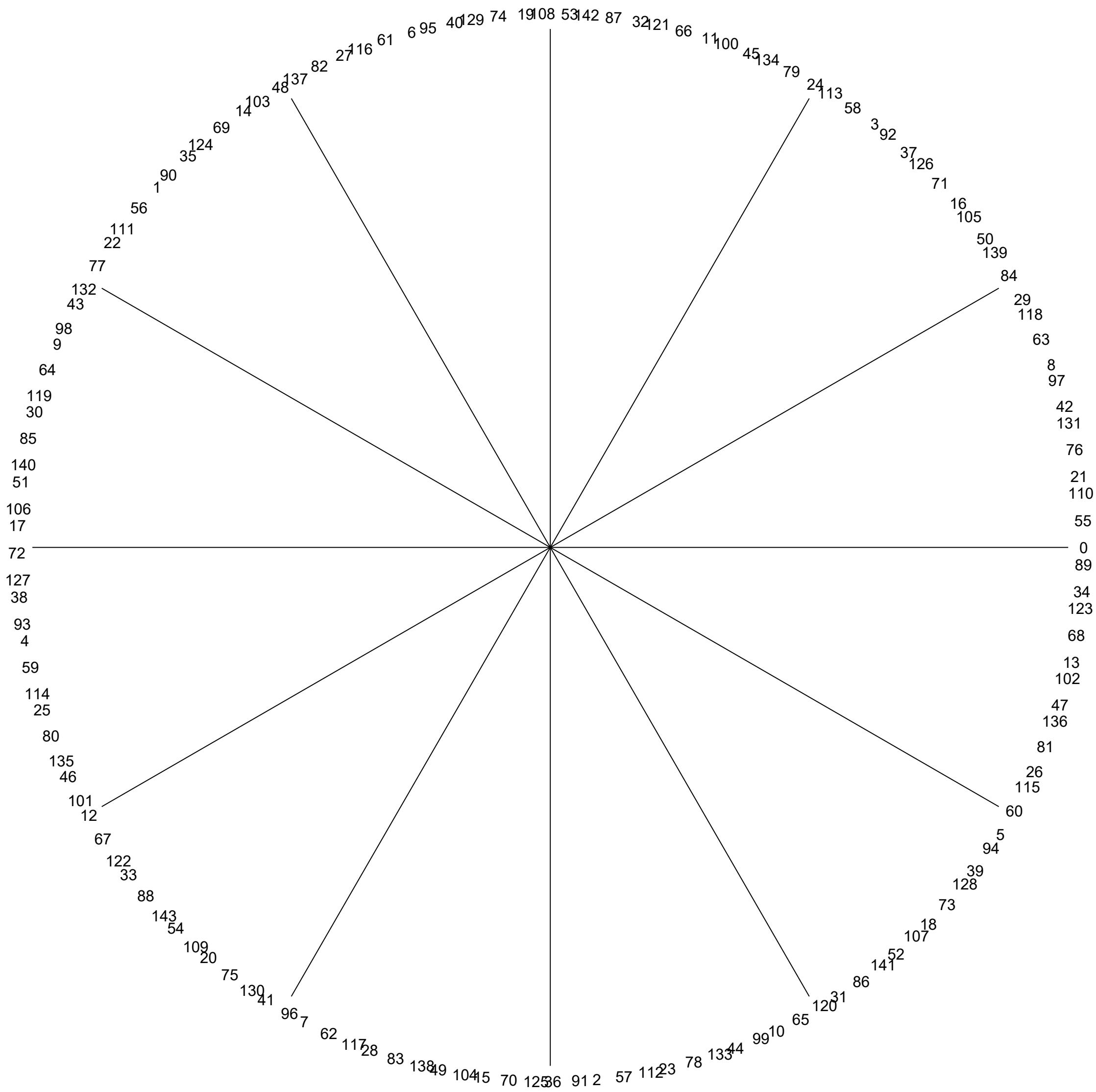


図 1: 12 分割のガイドを設けた黄金角による 144 回回転

2.1.4　高度合成数

高度合成数は、自然数 n についてそれ未満のどの自然数よりも約数の個数が多いものを言います。144 の約数の個数は 120 の約数の個数より 1 つ多いので、高度合成数ではありません。

2.2　円周の分割

フィボナッチ数で 12 の倍数であるのは最小が $F_{12} = 144$ 、次が $F_{24} = 46368$ であるので、 12 分割を基本とした次の拡張としては 144 分割が最適と考えられます。

円周を黄金角を用いて分割することは、他の角度で分割することと比べて、隣り合う座標間隔にむらがなく埋めていくことがきでることに優位性があります。

円周を 0rad から黄金角 (約 2.4rad) ごとに回転すると、ちょうどフィボナッチ数回の回転を行った到達点が 0rad に漸近します。

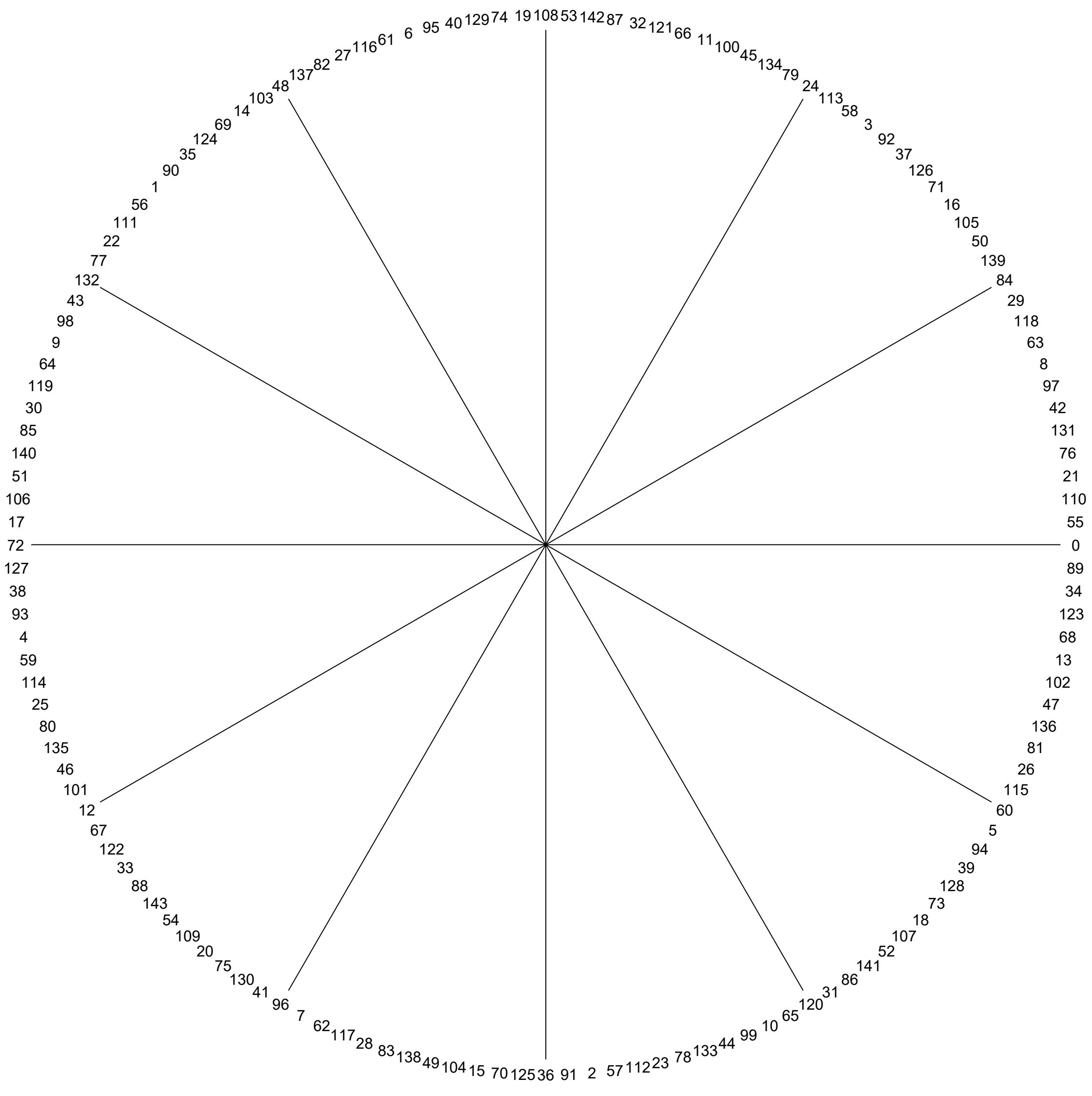


図 2: 12 分割のガイドを設けた円周の 144 分割

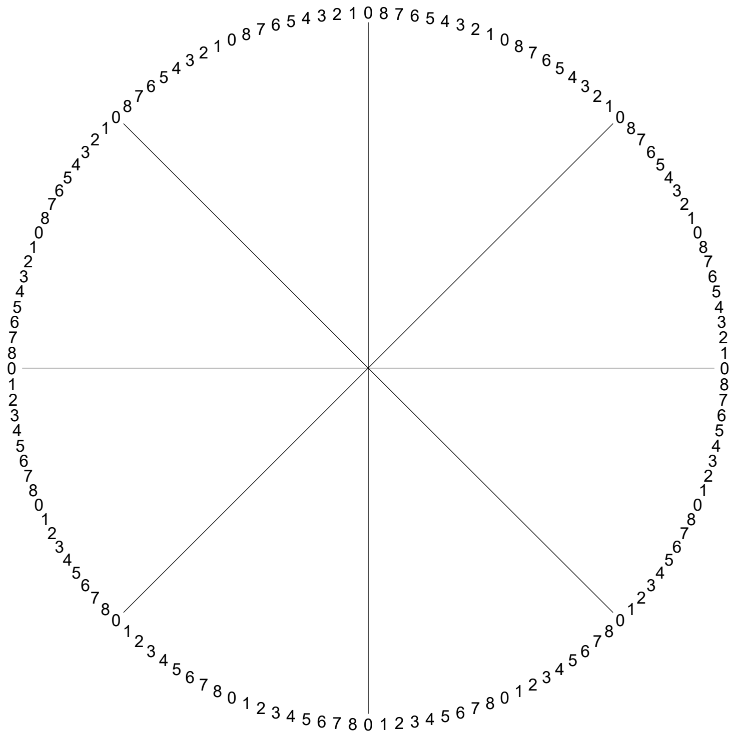


図 3: 8 分割のガイドを設けた円周の 144 分割 (mod 9)

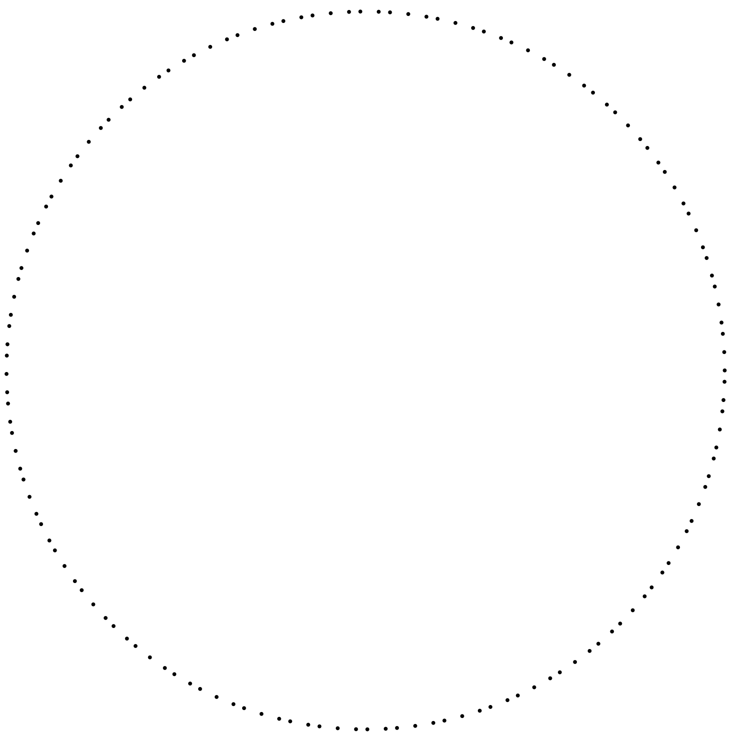


図 4: 黄金角による回転がフィボナッチ列の長短間隔をもつことの図示

$$\lim_{n\to\infty} F_n\theta \approx 0 \mod 2\pi \tag{13}$$

図 1 は黄金角に 0 – 144 回転した結果の各回転での座標のプロット（数値が回転した回数）であり、複素平面としては $e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 、座標としては $(\cos n\theta, \sin n\theta)$ となります。

これを円周上の並び順だけに着目して均等に並べ直したのが図 2 です。

この並び順は以下の数列になります。

$$55n = 0, 55, 110, 21, 76, 131, 42, 97, 8, 63, 118, 29, 84, 139, 50, 105, \ldots \mod 144 \tag{14}$$

本来はフィボナッチ数分割された円周は均等分割ではなく、図 4 で図示したように長短間隔（長い、短い）がフィボナッチ列と等しく対応しています。

図 3 で図示したように、9 の法の下では 0 – 9 の連続した数が 16 回繰り返されます。これは八卦や 8 方角などとの相性の良さを示唆しています。

3 まとめと展望

円周を黄金角を用いて分割することにより、むらがなく点を配置して円周を分割することができることを示しました。

特に 144 による分割は、十二支および八卦との相性の良さを保ちつつ、高度過剰数としての約数の多さを持ちます。

144 がフィボナッチ数であること、そして平方数であることを利用して、他の分割方法とも比べた上でさらに優位性を探究したいです。

参考文献

[1] 十二支の二乗　@第 26 回日曜数学会 (著者発表の動画)
`https://www.nicovideo.jp/watch/sm41865174`

[2] Sunday Math Party 26 - Zodiac Power 2 (著者によるスライド)
`https://speakerdeck.com/butchi/sunday-math-party-26-zodiac-power-2`

[3] 岩淵 勇樹, “フィボナッチ列とそれを応用した黄金比の近似”, 日本フィボナッチ協会第 15 回研究集会 (2017)

日本フィボナッチ協会　第２１回研究集会　　2023.8.25 (v.2)

フィボナッチ数とドジスンの公式との関係

東京海洋大学名誉教授　中 村　 滋

はじめに

「不思議な国のアリス」を書いたルイス・キャロル（Lewis Carroll）の本名はドジスン（Charles Lutwidge Dodgson ; 1832－1898）で，オックスフォード大学クライスト・チャーチ校の数学教授でした．彼が見つけた円周率のアークコタンジェント表現に関する命題はフィボナッチ数とも関係があるので，今回は そのあたりの話を簡単にまとめてみました．

マチンによる効率の良い計算公式の発見

18 世紀の始めに，マチン（John Machin ; 1680 ?－1752）は円周率π を アークコタンジェント (コタンジェントはタンジェントの逆数) で表すいくつかの公式を見つけました．アークコタンジェント関数を簡単に次のように書くことにします：

Ac（x）=Arccot x =Arctan(1／x).

すると，マチンが見つけた７つの円周率公式のうちで Ac（x）（xは整数）の整数倍の和で表す公式は，次の５通りです（ Ac (1)＝π／4 です）.

（M１）　π／4＝4 Ac (5)－Ac (239)　　　・・・（マチンの公式）
（M２）　π／4＝Ac (2)＋Ac (3)
（M３）　π／4＝2 Ac (2)－Ac (7)
（M４）　π／4＝2 Ac (3)＋Ac (7)
（M５）　π／4＝3 Ac (4)＋Ac (20)＋Ac (1985)

長いこと このうちの（M１）だけが「マチンの公式」と呼ばれ，(M２）はオイラー（1738), (M３）はヘルマン（1706),（M４）はハットン（1776）に帰せられていました．その一つで，（M２）π／4＝Ac (2)＋Ac (3) を Ac (1)＝Ac (2)＋Ac (3) と書き直し，さらにこれを，フィボナッチ数 F_n を使って，Ac (F_2)＝Ac (F_3)＋Ac (F_4) と書き直した人がいます．そして これを一般化して，**Ac (F_{2n})＝Ac (F_{2n+1})＋Ac (F_{2n+2})** というきれいな公式を見つけました (証明は コタンジェントの加法定理からすぐに得られます)．この公式で n＝1 とおくと，Ac (1)＝Ac (2)＋Ac (3) となって（M２）そのものです．次に n＝2 とおくと，Ac (3)＝Ac (5)＋Ac (8)，n＝3 とおくと Ac (8)＝Ac (13)＋Ac (21)，n＝4 とおくと Ac (21)＝Ac (34)＋Ac (55) ・・・ と，どこまでも続きます．今 求めた式の**最後の項**にその次の式を順に代入すると，π／4＝Ac (1)＝Ac (2)＋**Ac (3)**＝Ac (2)＋Ac (5)＋**Ac (8)**＝Ac (2)＋Ac (5)＋Ac (13)＋**Ac (21)**＝Ac (2)＋Ac (5)＋Ac (13)＋Ac (34)＋**Ac (55)**＝Ac (2)＋Ac (5)＋Ac (13)＋Ac (34)＋Ac (89)＋**Ac (144)**＝・・・, と どこまでも伸びていきます. したがって π／4＝Ac (1) を Ac (n)（nは整数）たちの和で表す公式は限りなく存在します．また，この和の極限値は，

$$\pi/4=\mathrm{Ac}(F_3)+\mathrm{Ac}(F_5)+\mathrm{Ac}(F_7)+\mathrm{Ac}(F_9)+\cdots=\Sigma_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ac}(F_{2n+1})$$

という美しい公式になります．フィボナッチ数と円周率は深く関係しているのです．

オイラー（Leonhard Euler；1707－1783）は（M２）を記した論文で，いくつかの一般公式も記しています．例えば，**$\pi/4=\mathrm{Ac}(a)+\mathrm{Ac}(b) \Leftrightarrow b=(a+1)/(a-1)$** を示した上で，$a=2$ とすると $b=3$ だから（M２）が成り立つとしました．ドジスンはこのオイラー公式を拡張しました（後述）．オイラーはもう１つの一般公式 **$\mathrm{Ac}(p)=\mathrm{Ac}(p+q)+\mathrm{Ac}((p^2+pq+1)/q)$** を示すと，$p=2$，$q=1$ とおいて（M４）が成り立つと述べています．

様々なアークコタンジェント公式の発見

いわゆる「マチンの公式」（M１）が見つかった 18 世紀以降は，様々なアークコタンジェント公式が見つかっています．それらのうちで，シムソン（Robert Simson，1687－1768）が見つけ，その後クリンゲンシェルナ（Samuel Klingenstierna，1698－1765）が再発見した公式，ガウス（Carl Friedrich Gauss，1777－1855）の公式 ① ②，シュテルマー（Carl Størmer，1874－1957）の公式 ① ② は，非常に効率が良いために 円周率計算の世界記録樹立の時，または別の公式を使った計算の検証の時に 何回も使われています：

(SK) $\pi/4=8\,\mathrm{Ac}(10)-\mathrm{Ac}(239)-4\,\mathrm{Ac}(515)$ （シムソン，1723；クリンゲンシェルナ，1730）
(G①) $\pi/4=12\,\mathrm{Ac}(18)+8\,\mathrm{Ac}(57)-5\,\mathrm{Ac}(239)$ （ガウス①，全集Ⅱ，1863）
(G②) $\pi/4=12\,\mathrm{Ac}(38)+20\,\mathrm{Ac}(57)+7\,\mathrm{Ac}(239)+24\,\mathrm{Ac}(268)$ （ガウス②，1863）
(St①) $\pi/4=6\,\mathrm{Ac}(8)+2\,\mathrm{Ac}(57)+\mathrm{Ac}(239)$ （シュテルマー，1896）
(St②) $\pi/4=176\,\mathrm{Ac}(57)+28\,\mathrm{Ac}(239)-48\,\mathrm{Ac}(682)+96\mathrm{Ac}(12943)$ （シュテルマー，1896）

レーマー（D. H. Lehmer；1905－1991）による計算効率は，**(M１)** 1. 8511，**(SK)** 1. 2892，**(G①)** 1. 7866，**(G②)** 2. 0348，**(St①)** 2, 0973 ，**(St②)** 1，5860 です（小さい数値ほど 良い）．

ドジスンが見つけた公式

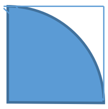
上述したように，オイラーは同値式 $\pi/4=\mathrm{Ac}(a)+\mathrm{Ac}(b) \Leftrightarrow b=(a+1)/(a-1)$ を使うと (M2) が示せると述べました．これは a と b が自然数と仮定すれば $b=(a+1)/(a-1)$ が自然数だから，$a=2$ または $a=3$ しかなく，そのとき $b=3$ または 2 と決まるからです．さらにこれによって，整数の Arccot ２つだけを（整数倍せずに）組み合わせて $\pi/4$ にする方法は（M２）しかないことが分かります．このオイラーの同値式は，19 世紀にドジスンによって 次のように一般化されました：

$$\mathrm{Ac}(a)=\mathrm{Ac}(b)+\mathrm{Ac}(c) \iff (b-a)(c-a)=a^2+1 .$$

このような公式を見つけることになったのは，数学的な訓練を受けていない人たちから届く「円の正方形化」に関する間違った論文が 学会の仕事を停滞させるのを避けるために，その間違いを指摘する仕事を引き受けたからでした．18 世紀の半ばには，フランスの科学アカデミーとイギリスの王認協会（Royal（ロイヤル） Society（ソサイアティー）；日本では王立協会と訳されることが多いのですが，王室からは費用が出ておらず，自分たちの出し合った費用で運営している科

学者たちの集まりです）は「円の正方形化」に関する論文を拒絶することを決定しています．しかしそれでも論文は次々に送られてくるのでした．イギリスでは 主にドゥ・モルガン（De Morgan；1806－1871）が，拒絶した論文を送り返す仕事をしていましたが，彼の没後にドジスンがその仕事を引き継ぎました．彼らが自分の論文の間違いに気づいてもらうために色々考えている中で，マチンの公式よりも効率的で単純な円周率の計算公式を探し始めました．それ以来 20 年近くにわたって「円の正方形化」屋に向けたパンフレットのために書いた 手稿やゲラ刷りの中に命題や定理が書いてあります．命題の一つは次のように読めます：

命題１　円の面積は，半径の 2 乗の 4 倍より小さく，その 2 倍より大きい．
（証明）原点を中心とする円の第 I 象限部分の四分円の面積は，それをスッポリ含む半径を一辺とする正方形の面積よりも小さく，四分円の弦になっているこの正方形の対角線で切った直角二等辺三角形の面積よりは大きいことは一目瞭然である．これを 4 倍すればこの命題になる．



□

　別の節には次の命題が書いてあります．

命題２　$\mathrm{Ac}(k)=\mathrm{Ac}(k+x)+\mathrm{Ac}(k+y) \iff xy=k^2+1$ ．
（ここで $k=a$，$x=b-k$，$y=c-k$　とおけば 上述の公式になる．）
（証明）$\mathrm{Ac}(k+x)=\alpha$，$\mathrm{Ac}(k+y)=\beta$，$\mathrm{Ac}(k)=\gamma$ と置き，両辺のコタンジェントをとる．
コタンジェントの加法定理：$\cot(\alpha+\beta)=(\cot\alpha\cot\beta-1)/(\cot\alpha+\cot\beta)$ を使えば，$\cot\gamma=k=\cot(\alpha+\beta)=\{(k+x)(k+y)-1\}/\{(k+x)+(k+y)\}=\{(k^2+k(x+y)+xy-1\}/\{(2k+x+y)\}$.
$\therefore\ k^2+k(x+y)+xy-1=k(2k+x+y)\} \iff xy=k^2+1$ ．　□

同じ手稿の別の節「円の面積の限界」には，昔の幾何学的なアプローチと 当時の解析的なアプローチの強い関連性を示すやり方を述べた次のような命題が書いてあります．

命題３　頂角 $\mathrm{Ac}(k)$ の扇形の半径と弦で作る二等辺三角形の面積は $r^2/2\sqrt{k^2+1}$ であり，扇形の端点で引いた接線を加えて作られる この扇形に外接する四角形の面積は，$r^2/(k+\sqrt{k^2+1})$ である（証明は初等的にできる）．

命題４　頂角 $\mathrm{Ac}(\alpha)$ の扇形　a 個と，頂角 $\mathrm{Ac}(\beta)$ の扇形　b 個と，･･･ で一つの八分円になったとする．両端の半径と 各扇形の端点で引いた接線で外接多角形を作り，各扇形の半径と弦とで，この八分円に内接する多角形を作る．この八分円の面積 $S=\pi r^2/8$ は，
$r^2(a/2\sqrt{\alpha^2+1}+b/2\sqrt{\beta^2+1}+\cdots)<S<r^2(a/(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})+b/(\beta+\sqrt{\beta^2+1})+\cdots)$ を満たす（これによって円周率 π を 上と下から評価できる）．

　彼は 八分円をたくさんの細長い扇形に分けることによって 下記のアークコタンジェント公式を見つけ，円周率 π の近似値を求めています．

(D１)　$\pi／4=7\,\mathrm{Ac}\,(18)+5\,\mathrm{Ac}\,(38)+10\,\mathrm{Ac}\,(47)+3\,\mathrm{Ac}\,(57)$

(D２)　$\pi／4=20\,\mathrm{Ac}\,(57)+19\,\mathrm{Ac}\,(68)+12\,\mathrm{Ac}\,(117)+10\,\mathrm{Ac}\,(268)+5\,\mathrm{Ac}\,(327)$

(D３)　$\pi／4=71\,\mathrm{Ac}\,(317)+5\,\mathrm{Ac}\,(327)+19\,\mathrm{Ac}\,(342)+71\,\mathrm{Ac}\,(351)+19\,\mathrm{Ac}\,(443)+71\,\mathrm{Ac}\,(456)$
$+10\,\mathrm{Ac}\,(489)+10\,\mathrm{Ac}\,(593)+39\,\mathrm{Ac}\,(1252)+51\,\mathrm{Ac}\,(2855)+19\,\mathrm{Ac}\,(5618)$

そして，命題４を使うと円周率 π は，(D１) で 3.14064 と 3.14212 の間に，(D２) では 3.14145 と 3.14167 の間に，(D３) で 3.141583 と 3.141597 の間に入ると書いています．使われた扇形は，順に 25 個，66 個，385 個 とかなり多数になっています．

追記：ドジスンの研究に関し，ケンブリッジ大学のグレイシャー（Glaisher；1848－1928）にも類似の結果がある との指摘を頂きました．確かに $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ac}(k^2／2)=3\pi／4$，$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ac}(2k^2)=\pi／4$，$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ac}((2k+1)^2／2)=\pi／2$，などの無限和公式を証明し(1878)，その後 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n／n\binom{2n}{n}=\pi／2$，$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n／n^2\binom{2n}{n}=\pi^2／8$ も発見しました。，イギリスの同時代人なのでお互いに知っていた可能性があります．なお これらの無限和は 後にラマヌジャン（Ramanujan；1887－1920）が再発見しました(1914)．

マチンの計算公式たちの証明

ドジスンの上記の命題を考えているときに，コタンジェントの加法定理だけを使う円周率公式の証明方法を思いついたので，そのやり方で マチンが見つけた公式のうちの３つを証明します．コタンジェントの加法定理と それから得られる公式は次の通りです：

$\cot(\alpha+\beta)=(\cot\alpha\cot\beta-1)／(\cot\alpha+\cot\beta)$,

$\cot 2\theta=(\cot^2\theta-1)／2\cot\theta$,

$\cot 3\theta=(\cot^3\theta-3\cot\theta)／(3\cot^2\theta-1)$,

$\cot(\pi／4-\phi)=(\cot\phi+1)／(\cot\phi-1)$.

(M４)　$\pi／4=2\,\mathrm{Ac}\,(3)+\mathrm{Ac}\,(7)$　の証明

(証明) $\theta=\mathrm{Ac}\,(3)$ とおくと，$\cot 2\theta=(\cot^2\theta-1)／2\cot\theta=(9-1)／(2\cdot3)=8／6=4／3$．よって，$\cot(\pi／4-2\theta)=(\cot 2\theta+1)／(\cot 2\theta-1)=7$．$\therefore$ $\pi／4-2\theta=\mathrm{Ac}\,(7)$．$\pi／4=2\,\mathrm{Ac}\,(3)+\mathrm{Ac}\,(7)$．□

(M１)　$\pi／4=4\,\mathrm{Ac}\,(5)-\mathrm{Ac}\,(239)$　の証明

(証明) $\theta=\mathrm{Ac}\,(5)$ とおくと，$\cot 2\theta=(\cot^2\theta-1)／2\cot\theta=(25-1)／(2\cdot5)=12／5$．よって，$\cot 4\theta=(\cot^2 2\theta-1)／2\cot 2\theta=(144-25)／(2\cdot60)=119／120$．これより，$\cot(\pi／4-4\theta)=(119／120+1)／(119／120-1)=-239$．$\therefore$ $\pi／4-4\theta=-\mathrm{Ac}\,(239)$．$\pi／4=4\mathrm{Ac}\,(5)-\mathrm{Ac}\,(239)$．□

(M５)　$\pi／4=3\,\mathrm{Ac}\,(4)+\mathrm{Ac}\,(20)+\mathrm{Ac}\,(1985)$　の証明

(証明) $\theta=\mathrm{Ac}\,(4)$ に対し，$\cot 3\theta=(\cot^3\theta-3\cot\theta)／(3\cot^2\theta-1)=(64-12)／(48-1)=52／47$．
$\omega=\mathrm{Ac}\,(20)$，$\phi=3\theta+\omega$ とすると，$\cot\phi=\cot(3\theta+\omega)=(\cot3\theta\cot\omega-1)／(\cot3\theta+\cot\omega)$
$=((52／47)\cdot20-1)／(52／47+20)=((52\cdot20)-47)／(52+20\cdot47)=993／992$．これより，
$\cot(\pi／4-\phi)=(993／992+1)／(993／992-1)=1985$．$\therefore$ $\pi／4-\phi=\mathrm{Ac}\,(1985)$．
$\pi／4=3\,\mathrm{Ac}\,(4)+\mathrm{Ac}\,(20)+\mathrm{Ac}\,(1985)$．□

どれも簡単に証明出来ました．(M２) を利用してフィボナッチ数との関係が明らかになり，オイラーの式を一般化したのがドジスンの公式でした．今回はそこに焦点を当ててみました．

The p-Frobenius numbers for Fibonacci triples

Takao Komatsu
Department of Mathematical Sciences, School of Science
Zhejiang Sci-Tech University
Hangzhou 310018 China
komatsu@zstu.edu.cn

1 Introduction

The *linear Diophantine problem of Frobenius* is to find the largest integer which is not expressed by a nonnegative linear combination of given positive integers $a_1, a_2, \dots, a_k$ $(k \ge 2)$. Such a largest integer is called the *Frobenius number* [16], denoted by $g(A) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$, where $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. It is clear that the Frobenius number exists if and only if $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$. For example, if $A = \{4, 6, 10\}$, then $\gcd(A) = 2$ and all odd integers cannot be expressed in terms of $4, 6$ and 10. So, there is no such largest integer.

Though there are several generalizations of the Frobenius number, we are interested in one of the most general and most natural types of Frobenius numbers, which focuses on the number of expressions. For a nonnegative integer p, the largest integer such that the number of expressions that can be represented by $a_1, a_2, \dots, a_k$ is at most p is denoted by $g_p(A) = g_p(a_1, a_2, \dots, a_l)$ and may be called the *p-Frobenius number*. That is, all integers larger than $g_p(A)$ have at least the number of representations of $p + 1$ or more. When $p = 0$, $g(A) = g_0(A)$ is the original Frobenius number.

One can consider the largest integer $g_p^*(a_1, a_2, \dots, a_l)$ that has exactly p distinct representations (see, e.g., [2, 3]). However, in this case, the ordering $g_0^* \le g_1^* \le \cdots$ may not hold. For example, $g_{17}^*(2, 5, 7) = 43 > g_{18}^*(2, 5, 7) = 42$. In addition, for some j, g_j^* may not exist. For example, $g_{22}^*(2, 5, 7)$ does not exist because there is no positive integer whose number of representations is exactly 22. Therefore, we do not study $g_p^*(A)$ but $g_p(A)$.

2 Two variables

For $p \geq 0$, if $k = 2$, explicit formulas of $g_p(a_1, a_2)$ is given without any difficulty:

$$g_p(a_1, a_2) = (p + 1)(a_1 a_2) - a_1 - a_2 \,.$$

When $p = 0$, it is reduced to the result in [16]:

$$g_0(a_1, a_2) = a_1 a_2) - a_1 - a_2 \,.$$

However, if $k \geq 3$, no explicit formula had been given in general. Even when $p = 0$, only for some special cases, explicit closed formulas have been found, including arithmetic, geometric, Mersenne, repunits and triangular (see, e.g., [13, 14, 15] and references therein). When $p > 0$ the situation becomes much more difficult, see [5, 6, 7] for recent achievements.

In this paper, we give an explicit formula for the p-Frobenius number for the Fibonacci number triple (F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) $(i, k \geq 3)$. Here, the n-th Fibonacci number F_n is defined by $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$ with $F_1 = 1$ and $F_0 = 0$. Our main results (Theorem 1 below) is a generalizations of [12, Theorem 1] when $p = 0$. However, when $p > 0$, the exact situation is not completely similar to the case where $p = 0$, and the case by case discussion is necessary.

3 General p case

First, we give the formula for general p.

Theorem 1. *Let $i \geq 3$ and p be a nonnegative integer. When $r = \lfloor (F_i - 1)/F_k \rfloor \geq p$ with $(r, p) \neq (0, 0)$, we have*

$$\begin{aligned} &g_p(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) \\ &= \begin{cases} (F_i - rF_k - 1)F_{i+2} + (r + p)F_{i+k} - F_i & \text{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} \geq F_{k-2}F_i; \\ (F_k - 1)F_{i+2} + (r + p - 1)F_{i+k} - F_i & \text{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} < F_{k-2}F_i \,. \end{cases} \end{aligned}$$

Remark. When $p = 0$, Theorem 1 reduces to [12, Theorem 1] except $r = 0$:

$$\begin{aligned} &g_0(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) \\ &= \begin{cases} (F_i - rF_k - 1)F_{i+2} + rF_{i+k} - F_i \\ \qquad \text{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} \geq F_{k-2}F_i; \\ (F_k - 1)F_{i+2} + (r - 1)F_{i+k} - F_i \\ \qquad \text{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} < F_{k-2}F_i \,. \end{cases} \end{aligned}$$

4 The cases for $p = 1, 2, 3$

Theorem 1 does not say anything if $r = \lfloor (F_i - 1)/F_k \rfloor < p$. In fact, in this case, the situation is very complicated. We need a detail discussion. Here are full results for small positive integers p. When $p = 1$, we have the following.

Theorem 2. *For $i \ge 3$, we have*

$$\begin{aligned} g_1(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) &= (2F_i - 1)F_{i+2} - F_i \quad (k \ge i+2)\,, \\ g_1(F_i, F_{i+2}, F_{2i+1}) &= (F_{i-2} - 1)F_{i+2} + F_{2i+1} - F_i\,, \\ g_1(F_i, F_{i+2}, F_{2i}) &= (F_i - 1)F_{i+2} + F_{2i} - F_i\,. \end{aligned}$$

When $r = \lfloor (F_i - 1)/F_k \rfloor \ge 1$, that is, $k \le i - 1$, we have

$$\begin{aligned} & g_1(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) \\ & = \begin{cases} (F_i - rF_k - 1)F_{i+2} + (r+1)F_{i+k} - F_i & \textit{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} \ge F_{k-2}F_i, \\ (F_k - 1)F_{i+2} + rF_{i+k} - F_i & \textit{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} < F_{k-2}F_i. \end{cases} \end{aligned}$$

When $p = 2$, we have the following.

Theorem 3. *For $i \ge 3$, we have*

$$\begin{aligned} g_2(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) &= (3F_i - 1)F_{i+2} - F_i \quad (k \ge i+3)\,, \\ g_2(F_i, F_{i+2}, F_{2i+2}) &= \begin{cases} (F_{i-2} - 1)F_{i+2} + F_{2i+2} - F_i & (i \textit{ is odd}) \\ (F_{i+2} - 1)F_{i+2} - F_i & (i \textit{ is even})\,, \end{cases} \\ g_2(F_i, F_{i+2}, F_{2i+1}) &= (F_i - 1)F_{i+2} + F_{2i+1} - F_i\,, \\ g_2(F_i, F_{i+2}, F_{2i}) &= (2F_i - 1)F_{i+2} - F_i\,, \\ g_2(F_i, F_{i+2}, F_{2i-1}) &= \begin{cases} (F_{i-4} - 1)F_{i+2} + 3F_{2i-1} - F_i & (i \ge 5) \\ F_{i+2} + 2F_{2i-1} - F_i (= 31) & (i = 4)\,. \end{cases} \end{aligned}$$

When $r = \lfloor (F_i - 1)/F_k \rfloor \ge 2$, that is, $k \le i - 2$, we have

$$\begin{aligned} & g_2(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) \\ & = \begin{cases} (F_i - rF_k - 1)F_{i+2} + (r+2)F_{i+k} - F_i & \textit{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} \ge F_{k-2}F_i; \\ (F_k - 1)F_{i+2} + (r+1)F_{i+k} - F_i & \textit{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} < F_{k-2}F_i\,. \end{cases} \end{aligned}$$

When $p = 3$, we have the following.

Theorem 4. *For $i \geq 3$, we have*

$$\begin{aligned}
g_3(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) &= (4F_i - 1)F_{i+2} - F_i \quad (k \geq i+3)\,,\\
g_3(F_i, F_{i+2}, F_{2i+2}) &= (F_i - 1)F_{i+2} + F_{2i+2} - F_i\,,\\
g_3(F_i, F_{i+2}, F_{2i+1}) &= (F_i + F_{i-2} - 1)F_{i+2} + F_{2i+1} - F_i\,,\\
g_3(F_i, F_{i+2}, F_{2i}) &= (F_i - 1)F_{i+2} + 2F_{2i} - F_i\,,\\
g_3(F_i, F_{i+2}, F_{2i-1}) &= (F_{i-2} - 1)F_{i+2} + 3F_{2i-1} - F_i \quad (i \geq 4)\,,\\
g_3(F_i, F_{i+2}, F_{2i-2}) &= \begin{cases} (F_{i-5} - 1)F_{i+2} + 5F_{2i-2} - F_i & (i \geq 6)\\ F_{i+2} + 4F_{2i-2} - F_i (= 92) & (i = 5)\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

When $r = \lfloor (F_i - 1)/F_k \rfloor \geq 3$, that is, $k \leq i - 3$, we have

$$\begin{aligned}
&g_3(F_i, F_{i+2}, F_{i+k})\\
&= \begin{cases} (F_i - rF_k - 1)F_{i+2} + (r+3)F_{i+k} - F_i & \text{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} \geq F_{k-2}F_i;\\ (F_k - 1)F_{i+2} + (r+2)F_{i+k} - F_i & \text{if } (F_i - rF_k)F_{i+2} < F_{k-2}F_i\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

5 Lucas triples

By using a similar frame as in [12], Bokaew, Yuttanan and Mavecha [1] showed an analogous result about Lucas triple (L_i, L_{i+2}, L_{i+k}) when $p = 0$.

Theorem 5. *For integers $i, k \geq 3$ and $r = \lfloor (L_i - 1)/F_k \rfloor$, we have*

$$\begin{aligned}
&g_0(L_i, L_{i+2}, L_{i+k})\\
&= \begin{cases} (L_i - 1)L_{i+2} - L_i(rF_{k-2} + 1) & \text{if } r = 0, \text{ or } r \geq 1 \text{ and}\\ & (L_i - rF_k)L_{i+2} > F_{k-2}L_i,\\ (rF_k - 1)L_{i+2} - L_i\big((r-1)F_{k-2} + 1\big) & \text{otherwise}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

For general p, we have an explicit formula.

Theorem 6. *Let $i \geq 3$ and p be a nonnegative integer. When $r = \lfloor (L_i - 1)/F_k \rfloor \geq p$ with $(r, p) \neq (0, 0)$, we have*

$$\begin{aligned}
&g_p(L_i, L_{i+2}, L_{i+k})\\
&= \begin{cases} (L_i - rF_k - 1)L_{i+2} + (r+p)L_{i+k} - L_i & \text{if } (L_i - rF_k)L_{i+2} \geq F_{k-2}L_i;\\ (F_k - 1)L_{i+2} + (r+p-1)L_{i+k} - L_i & \text{if } (L_i - rF_k)L_{i+2} < F_{k-2}L_i\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

When $p=1$, we have the following.

Theorem 7. *For $i\ge 3$, we have*

$$
\begin{aligned}
g_1(L_i,L_{i+2},L_{i+k})&=(2L_i-1)L_{i+2}-L_i\quad(k\ge i+4)\,,\\
g_1(L_i,L_{i+2},L_{2i+3})&=(F_{i+3}-1)L_{i+2}-L_i\,,\\
g_1(L_i,L_{i+2},L_{2i+2})&=(3F_{i-1}-1)L_{i+2}+L_{2i+2}-L_i\,.
\end{aligned}
$$

When $r=\lfloor (L_i-1)/F_k\rfloor\ge 1$, that is, $k\le i+1$, we have

$$
\begin{aligned}
&g_1(L_i,L_{i+2},L_{i+k})\\
&=\begin{cases}(L_i-rF_k-1)L_{i+2}+(r+1)L_{i+k}-L_i & \text{if } (L_i-rF_k)L_{i+2}\ge F_{k-2}L_i,\\ (F_k-1)L_{i+2}+rL_{i+k}-L_i & \text{if } (L_i-rF_k)L_{i+2}< F_{k-2}L_i.\end{cases}
\end{aligned}
$$

When $p=2$, we have the following.

Theorem 8. *For $i\ge 3$, we have*

$$
\begin{aligned}
g_2(L_i,L_{i+2},L_{i+k})&=(3L_i-1)L_{i+2}-L_i\quad(k\ge i+4)\,,\\
g_2(L_i,L_{i+2},L_{2i+3})&=(L_i-1)L_{i+2}+L_{2i+3}-L_i\,,\\
g_2(L_i,L_{i+2},L_{2i+2})&=\begin{cases}(L_i-1)L_{i+2}+L_{2i+2}-L_i & (i \text{ is odd})\\ (2L_i-1)L_{i+2}-L_i & (i \text{ is even})\,,\end{cases}\\
g_2(L_i,L_{i+2},L_{2i+1})&=(2F_{i-1}-1)L_{i+2}+2L_{2i+1}-L_i\,,\\
g_2(L_i,L_{i+2},L_{2i})&=L_{i+2}+3L_{2i}-L_i(=61)\quad(i=3)\,.
\end{aligned}
$$

When $r=\lfloor (L_i-1)/F_k\rfloor\ge 2$, that is, $k\le i$ except $i=k=3$, we have

$$
\begin{aligned}
&g_2(L_i,L_{i+2},L_{i+k})\\
&=\begin{cases}(L_i-rF_k-1)L_{i+2}+(r+2)L_{i+k}-L_i & \text{if } (L_i-rF_k)L_{i+2}\ge F_{k-2}L_i,\\ (F_k-1)L_{i+2}+(r+1)L_{i+k}-L_i & \text{if } (L_i-rF_k)L_{i+2}< F_{k-2}L_i.\end{cases}
\end{aligned}
$$

When $p=3$, we have the following.

Theorem 9. *For $i\ge 3$, we have*

$$
\begin{aligned}
g_3(L_i,L_{i+2},L_{i+k})&=(4L_i-1)L_{i+2}-L_i\quad(k\ge i+5)\,,\\
g_3(L_i,L_{i+2},L_{2i+4})&=(4F_{i-1}-F_{i-2}-1)L_{i+2}+L_{2i+4}-L_i\,,\\
g_3(L_i,L_{i+2},L_{2i+3})&=(4F_{i+1}-1)L_{i+2}-L_i\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_3(L_i, L_{i+2}, L_{2i+2}) &= (F_i + 2F_{i-3} - 1)L_{i+2} + 2L_{2i+2} - L_i\,,\\
g_3(L_i, L_{i+2}, L_{2i+1}) &= (F_{i-1} - 1)L_{i+2} + 3L_{2i+1} - L_i\,,\\
g_3(L_i, L_{i+2}, L_{2i}) &= \begin{cases} (2F_{i-3} - 1)L_{i+2} + 4L_{2i} - L_i & (i \ge 4)\\ 3L_{i+2} + 2L_{2i} - L_i (= 69) & (i = 3)\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

When $r = \lfloor (L_i - 1)/F_k \rfloor \ge 3$*, that is,* $k \le i - 1$*, we have*

$$
\begin{aligned}
& g_3(L_i, L_{i+2}, L_{i+k})\\
&= \begin{cases} (L_i - rF_k - 1)L_{i+2} + (r+3)L_{i+k} - L_i & \text{if } (L_i - rF_k)L_{i+2} \ge F_{k-2}L_i,\\ (F_k - 1)L_{i+2} + (r+2)L_{i+k} - L_i & \text{if } (L_i - rF_k)L_{i+2} < F_{k-2}L_i. \end{cases}
\end{aligned}
$$

6 Jacobsthal triples

The results for Fibonacci and Lucas triples can be applied to Jacobsthal triples. The Jacobsthal sequence $\{J_n\}_{n\ge 0}$ is defined by

$$
J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \quad (n \ge 2) \quad \text{with} \quad J_0 = 0 \quad \text{and} \quad J_1 = 1
$$

In fact, we can treat with a more general *Jacobsthal polynomials* $J_n(x)$, defined by the recurrence relation $J_n(x) = J_{n-1}(x) + xJ_{n-2}(x)$ $(n \ge 2)$ with $J_0(x) = 0$ and $J_1(x) = 1$ ([11, Ch.44]). When $x = 2$, $J_n = J_n(2)$ are the Jacobsthal numbers. Then we have the following [9].

Theorem 10. *Let* $i, k \ge 3$ *and* p *be a nonnegative integer, and* b *be a positive integer. When* $r = \lfloor (J_i(b) - 1)/J_k(b) \rfloor \ge p$*, we have*

$$
\begin{aligned}
& g_p(J_i(b), J_{i+2}(b), J_{i+k}(b))\\
&= \begin{cases} (J_i(b) - rJ_k(b) - 1)J_{i+2}(b) + (r+p)J_{i+k}(b) - J_i(b)\\ \qquad\qquad \text{if } (r,p) = (0,0), \text{ or } (J_i(b) - rJ_k(b))J_{i+2}(b) \ge b^2 J_{k-2}(b)J_i(b);\\ (J_k(b) - 1)J_{i+2}(b) + (r+p-1)J_{i+k}(b) - J_i(b)\\ \qquad\qquad \text{if } (J_i(b) - rJ_k(b))J_{i+2}(b) < b^2 J_{k-2}(b)J_i(b)\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Similarly, we can consider the *Jacobsthal-Lucas polynomials* $j_n(x)$ are introduced as $j_n(x) = j_{n-1}(x) + xj_{n-2}(x)$ $(n \ge 2)$ with $j_0(x) = 2$ and $j_1(x) = 1$. $j_n = j_n(2)$ are called *Jacobsthal-Lucas numbers* and $L_n = j_n(1)$ are well-known Lucas numbers.

Theorem 11. *Let $i, k \ge 3$ and p be a nonnegative integer, and b be a positive integer. When $r = \lfloor (j_i(b) - 1)/J_k(b) \rfloor \ge p$, we have*

$$
\begin{aligned}
&g_p(j_i(b), j_{i+2}(b), j_{i+k}(b))\\
&= \begin{cases} (j_i(b) - rJ_k(b) - 1)j_{i+2}(b) + (r+p)j_{i+k}(b) - j_i(b) \\ \qquad\qquad \text{if } (r,p) = (0,0), \text{ or } (j_i(b) - rJ_k(b))j_{i+2}(b) \ge b^2 J_{k-2}(b) j_i(b); \\ (J_k(b) - 1)j_{i+2}(b) + (r+p-1)j_{i+k}(b) - j_i(b) \\ \qquad\qquad \text{if } (j_i(b) - rJ_k(b))j_{i+2}(b) < b^2 J_{k-2}(b) j_i(b)\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

The results in Theorem 10 (and Theorem 11) can be extended for the triples $A := \{a, va + b, vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\}$, where a and b are positive integers with $\gcd(a, b) = 1$ and $a, k \ge 3$. If $a = J_i(v)$ and $b = J_{i+1}(v)$, then by $vJ_i(v)J_{k-1}(v) + J_{i+1}(v)J_k(v) = J_{i+k}(v)$, we get $A = \{J_i(v), J_{i+2}(v), J_{i+k}(v)\}$. See [8] in detail.

7 Open questions

It would be interesting and possible to find an explicit form of p-Frobenius number about the so-called Pell-type numbers, satisfying the recurrence relation $P_n^* = aP_{n-1}^* + P_{n-2}^*$ for an integer $a \ge 2$. Contrary to the expectation, the situation is not similar. In this case, as the value of a increases, the value of P_n^* increases even more rapidly, so it becomes more rapidly difficult to trace the actual situation.

How about more general numbers W_n, where

$$W_n = uW_{n-1} + vW_{n-2} \quad (n \ge 2) \quad \text{with} \quad W_0 = w_0, \quad W_1 = w_1\,?$$

Or Tribonacci numbers T_n, where

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \quad (n \ge 3) \quad \text{with} \quad T_0 = 0,\, T_1 = T_2 = 1\,?$$

References

[1] R. Bokaew, B. Yuttanan and S. Mavecha, *Formulae of the Frobenius number in relatively prime three Lucas numbers*, Songklanakarin J. Sci. Technol. **42** (2020), No.5, 1077–1083.

[2] A. Brown, E. Dannenberg, J. Fox, J. Hanna, K. Keck, A. Moore, Z. Robbins, B. Samples and J. Stankewicz, *On a generalization of the Frobenius number*, arXiv:1001.0207 (2010).

[3] L. Fukshansky and A. Schurmann, *Bounds on generalized Frobenius numbers*, Eur. J. Comb. **32** (2011), No. 3, 361–368.

[4] T. Komatsu, *On the number of solutions of the Diophantine equation of Frobenius–General case*, Math. Commun. **8** (2003), 195–206.

[5] T. Komatsu, *Sylvester power and weighted sums on the Frobenius set in arithmetic progression*, Discrete Appl. Math. **315** (2022), 110–126.

[6] T. Komatsu, *The Frobenius number for sequences of triangular numbers associated with number of solutions*, Ann. Comb. **26** (2022) 757–779.

[7] T. Komatsu, *The Frobenius number associated with the number of representations for sequences of repunits*, C. R. Math., Acad. Sci. Paris **361** (2023), 73–89.

[8] T. Komatsu, S. Laishram and P. Punyani, *p-numerical semigroups of generalized Fibonacci triples*, Symmetry **15** (2023), no.4, Article 852, 13 p. https://doi.org/10.3390/sym15040852

[9] T. Komatsu and C. Pita-Ruiz, *The Frobenius number for Jacobsthal triples associated with number of solutions*, Axioms **12** (2023), Article 98, 18 pp. https://doi.org/10.3390/axioms12020098

[10] T. Komatsu and H. Ying, *The p-Frobenius and p-Sylvester numbers for Fibonacci and Lucas triplets*, Math. Biosci. Eng. **20** (2023), No.2, 3455–3481. doi:10.3934/mbe.2023162

[11] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*; Pure and Applied Mathematics (Hoboken); John Wiley & Sons, Inc.: Hoboken, NJ, USA, 2019; Volume 2.

[12] J. M. Marin, J. L. Ramirez Alfonsin and M. P. Revuelta, *On the Frobenius number of Fibonacci numerical semigroups*, Integers **7** (2007), A14, 7 pp.

[13] A. M. Robles-Pérez and J. C. Rosales, *The Frobenius number for sequences of triangular and tetrahedral numbers*, J. Number Theory **186** (2018), 473–492.

[14] J. C. Rosales, M. B. Branco and D. Torrão, *The Frobenius problem for Thabit numerical semigroups*, J. Number Theory **155** (2015), 85–99.

[15] J. C. Rosales, M. B. Branco and D. Torrão, *The Frobenius problem for Mersenne numerical semigroups*, Math. Z. **286** (2017), 741–749.

[16] J. J. Sylvester, *Mathematical questions with their solutions*, Educational Times **41** (1884), 21.

フィボナッチ多項式の生成関数を整数係数多項式にする有理関数について

津野 祐司　（和歌山工業高等専門学校）

Abstract. フィボナッチ多項式は, フィボナッチ数を一般化したものと考えられ, フィボナッチ数に関して成り立つ結果の多項式版を考えてみたくなることは自然なことである. D. S. Hong, P. Pongsriiam, A. Bulawa そして W. K. Lee は, フィボナッチ数列の生成関数 $f(t) = t/(1-t-t^2)$ が整数値となる有理数の必要十分条件は $t = F_k/F_{k+1}$（$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$）, または $t = -F_{k+1}/F_k$（$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$）であることを示したが, 本研究ではこの結果の多項式版を考察する.

1. Introduction

a と b を正の整数とする. A. Bulawa と W. K. Lee [1] は, 漸化式

$$F_{i+2} = aF_{i+1} + bF_i,$$

初期条件 $F_0 = 0, F_1 = 1$ によって定義される数列 $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ を考え, （我々はこの数列 $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ を一般フィボナッチ数列と呼ぶことにする）その生成関数

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i t^i = \frac{t}{1-at-bt^2}$$

について, 収束半径内で, 以下のように生成関数が整数値となるような有理数の必要十分条件を与えた.

Theorem 1.1 (A. Bulawa and W. K. Lee [1])**.** q を有理数とし, b は a の約数であると仮定する. q が一般フィボナッチ数列の生成関数 $f(t)$ の収束半径内であれば, $f(q) \in \mathbb{Z}$ が成り立つ必要十分条件は

$$q \in \Big\{\frac{F_{2i}}{F_{2i+1}}\Big\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$$

一方で, 彼らは, 漸化式

$$L_{i+2} = aL_{i+1} + bL_i,$$

初期条件 $L_0 = 2, L_1 = a$ によって定義される数列 $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ を考え, （我々はこの数列 $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ を一般リュカ数列と呼ぶことにする）その生成関数

$$l(t) = \sum_{i=0}^{\infty} L_i t^i = \frac{2-at}{1-at-bt^2}$$

についても, $a = 1, b = 1$ の場合に, 収束半径内で以下のように生成関数が整数値となるような有理数の必要十分条件を与えた.

Theorem 1.2 (A. Bulawa and W. K. Lee [1])**.** q を有理数とし, $a = 1, b = 1$ とする. q が一般リュカ数列の生成関数 $l(t)$ の収束半径内であれば. $l(q) \in \mathbb{Z}$

が成り立つ必要十分条件は

$$q \in \{\frac{F_{2i}}{F_{2i+1}}, \frac{L_{2i+1}}{L_{2i+2}}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \bigcup \{-\frac{1}{2}\}.$$

この結果は, D. S. Hong [2] によって与えられた予想に答えたものであった.

また, A. Bulawa と W. K. Lee と独立に, P. Pongsriiam [3] は, $a=1, b=1$ の場合に, 生成関数 $f(t)$ が整数値になる有理数の必要十分条件を与えている.

本研究は彼らの研究の多項式版について考察したものである. 本研究では 2 つの多項式列を考える. まず 1 つ目は漸化式

$$F_{i+2}(x) = axF_{i+1}(x) + bF_i(x), \tag{1}$$

初期条件 $F_0(x)=0, F_1(x)=1$ で定義される多項式列 $\{F_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を考える. この多項式列を一般フィボナッチ多項式列と呼ぶことにする. たとえば, $F_2(x)=ax$,$F_3(x)=a^2x^2+b$ となる. 一般フィボナッチ多項式列の生成関数は

$$f(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(x)t^i = \frac{t}{1-axt-bt^2}$$

で与えられる. この等式は, 収束半径内で意味を持つが, 本研究では, $f(x,t)=t/(1-axt-bt^2)$ として考えることにする. もう一つの多項式列として, 漸化式

$$L_{i+2}(x) = axL_{i+1}(x) + bL_i(x), \tag{2}$$

初期条件 $L_0(x)=2, L_1(x)=ax$ で定まる多項式列 $\{L_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を考える. この多項式列を一般リュカ多項式列と呼ぶことにする. たとえば, $L_2(x) = a^2x^2+2b, L_3(x)=a^3x^3+3abx$ となる. 一般リュカ多項式列の生成関数は

$$l(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} L_i(x)t^i = \frac{2-axt}{1-axt-bt^2}$$

で与えられる. この等式も, 収束半径内で意味を持つが, 同様に $l(x,t) = (2-axt)/(1-axt-bt^2)$ として考えることにする.

このとき, 本研究の主結果は以下のとおりである.

Theorem 1.3. b が a の約数であると仮定する. $q(x)\in\mathbb{Q}(x)$ を有理数を係数にもつ有理関数とする. このとき, 一般フィボナッチ多項式列の生成関数 $f(x,t)$ に対して, $f(x,q(x))\in\mathbb{Z}[x]$ であるための必要十分条件は

$$q(x) \in \{\frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \text{ または } q(x) \in \{-\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Theorem 1.4. b が a の約数であると仮定する. $q(x)\in\mathbb{Q}(x)$ を有理数を係数に持つ有理関数とする. 一般リュカ多項式の生成関数 $l(x,t)$ に対して, $l(x,q(x))\in\mathbb{Z}[x]$ であるための必要十分条件は

$$q(x) \in \{\frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}, \frac{L_i(x)}{L_{i+1}(x)}, -\frac{L_{i+1}(x)}{bL_i(x)}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \text{ または } q(x) \in \{-\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

$d\in\mathbb{N}$ を平方因子を持たない正の整数とする. このとき, 一般フィボナッチ多項式列, 一般リュカ多項式列それぞれに対して, $x=\sqrt{d}$ を代入して, 数列 $\{F_i(\sqrt{d})\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, $\{L_i(\sqrt{d})\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を考えることができるが, 我々は, それぞれを $\sqrt{d}$-フィボナッチ数列, $\sqrt{d}$-リュカ数列と呼ぶことにする. それぞれの生成関数は

$$f(\sqrt{d},t)=\frac{t}{1-a\sqrt{d}t-bt^2}$$

$$l(\sqrt{d},t)=\frac{2-a\sqrt{d}t}{1-a\sqrt{d}t-bt^2}$$

で与えられ, どちらの生成関数も収束半径は

$$\frac{2}{a\sqrt{d}+\sqrt{a^2d+4b}}$$

となる.

このとき, 以下の問題が考えられる.

Problem 1.5. b が a の約数であると仮定し, $q(\sqrt{d})\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とする. このとき, $\sqrt{d}$-フィボナッチ数列の生成関数 $f(\sqrt{d},t)$ に対して, $f(\sqrt{d},q(\sqrt{d}))\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ であるための必要十分条件は,

$$q(\sqrt{d})\in\Big\{\frac{F_i(\sqrt{d})}{F_{i+1}(\sqrt{d})}\Big\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\text{または}\,q(\sqrt{d})\in\Big\{-\frac{F_{i+1}(\sqrt{d})}{bF_i(\sqrt{d})}\Big\}_{i\in\mathbb{N}}$$

となるか.

Problem 1.6. b が a の約数であると仮定し, $q(\sqrt{d})\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とする. このとき, $\sqrt{d}$-リュカ数列の生成関数 $l(\sqrt{d},t)$ に対して, $l(\sqrt{d},q(\sqrt{d}))\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ であるための必要十分条件は

$$q(\sqrt{d})\in\Big\{\frac{F_i(\sqrt{d})}{F_{i+1}(\sqrt{d})},\frac{L_i(\sqrt{d})}{L_{i+1}(\sqrt{d})},-\frac{L_{i+1}(\sqrt{d})}{bL_i(\sqrt{d})}\Big\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\text{または}\,q(\sqrt{d})\in\Big\{-\frac{F_{i+1}(\sqrt{d})}{bF_i(\sqrt{d})}\Big\}_{i\in\mathbb{N}}$$

となるか.

もし, $d=1$ なら, $\sqrt{d}$-フィボナッチ数列 $\{F_i(\sqrt{d})\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は一般フィボナッチ数列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ に, $\sqrt{d}$-リュカ数列 $\{L_i(\sqrt{d})\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は一般リュカ数列 $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ に他ならないが, この場合, この問題は肯定的に解決される.

Theorem 1.7. b を a の約数とし, $q\in\mathbb{Q}$ とする. 一般フィボナッチ数列の生成関数 $f(t)$ に対して, $f(q)\in\mathbb{Z}$ である必要十分条件は

$$q\in\Big\{\frac{F_i}{F_{i+1}}\Big\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\text{または}\,q\in\Big\{-\frac{F_{i+1}}{bF_i}\Big\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Theorem 1.8. b を a の約数とし, $q\in\mathbb{Q}$ とする. 一般リュカ数列の生成関数 $l(t)$ に対して, $l(q)\in\mathbb{Z}$ である必要十分条件は

$$q\in\Big\{\frac{F_i}{F_{i+1}},\frac{L_i}{L_{i+1}},-\frac{L_{i+1}}{bL_i}\Big\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\text{または}\,q\in\Big\{-\frac{F_{i+1}}{bF_i}\Big\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Theorem 1.7 の系として，Theorem 1.1 を得ることができ, Theorem 1.8 の系として，$a=1$ のときは, Theorem 1.2 を得ることができる. $a\neq 1$ のときは次の系を得る。

Corollary 1.9. b を a の約数とし, $a\neq 1$ とする. q を有理数とすると, 一般リュカ数列の生成関数 $l(t)$ に対して, q が生成関数 $l(t)$ の収束半径内であれば.

$l(q) \in \mathbb{Z}$ が成り立つ必要十分条件は

$$q \in \{\frac{F_{2i}}{F_{2i+1}}, \frac{L_{2i+1}}{L_{2i+2}}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}.$$

もし $d \neq 1$ なら, 一般には, Problem 1.5 と Problem 1.6 に対して否定的な例がある.

例えば, $a = 2$, $b = 1$ そして $d = 2$ のときは, Problem 1.5 は否定的. 実際,

$$f(\sqrt{2}, \frac{1}{2+\sqrt{2}}) = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

しかし,

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}} \notin \{\frac{F_i(\sqrt{2})}{F_{i+1}(\sqrt{2})}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \text{ かつ } \frac{1}{2+\sqrt{2}} \notin \{-\frac{F_{i+1}(\sqrt{2})}{F_i(\sqrt{2})}\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

この事は, 数列の漸化式から, $F_i(\sqrt{2})/F_{i+1}(\sqrt{2})$, $-F_{i+1}(\sqrt{2})/F_i(\sqrt{2})$ が q_1 または $q_2\sqrt{2}$ (q_1, q_2 は有理数) の形に限るからである.

さらに, $1/(2+\sqrt{2})$ は $f(\sqrt{2}, t)$ の収束半径内である.

ある. 他にも, $a = 1, b = 1$, $d = 2$ のとき, Problem 1.6 は否定的. 実際,

$$l(\sqrt{2}, \frac{6-5\sqrt{2}}{7}) = 16 - 10\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

しかし,

$$\frac{6-5\sqrt{2}}{7} \notin \{\frac{F_i(\sqrt{2})}{F_{i+1}(\sqrt{2})}, \frac{L_i(\sqrt{2})}{L_{i+1}(\sqrt{2})}, -\frac{L_{i+1}(\sqrt{2})}{L_i(\sqrt{2})}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \text{ かつ } \frac{6-5\sqrt{2}}{7} \notin \{-\frac{F_{i+1}(\sqrt{2})}{F_i(\sqrt{2})}\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

この事も, 数列の漸化式から $F_i(\sqrt{2})/F_{i+1}(\sqrt{2})$, $L_i(\sqrt{2})/L_{i+1}(\sqrt{2})$, $-L_{i+1}(\sqrt{2})/L_i(\sqrt{2})$, $-F_{i+1}(\sqrt{2})/F_i(\sqrt{2})$ が q_1 または $q_2\sqrt{2}$ (q_1, q_2 は有理数) の形に限るからである.

さらに, $(6-5\sqrt{2})/7$ は生成関数 $l(\sqrt{2}, t)$ の収束半径内である.

2. Preliminaries

主結果の証明の為に必要な等式と命題を準備しておく.

まず,

$$\alpha(x) = \frac{ax + \sqrt{a^2x^2+4b}}{2},$$
$$\beta(x) = \frac{ax - \sqrt{a^2x^2+4b}}{2}.$$

とおくと, 以下が成り立つ.

$$F_n(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)} \qquad (3),$$

$$L_n(x) = \alpha(x)^n + \beta(x)^n \qquad (4).$$

この等式 (3) と (4) から, 次の等式を得る.

$$F_n(x)^2 - F_{n-1}(x)F_{n+1}(x) = (-b)^{n-1} \ (n \geq 1) \qquad (5),$$

$$L_n(x)^2 - L_{n-1}(x)L_{n+1}(x) = -(-b)^{n-1}(a^2x^2+4b) \ (n \geq 1) \qquad (6),$$

$$F_{2n+1}(x) = L_{n+1}(x)F_n(x) + (-b)^n \qquad (7),$$

$$L_{2n+1}(x) = L_{n+1}(x)L_n(x) - (-b)^n ax \qquad (8),$$

$$L_{2n+1}(x) = (a^2x^2 + 4b)F_{n+1}(x)F_n(x) + (-b)^n ax \qquad (9),$$

$$F_{n+1}(x)L_n(x) = F_n(x)L_{n+1}(x) + 2(-b)^n \qquad (10),$$

$$F_{n+1}(x) = \frac{axF_n(x) + L_n(x)}{2} \qquad (11),$$

$$F_n(x) = \frac{-axF_{n+1}(x) + L_{n+1}(x)}{2b} \qquad (12),$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{axL_n(x) + (a^2x^2 + 4b)F_n(x)}{2} \qquad (13),$$

$$L_n(x) = \frac{-axL_{n+1}(x) + (a^2x^2 + 4b)F_{n+1}(x)}{2b} \qquad (14).$$

次の命題は, 主結果の証明において重要な役割を果たす.

Proposition 2.1. $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を最高次の係数が非負である有理数係数多項式とする. ある $r_0 \in \{0, 1\}$ に対して, $(P(x),\, Q(x))$ が, 等式

$$P(x)^2 - (a^2x^2 + 4b)Q(x)^2 = 4(-b)^{r_0} \qquad (*)$$

を満たすならば,

$$b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}P(x) = L_n(x), b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}Q(x) = F_n(x)$$

そして $n \equiv r_0 \pmod 2$ となる非負整数 n が存在する.

Proof. はじめに, 等式 $(*)$ を満たす有理数係数多項式の組の集合からそれ自身への写像を

$$\Phi(R(x), S(x)) = (\widehat{R(x)}, \widehat{S(x)})$$

によって定義する. ここで,

$$\widehat{R(x)} = \frac{-ax(a^2x^2 + 4b)S(x) + (a^2x^2 + 2b)R(x)}{2b},$$

$$\widehat{S(x)} = \frac{(a^2x^2 + 2b)S(x) - axR(x)}{2b}$$

とする. さらに, この写像の逆写像 Φ^{-1} は

$$\Phi^{-1}(R(x), S(x)) = (\widetilde{R(x)}, \widetilde{S(x)})$$

によって与えられる. ここで

$$\widetilde{R(x)} = \frac{ax(a^2x^2 + 4b)S(x) + (a^2x^2 + 2b)R(x)}{2b},$$

$$\widetilde{S(x)} = \frac{(a^2x^2 + 2b)S(x) + axR(x)}{2b}$$

とする.

以下, 命題の証明を始める. はじめに, $\deg Q(x) \leq 1$ の場合を考える. もし $Q(x) = 0$ なら, $P(x) = 2$ かつ $r_0 = 0$ となり,

$$b^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor}P(x) = L_0(x) \text{ かつ } b^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor}Q(x) = F_0(x).$$

を得る．もし $Q(x)\neq 0$ かつ $\mathrm{deg}Q(x)=0$ なら, 等式の両辺の次数の等しい項の係数を比較することによって $P(x)=ax$, $Q(x)=1$ かつ $r_0=1$ となることがわかる． したがって

$$b^{\lfloor\frac{1}{2}\rfloor}P(x)=L_1(x) \text{ かつ } b^{\lfloor\frac{1}{2}\rfloor}Q(x)=F_1(x).$$

もし $\mathrm{deg}Q(x)=1$ なら, 同様に

$$P(x)=\frac{a^2x^2+2b}{b}, Q(x)=\frac{ax}{b} \quad \text{かつ} \quad r_0=0$$

となることがわかる．よって

$$b^{\lfloor\frac{2}{2}\rfloor}P(x)=L_2(x) \text{ かつ } b^{\lfloor\frac{2}{2}\rfloor}Q(x)=F_2(x).$$

つぎに, $\mathrm{deg}Q(x)\geq 2.$ の場合を考える．$(P(x), Q(x))$ は等式 $(*)$ を満たすので $\mathrm{deg}P(x)=\mathrm{deg}Q(x)+1$ となることが分かる．ここで, $N=\mathrm{deg}P(x)$ とおき, $P(x)=c_0x^N+c_1x^{N-1}\cdots+c_N$ $Q(x)=d_0x^{N-1}+d_1x^{N-2}\cdots+d_{N-1}$ と表せば,

$$c_0=ad_0, c_1=ad_1, ac_2=a^2d_2+2bd_0,$$
$$ac_3=\begin{cases} a^2d_3+2bd_1 & \text{if } \mathrm{deg}Q(x)>2 \\ 2bd_1 & \text{if } \mathrm{deg}Q(x)=2 \end{cases}.$$

一方で, もし $\mathrm{deg}Q(x)>2$ ならば,

$$\widehat{P(x)}=\frac{(a^2c_0-a^3d_0)x^{N+2}}{2b}+\frac{(a^2c_1-a^3d_1)x^{N+1}}{2b}+\frac{(a^2c_2+2bc_0-a^3d_2-4abd_0)x^N}{2b}$$
$$+\frac{(a^2c_3+2bc_1-a^3d_3-4abd_1)x^{N-1}}{2b}+\cdots.$$

もし $\mathrm{deg}Q(x)=2$ ならば,

$$\widehat{P(x)}=\frac{(a^2c_0-a^3d_0)x^5}{2b}+\frac{(a^2c_1-a^3d_1)x^4}{2b}+\frac{(a^2c_2+2bc_0-a^3d_2-4abd_0)x^3}{2b}$$
$$+\frac{(a^2c_3+2bc_1-4abd_1)x^2}{2b}+(c_2-2ad_2)x+c_3.$$

それゆえ, 上記の $P(x)$ と $Q(x)$ の係数の関係から．

$$\mathrm{deg}\widehat{P(x)}\leq \mathrm{deg}P(x)-2$$

がわかる．さらに,

$$\mathrm{deg}\widehat{Q(x)}\leq \mathrm{deg}Q(x)-2.$$

実際, もし $\mathrm{deg}\widehat{P(x)}=0$ なら, $(\widehat{P(x)},\widehat{Q(x)})$ は等式 $(*)$ を満たすので．$\mathrm{deg}\widehat{Q(x)}=0$

もし $\mathrm{deg}\widehat{P(x)}>0$ なら,

$$\mathrm{deg}\widehat{P(x)}=\mathrm{deg}\widehat{Q(x)}+1$$

それゆえ,

$$\mathrm{deg}\widehat{Q(x)}=\mathrm{deg}\widehat{P(x)}-1\leq \mathrm{deg}P(x)-3=\mathrm{deg}Q(x)-2.$$

これらのことから, $\widehat{P(x)}$ (resp. $\widehat{Q(x)}$) の最高次の係数は非負の有理数になることがわかる．実際, もし $\mathrm{deg}\widehat{P(x)}=0$ なら, $\widehat{P(x)}=\pm 2.$ となる．ここで $\widehat{P(x)}=-2$ とすると, $P(x)$ の最高次の係数は負となるので, $\widehat{P(x)}=2.$

もし, $\deg\widehat{P(x)} \neq 0$ なら, $\widehat{c_0}$ (resp. $\widehat{d_0}$) を $\widehat{P(x)}$ (resp. $\widehat{Q(x)}$) の最高次の係数とすると $(\widehat{P(x)}, \widehat{Q(x)})$ が等式 $(*)$ を満たすので.

$$\widehat{c_0} = \pm\widehat{d_0}a$$

ここで $\widehat{c_0} = -\widehat{d_0}a$ とすると,

$$\deg\widehat{P(x)} \not\leq \deg P(x) - 2.$$

となってしまうので $\widehat{c_0} = \widehat{d_0}a$. これから, $\widehat{P(x)}$ と $\widehat{Q(x)}$ の最高次の係数の符号は一致する. ゆえに, $\widehat{P(x)}$ (resp. $\widehat{Q(x)}$) の最高次の係数は非負であることもわかる. もし, $\widehat{P(x)}$ の最高次の係数が負ならば, $P(x)$ の最高次の係数も負になるからである.

さらに,

$$P(x) = \widetilde{\widehat{P(x)}}, Q(x) = \widetilde{\widehat{Q(x)}}$$

となることから,

$$\deg\widehat{P(x)} = \deg P(x) - 2$$

かつ

$$\deg\widehat{Q(x)} = \deg Q(x) - 2$$

となることもわかる.

ここで,

$$\underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{n}(P(x), Q(x)) = (\overset{n}{\widehat{P(x)}}, \overset{n}{\widehat{Q(x)}})$$

とすると,

$$\deg \overset{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}{\widehat{P(x)}} \leq 2$$

となる.

最後に, 任意の非負整数 m に対して,

$$L_{m+2}(x) = \frac{ax(a^2x^2 + 4b)F_m(x) + (a^2x^2 + 2b)L_m(x)}{2}$$

かつ

$$F_{m+2}(x) = \frac{(a^2x^2 + 2b)F_m(x) + axL_m(x)}{2}$$

となるので

$$b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\widehat{P(x)} = L_n(x), b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\widehat{Q(x)} = F_n(x)$$

かつ $n \equiv r_0 \pmod 2$ となる非負整数 n が存在するとすると,

$$b^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}P(x) = L_{n+2}(x), b^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}Q(x) = F_{n+2}(x)$$

かつ $n + 2 \equiv r_0 \pmod 2$.

もし $\deg P(x) \leq 2$ なら,

$$b^{\lfloor \frac{\deg P(x)}{2} \rfloor}P(x) = L_{\deg P(x)}(x), b^{\lfloor \frac{\deg P(x)}{2} \rfloor}Q(x) = F_{\deg P(x)}(x)$$

となることから, 証明が完了する.

$\square$

次の命題は Bulawa と Lee [1, Proposition 1.4] によって得られたものの一部であるが, Proposition 2.1 の証明と同様の証明方法で再証明してみよう.

Proposition 2.2. b は a の約数とする. $P, Q \in \mathbb{N}$ を非負整数とする. もし, (P, Q) が等式

$$P^2 - (a^2+4b)Q^2 = 4(-b) \tag{$**$}$$

を満たすならば

$$b^{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor} P = L_{2n+1}, b^{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor} Q = F_{2n+1},$$

となる非負整数 n が存在する.

Proof. はじめに, 等式 $(**)$ を満たす整数の組の集合からそれ自身への写像を

$$\Phi(R, S) = (\widehat{R}, \widehat{S})$$

によって定義する. ここで,

$$\widehat{R} = \frac{-a(a^2+4b)S + (a^2+2b)R}{2b}$$

$$\widehat{S} = \frac{(a^2+2b)S - aR}{2b}.$$

この写像は, well-defined である. 実際, (R, S) は等式 $(**)$ を満たすので,

$$R^2 - a^2S^2 \in 4\mathbb{Z}.$$

これから $R \pm aS \in 2\mathbb{Z}$ となり, $\widehat{R}, \widehat{S} \in \mathbb{Z}$. さらに, この写像の逆写像 Φ^{-1} は

$$\Phi^{-1}(R, S) = (\widetilde{R}, \widetilde{S})$$

によって与えられる. ここで

$$\widetilde{R} = \frac{a(a^2+4b)S + (a^2+2b)R}{2b}$$

$$\widetilde{S} = \frac{(a^2+2b)S + aR}{2b}.$$

この写像も, 上と同様の理由により well-defined である.

上の準備の下で, 以下, 命題の証明を始める. まず, $Q \leq 1$ の場合を考える. このとき,

$$P = L_1, Q = F_1$$

となることがわかる. つぎに, $Q > 1$ の場合を考える. このとき, $\widehat{P}, \widehat{Q} \in \mathbb{N}$ となる.

実際,

$$\widehat{Q} = \frac{(a^2+2b)Q - aP}{2b} = \frac{(a^2+2b)Q - a\sqrt{(a^2+4b)Q^2-4b}}{2b} > 0$$

$$\widehat{P} = \frac{-a(a^2+4b)Q + (a^2+2b)P}{2b} = \frac{-a(a^2+4b)Q + (a^2+2b)\sqrt{(a^2+4b)Q^2-4b}}{2b} > 0.$$

さらに,

$$Q - \widehat{Q} = \frac{a\sqrt{(a^2+4b)Q^2-4b} - a^2Q}{2b} > 0.$$

$Q, \widehat{Q} \in \mathbb{N}$ なので

$$Q - \widehat{Q} \geq 1$$

となることもわかる．このことから，

$$\underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{n}(P, Q) = (\overset{n}{\widehat{P}}, \overset{n}{\widehat{Q}})$$

と書くと，$\overset{m}{\widehat{Q}} \leq 1$ となる正の整数 m が存在する．それゆえ, Proposition 2.1 の証明と同様に証明が完了することがわかる．

□

3. Resulting proofs

[4] における主結果の証明と同じ方法で, Proposition 2.1, Proposition 2.2 そして 等式 (1) から (14) により主結果を証明する．

3.1. **Proof of Theorem 1.3.** はじめに,

$$q(x) = \frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)} \ (i \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

または

$$q(x) = -\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)} \ (i \in \mathbb{N})$$

と仮定する．このとき，$f(x, q(x)) \in \mathbb{Z}[x]$ となることを示す．もし $i = 0$ なら, 明らか. $i > 0$ のときは, 等式 (1) と (5) により,

$$\begin{aligned}
f(x, \frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}) &= \frac{F_i(x)F_{i+1}(x)}{F_{i+1}(x)^2 - (axF_{i+1}(x) + bF_i(x))F_i(x)} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{F_i(x)F_{i+1}(x)}{F_{i+1}(x)^2 - F_{i+2}(x)F_i(x)} \overset{(5)}{=} \frac{F_i(x)F_{i+1}(x)}{(-b)^i} \\
f(x, -\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}) &= \frac{-bF_i(x)F_{i+1}(x)}{bF_i(x)(axF_{i+1}(x) + bF_i(x)) - bF_{i+1}(x)^2} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{-bF_i(x)F_{i+1}(x)}{bF_i(x)F_{i+2}(x) - bF_{i+1}(x)^2} \overset{(5)}{=} \frac{F_i(x)F_{i+1}(x)}{(-b)^i}.
\end{aligned}$$

となる．さらに, $F_i(x) \in b^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$ $(i \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ となる．これは漸化式 (1) により得られる．実際, $F_0(x) \in b^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$, $F_1(x) \in b^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$ であり, もし $F_k(x) \in b^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$, $F_{k+1}(x) \in b^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$ なら, 漸化式（1）より $F_{k+2}(x) \in b^{\lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$. それゆえ, 帰納的に $F_i(x) \in b^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$ を得る．以上のことから $f(x, q(x)) \in \mathbb{Z}[x]$ が示された．

次に, ある有理関数 $q(x) \in \mathbb{Q}(x)$ が存在して, $f(x, q(x)) = k(x)$ ($k(x)$ は整数係数多項式) となると仮定すると,

$$q(x) \in \{\frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \text{ または } q(x) \in \{-\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}\}_{i \in \mathbb{N}}$$

となることを示す．もし $k(x) = 0$ なら,

$$\frac{q(x)}{1 - axq(x) - bq(x)^2} = 0.$$

これから,

$$q(x) = 0 = \frac{F_0(x)}{F_1(x)}.$$

もし $k(x)\neq 0$ なら, このとき

$$\frac{q(x)}{1-axq(x)-bq(x)^2}=k(x).$$

これから,

$$bk(x)q(x)^2+(axk(x)+1)q(x)-k(x)=0.$$

よって,

$$q(x)=\frac{-(axk(x)+1)\pm\sqrt{(axk(x)+1)^2+4bk(x)^2}}{2bk(x)}.$$

ここで, $q(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上の有理関数なので,

$$(axk(x)+1)^2+4bk(x)^2=M(x)^2$$

を満たし, 最高次の係数が非負となる整数係数の多項式 $M(x)$ が存在する.

$$\{(a^2x^2+4b)k(x)+ax\}^2-(a^2x^2+4b)M(x)^2=4(-b).$$

より, Proposition 2.1 から,

$$M(x)=\frac{F_{2n+1}(x)}{b^n},(a^2x^2+4b)k(x)+ax=\pm\frac{L_{2n+1}(x)}{b^n}$$

となる非負整数 n が存在する. 等式 (9) から,

$$(a^2x^2+4b)k(x)+ax=\pm\frac{(a^2x^2+4b)F_{n+1}(x)F_n(x)+(-b)^nax}{b^n}.$$

$k(x)\in\mathbb{Z}[x],\frac{F_n(x)F_{n+1}(x)}{b^n}\in\mathbb{Z}[x]$ から,

$$(a^2x^2+4b)k(x)+ax=\frac{L_{2n+1}(x)}{(-b)^n}$$

であることがわかる.

さらに, 等式 (9) により,

$$k(x)=\frac{F_n(x)F_{n+1}(x)}{(-b)^n}.$$

したがって,

$$q(x)=\frac{-axF_n(x)F_{n+1}(x)-(-b)^n+(-1)^nF_{2n+1}(x)}{2bF_n(x)F_{n+1}(x)}\ (n\geq 1)\qquad (A)$$

または

$$q(x)=\frac{-axF_n(x)F_{n+1}(x)-(-b)^n-(-1)^nF_{2n+1}(x)}{2bF_n(x)F_{n+1}(x)}\ (n\geq 1)\qquad (B).$$

等式 (7), (10), (11) と (12) を使って, (A) と (B) を変形することによって,

$$q(x)\in\Big\{\frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}\Big\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\text{ または }q(x)\in\Big\{-\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}\Big\}_{i\in\mathbb{N}}$$

を得る.

(A) に対して, n が偶数なら

$$q(x)=\frac{-axF_n(x)F_{n+1}(x)-(-b)^n+(-1)^nF_{2n+1}(x)}{2bF_n(x)F_{n+1}(x)}\overset{(7)}{=}\frac{-axF_{n+1}(x)+L_{n+1}(x)}{2bF_{n+1}(x)}$$

$$\overset{(12)}{=} \frac{F_n(x)}{F_{n+1}(x)}.$$

(A) に対して, n が奇数なら

$$q(x) = \frac{-axF_n(x)F_{n+1}(x) - (-b)^n + (-1)^n F_{2n+1}(x)}{2bF_n(x)F_{n+1}(x)} \overset{(7)(10)}{=} \frac{-axF_n(x) - L_n(x)}{2bF_n(x)}$$
$$\overset{(11)}{=} -\frac{F_{n+1}(x)}{bF_n(x)}.$$

(B) に対して, n が偶数なら

$$q(x) = \frac{-axF_n(x)F_{n+1}(x) - (-b)^n - (-1)^n F_{2n+1}(x)}{2bF_n(x)F_{n+1}(x)} \overset{(7)(10)}{=} \frac{-axF_n(x) - L_n(x)}{2bF_n(x)}$$
$$\overset{(11)}{=} -\frac{F_{n+1}(x)}{bF_n(x)}.$$

(B) に対して, n が奇数なら

$$q(x) = \frac{-axF_n(x)F_{n+1}(x) - (-b)^n - (-1)^n F_{2n+1}(x)}{2bF_n(x)F_{n+1}(x)} \overset{(7)}{=} \frac{-axF_{n+1}(x) + L_{n+1}(x)}{2bF_{n+1}(x)}$$
$$\overset{(12)}{=} \frac{F_n(x)}{F_{n+1}(x)}.$$

3.2. **Proof of Theorem 1.4.** はじめに,

$$q(x) = \frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}, \frac{L_i(x)}{L_{i+1}(x)}, -\frac{L_{i+1}(x)}{bL_i(x)}\ (i \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ \text{または}\ q(x) = -\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}\ (i \in \mathbb{N}),$$

と仮定し, $l(x, q(x)) \in \mathbb{Z}[x]$ を示す.

もし $i = 0$ なら, 明らか. $i > 0$ のときは, (1), (2), (5), (6), (13) と (14) を用いて,

$$l(x, \frac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}) = \frac{2F_{i+1}(x)^2 - axF_i(x)F_{i+1}(x)}{F_{i+1}(x)^2 - F_i(x)(axF_{i+1}(x) + bF_i(x))} \overset{(1)}{=} \frac{2F_{i+1}(x)^2 - axF_i(x)F_{i+1}(x)}{F_{i+1}(x)^2 - F_i(x)F_{i+2}(x)}$$
$$\overset{(5)}{=} \frac{2F_{i+1}(x)^2 - axF_i(x)F_{i+1}(x)}{(-b)^i}$$

$$l(x, \frac{L_i(x)}{L_{i+1}(x)}) = \frac{2L_{i+1}(x)^2 - axL_i(x)L_{i+1}(x)}{L_{i+1}(x)^2 - L_i(x)(axL_{i+1}(x) + bL_i(x))} \overset{(2)}{=} \frac{2L_{i+1}(x)^2 - axL_i(x)L_{i+1}(x)}{L_{i+1}(x)^2 - L_i(x)L_{i+2}(x)}$$
$$\overset{(6)}{=} \frac{L_{i+1}(x)(2L_{i+1}(x) - axL_i(x))}{-(-b)^i(a^2x^2 + 4b)} \overset{(13)}{=} \frac{L_{i+1}(x)F_i(x)}{-(-b)^i}$$

$$l(x, -\frac{L_{i+1}(x)}{bL_i(x)}) = \frac{L_i(x)(2bL_i(x) + axL_{i+1}(x))}{L_i(x)(axL_{i+1}(x) + bL_i(x)) - L_{i+1}(x)^2}$$
$$\overset{(2)}{=} \frac{L_i(x)(2bL_i(x) + axL_{i+1}(x))}{L_i(x)L_{i+2}(x) - L_{i+1}(x)^2} \overset{(6)(14)}{=} \frac{L_i(x)F_{i+1}(x)}{(-b)^i}$$

$$l(x, -\frac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}) = \frac{F_i(x)(2bF_i(x) + axF_{i+1}(x))}{F_i(x)(bF_i(x) + axF_{i+1}(x)) - F_{i+1}(x)^2}$$
$$\overset{(1)(5)}{=} \frac{F_i(x)(2bF_i(x) + axF_{i+1}(x))}{F_i(x)F_{i+2}(x) - F_{i+1}(x)^2} = \frac{F_i(x)(2bF_i(x) + axF_{i+1}(x))}{-(-b)^i}.$$

Theorem 1.3 の証明の途中の議論と同様に帰納法を用いて, 漸化式 (1), (2) から, $F_i(x), L_i(x) \in b^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}\mathbb{Z}[x]$ が得られ,

$l(x, \dfrac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}), l(x, \dfrac{L_i(x)}{L_{i+1}(x)}), l(x, -\dfrac{L_{i+1}(x)}{bL_i(x)}) \in \mathbb{Z}[x]$ $(i \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ かつ $l(x, -\dfrac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}) \in \mathbb{Z}[x]$ $(i \in \mathbb{N})$

を得る.

次に, ある有理関数 $q(x) \in \mathbb{Q}(x)$ が存在して, $l(x, q(x)) = k(x)$ ($k(x)$ は, 整数係数多項式) であると仮定すると,

$q(x) \in \{\dfrac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)}, \dfrac{L_i(x)}{L_{i+1}(x)}, -\dfrac{L_{i+1}(x)}{bL_i(x)}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ または $q(x) \in \{-\dfrac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}\}_{i\in\mathbb{N}}$

となることを示す.

もし $k(x) = 0$ なら,

$$\frac{2 - axq(x)}{1 - axq(x) - bq(x)^2} = 0.$$

それゆえ,

$$q(x) = \frac{2}{ax} = \frac{L_0(x)}{L_1(x)}.$$

一方で, $k(x) \neq 0$ なら,

$$\frac{2 - axq(x)}{1 - axq(x) - bq(x)^2} = k(x).$$

これから,

$$bk(x)q(x)^2 + ax(k(x) - 1)q(x) + 2 - k(x) = 0.$$

それゆえ,

$$q(x) = \frac{-ax(k(x) - 1) \pm \sqrt{a^2x^2(k(x) - 1)^2 - 4bk(x)(2 - k(x))}}{2bk(x)}.$$

ここで, $q(x)$ は, $\mathbb{Q}$ 上の有理関数なので,

$$a^2x^2(k(x) - 1)^2 - 4bk(x)(2 - k(x)) = M(x)^2$$

となる最高次の係数が非負の整数係数多項式 $M(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在する. このとき,

$$M(x)^2 - (a^2x^2 + 4b)(k(x) - 1)^2 = 4(-b)$$

となり, Proposition 2.1 から,

$$M(x) = \frac{L_{2n+1}(x)}{b^n}, k(x) - 1 = \pm\frac{F_{2n+1}(x)}{b^n}$$

となる非負整数 n が存在する. これから,

$$q(x) = \frac{-axF_{2n+1}(x) + L_{2n+1}(x)}{2b(F_{2n+1}(x) + b^n)} \ (n \geq 0) \qquad (C),$$

$$q(x) = \frac{-axF_{2n+1}(x) - L_{2n+1}(x)}{2b(F_{2n+1}(x) + b^n)} \ (n \geq 0) \qquad (D),$$

$$q(x) = \frac{axF_{2n+1}(x) + L_{2n+1}(x)}{2b(-F_{2n+1}(x) + b^n)} \ (n \geq 1) \qquad (E)$$

または

$$q(x)=\frac{axF_{2n+1}(x)-L_{2n+1}(x)}{2b(-F_{2n+1}(x)+b^n)}\ (n\geq 1) \tag{F}$$

を得る. (C) から (F) の場合について, 等式 (7), (9), (10), (13) と (14) を用いて

$q(x)\in\{\dfrac{F_i(x)}{F_{i+1}(x)},\dfrac{L_i(x)}{L_{i+1}(x)},-\dfrac{L_{i+1}(x)}{bL_i(x)}\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ または $q(x)\in\{-\dfrac{F_{i+1}(x)}{bF_i(x)}\}_{i\in\mathbb{N}}$

となることを示す.

(C) に対して, もし n が偶数なら,

$$q(x)=\frac{-axF_{2n+1}(x)+L_{2n+1}(x)}{2b(F_{2n+1}(x)+b^n)}\overset{(7)(9)(10)}{=}\frac{-axL_{n+1}(x)F_n(x)+(a^2x^2+4b)F_{n+1}(x)F_n(x)}{2bF_{n+1}(x)L_n(x)}$$

$$\overset{(14)}{=}\frac{F_n(x)}{F_{n+1}(x)}.$$

(C) に対して, もし n が奇数なら,

$$q(x)=\frac{-axF_{2n+1}(x)+L_{2n+1}(x)}{2b(F_{2n+1}(x)+b^n)}\overset{(7)(9)}{=}\frac{-axL_{n+1}(x)F_n(x)+(a^2x^2+4b)F_{n+1}(x)F_n(x)}{2bL_{n+1}(x)F_n(x)}$$

$$\overset{(14)}{=}\frac{L_n(x)}{L_{n+1}(x)}.$$

(D) に対して, もし n が偶数なら,

$$q(x)=\frac{-axF_{2n+1}(x)-L_{2n+1}(x)}{2b(F_{2n+1}(x)+b^n)}\overset{(7)(9)(10)}{=}\frac{-axL_n(x)-(a^2x^2+4b)F_n(x)}{2bL_n(x)}$$

$$\overset{(13)}{=}-\frac{L_{n+1}(x)}{bL_n(x)}.$$

(D) に対して, もし n が奇数なら,

$$q(x)=\frac{-axF_{2n+1}(x)-L_{2n+1}(x)}{2b(F_{2n+1}(x)+b^n)}\overset{(7)(9)(10)}{=}\frac{-axF_{n+1}(x)L_n(x)-(a^2x^2+4b)F_{n+1}(x)F_n(x)}{2bL_{n+1}(x)F_n(x)}$$

$$\overset{(13)}{=}-\frac{F_{n+1}(x)}{bF_n(x)}.$$

(E) に対して, もし n が偶数なら,

$$q(x)=\frac{axF_{2n+1}(x)+L_{2n+1}(x)}{2b(-F_{2n+1}(x)+b^n)}\overset{(7)(9)(10)}{=}\frac{axF_{n+1}(x)L_n(x)+(a^2x^2+4b)F_{n+1}(x)F_n(x)}{-2bL_{n+1}(x)F_n(x)}$$

$$\overset{(13)}{=}-\frac{F_{n+1}(x)}{bF_n(x)}.$$

(E) に対して, もし n が奇数なら,

$$q(x)=\frac{axF_{2n+1}(x)+L_{2n+1}(x)}{2b(-F_{2n+1}(x)+b^n)}\overset{(7)(9)(10)}{=}\frac{axF_{n+1}(x)L_n(x)+(a^2x^2+4b)F_{n+1}(x)F_n(x)}{-2bF_{n+1}(x)L_n(x)}$$

$$\overset{(13)}{=} -\frac{L_{n+1}(x)}{bL_n(x)}.$$

(F) に対して, もし n が偶数なら,

$$q(x) = \frac{axF_{2n+1}(x) - L_{2n+1}(x)}{2b(-F_{2n+1}(x) + b^n)} \overset{(7)(9)}{=} \frac{axL_{n+1}(x)F_n(x) - (a^2x^2 + 4b)F_{n+1}(x)F_n(x)}{-2bL_{n+1}(x)F_n(x)}$$

$$\overset{(14)}{=} \frac{L_n(x)}{L_{n+1}(x)}.$$

(F) に対して, もし n が奇数なら,

$$q(x) = \frac{axF_{2n+1}(x) - L_{2n+1}(x)}{2b(-F_{2n+1}(x) + b^n)} \overset{(7)(9)(10)}{=} \frac{axL_{n+1}(x)F_n(x) - (a^2x^2 + 4b)F_{n+1}(x)F_n(x)}{-2bF_{n+1}(x)L_n(x)}$$

$$\overset{(14)}{=} \frac{F_n(x)}{F_{n+1}(x)}.$$

3.3. **Proof of Theorem 1.7.** Theorem 1.3 の証明において, 用いる命題を Proposition 2.1 から Proposition 2.2 にかえて, $x = 1$ とすれば証明は完了する.

3.4. **Proof of Theorem 1.8.** Theorem 1.4 の証明において, 用いる命題を Proposition 2.1 から Proposition 2.2 にかえて, $x = 1$ とすれば証明は完了する.

References

[1] A. Bulawa and W. K. Lee, *Integral values of the generating functions for the Fibonacci and related sequences*, The Fibonacci Quarterly, **55.1** (2017), 74–81.

[2] D. S. Hong, *When is the generating function of the Fibonacci numbers an integer?*, The College Mathematics Journal, **46** (2015), 110–112.

[3] P. Pongsriiam, *Integral values of the generating functions of Fibonacci and Lucas numbers*, The College Mathematics Journal, **48** (2017), 97–101.

[4] Y. Tsuno, *Extended results on integer values of generating functions for sequences given by Pell's equations*, The Fibonacci Quarterly, **59.2** (2021), 158–166.

Mathematics Subject Classification (2010): 11B39

Yuji Tsuno: National Institute of Technology, Wakayama College, 77 Noshima, Nada-cho, Gobo, Wakayama, Japan 644-0023

Email address: `tsuno@wakayama-nct.ac.jp`

実定数係数二階線型常差分方程式の解の単調性と Fibonacci 数の一般化

後藤良彰 * (小樽商科大学), 渋川元樹 † (神戸大理)

概 要

実定数係数二階線型常差分方程式の解のいくつかの単調性について述べる. その応用として, 二変数の完全斉次対称多項式の特殊値の中から Fibonacci 数の一般化にあたる class の特徴付けを行う.

1 Introduction

Fibonacci 数

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$$

は, 二変数の完全斉次対称式

$$h_n(x,y) := \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} = \sum_{j=0}^{n} x^k y^{n-k}, \quad h_{-1}(x,y) := 0, \quad h_0(x,y) := 1$$

の

$$x = -2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad y = -2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

における特殊値

$$F_{n+1} = h_n\left(-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), -2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

である. Fibonacci 数については, 任意の非負整数 n に対し, 以下の不等式 (単調性) が成立することが容易にわかる.

(1) 正値単調非減少性

$$F_0 = 0 < F_{n+1} \leq F_{n+2}. \tag{1}$$

* goto@res.otaru-uc.ac.jp
† g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

(2) 比の単調性 1

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{F_{n+1}}{F_n}\right| \geq \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right| \tag{2}$$

(3) 比の単調性 2

$$\left|F_n\frac{1+\sqrt{5}}{2}-F_{n+1}\right| \geq \left|F_{n+1}\frac{1+\sqrt{5}}{2}-F_{n+2}\right|. \tag{3}$$

他方, Lucas 数

$$L_0 := 2, \quad L_1 := 1, \quad L_{n+2}-L_{n+1}-L_n = 0$$

は, 二変数のべき和対称式

$$p_n(x,y) := x^n + y^n, \quad p_0(x,y) = 2$$

の特殊値

$$L_n = p_n\left(-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), -2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

である. こちらに関しては

$$L_0 = 2 > L_1 = 1 < L_2 = 3 < L_3 = 4 < \cdots,$$
$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right| = 1.11\cdots \leq \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-3\right| = 1.38\cdots \geq \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{4}{3}\right| = 0.28\cdots \geq \cdots$$

となり, Fibonacci 数とは異なり, (1) と (2) は成立しないが,

$$\left|L_n\frac{1+\sqrt{5}}{2}-L_{n+1}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = \sqrt{5}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n = \sqrt{5}(0.61\cdots)^n$$

ゆえ (3) は成り立つ.

一般に初期値 $c_0 \neq 0 \in \mathbb{R}$ の実定数係数一階線型常差分方程式

$$a_0 := c_0, \quad a_{n+1} - aa_n = 0, \quad a \neq 0 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

の解

$$a_n = c_0 a^n$$

に関しては, $c_0 > 0$ かつ $a \geq 1$ が正値単調非減少性 (1) が成立する同値条件であり, 任意の非負整数 n に対して

$$\left|a - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0, \quad |a_n a - a_{n+1}| = 0$$

ゆえ, 比の単調性に関しては無条件で成立する.

他方, 初期値 $(c_0, c_1) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$ or $(c_{-1}, c_0) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$ の実定数係数二階線型常差分方程式

$$a_0 := c_0, \quad a_1 := c_1, \quad a_{n+2} - aa_{n+1} + ba_n = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \neq 0 \tag{5}$$

の解について, 不等式 (1), (2), (3) が成立するか否かはもう少し事情が複雑になる. たとえば, 初期値を $c_{-1} := 0$, $c_0 := 1$ として, 解を (1), (2), (3) が全て成立した Fibonacci 数の自然な拡張である完全斉次対称式 $h_n(x,y)$ の特殊値に制限したとしても, 一般に (1), (2), (3) 全てが成立するとは限らない.

実際,

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{4}, \quad a_{-1} := 0, \quad a_0 := 1 \tag{6}$$

とすると

$$a_n = (n+1)2^{-n}$$

であり,

$$a_n \geq a_{n+1}$$

ゆえ, 不等式 (1) は成立しないが,

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

あるいは

$$\left|a_n\frac{1}{2} - a_{n+1}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$$

となって, 不等式 (2), (3) は成立する.

また

$$a = 1, \quad b = -3, \quad a_{-1} := 0, \quad a_0 := 1 \tag{7}$$

とすると

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

であり, 漸化式 (5) より不等式 (1) は明らかに成立するが,

$$\left|\frac{1+\sqrt{13}}{2} - 1\right| = 1.30\cdots \leq \left|\frac{1+\sqrt{13}}{2} - 4\right| = 1.69\cdots \geq \left|\frac{1+\sqrt{13}}{2} - \frac{7}{4}\right| = 0.55\cdots \geq \cdots$$

となり, 不等式 (2) は成立せず,

$$\left|\frac{1+\sqrt{13}}{2} - 1\right| = 1.30\cdots \leq \left|\frac{1+\sqrt{13}}{2} - 4\right| = 1.69\cdots \leq \left|4\frac{1+\sqrt{13}}{2} - 7\right| = 2.21\cdots \leq \cdots$$

ゆえに不等式 (3) も成立しない.

一方で, Lucas 数のように, 不等式 (1) もしくは不等式 (2) が成立していない例であっても, 十分大きな n に関しては, これらの不等式が成立することもある.

以下, 数列 a_n を 差分方程式 (5) の解とし, 特性多項式 $x^2 - ax + b$ の特性根を

$$\alpha_{\pm} := \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

とおく. ただし, $a^2-4b<0$ のときは $\sqrt{a^2-4b}=\sqrt{-1}\sqrt{-(a^2-4b)}$ とする. 今, $ab\neq 0$ と仮定しているので,

$$\alpha_\pm \neq 0 \tag{8}$$

と

$$|\alpha_+|=|\alpha_-| \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_+=\alpha_- \tag{9}$$

が成り立つことに注意する.

また $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha_+,\alpha_-\}$ を

$$|\alpha|\geq|\beta|$$

を満たす特性根とする.

本論文では, まず十分大きな n に対して, 以下の不等式 (10), (13) が成立する必要十分条件を与える.

Theorem 1. 不等式

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (n_0 \leq n) \tag{10}$$

が成立する非負整数 n_0 が存在する必要十分条件は, $a^2-4b\geq 0$ かつ

$$1\neq\alpha_+>0, \quad a>0, \quad (\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)>0; \tag{11}$$

もしくは

$$\alpha_+=1, \quad a_0\leq a_1\leq a_2. \tag{12}$$

Theorem 2. 不等式

$$\left|\alpha-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq\left|\alpha-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right| \tag{13}$$

が成立する非負整数 n_0 が存在する必要十分条件は $a^2-4b\geq 0$ である.

次いで以下の 3 つの単調性 Theorem 3, Theorem 5, Theorem 6 を示す.

Theorem 3. 非負整数 k について

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (n\geq k-1) \tag{14}$$

が成立する必要十分条件は, $a^2-4b\geq 0$ かつ

$$a_{k-1}\leq a_k\leq a_{k+1}, \quad 1\neq\alpha_+>0, \quad a>0, \quad (\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)>0, \tag{15}$$

もしくは

$$a_{k-1}\leq a_k\leq a_{k+1}, \quad \alpha_+=1. \tag{16}$$

特に, 非負整数 n について単調性 $a_n \leq a_{n+1}$ が成立する必要十分条件は

$$a_{-1} \leq a_0 \leq a_1, \quad 1 \neq \alpha_+ > 0, \quad a > 0, \quad (\alpha_+ - 1)(c_1 - c_0\alpha_-) > 0, \tag{17}$$

もしくは

$$a_{-1} \leq a_0 \leq a_1, \quad \alpha_+ = 1. \tag{18}$$

Theorem 3 の系として, 二変数の完全斉次多項式の特殊値の正値単調非減少性が得られる.

Corollary 4. 初期値を $a_{-1} := 0$, $a_0 \neq 0$ とする. 任意の非負整数 n について, 正値単調 *(*非減少*)* 性

$$a_{-1} = 0 < a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \tag{19}$$

が成立する必要十分条件は, $a^2 - 4b \geq 0$ かつ

$$a_0 > 0, \quad a \geq 1, \quad \alpha_+ \geq 1. \tag{20}$$

Theorem 5. 初期値を $a_{-1} := 0$, $a_0 \neq 0$ とする. 任意の非負整数 n について, 単調性

$$\left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \left|\alpha - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|$$

が成立する必要十分条件は, $a^2 - 4b \geq 0$ かつ

$$|\alpha + \beta| = |a| \geq |\beta|. \tag{21}$$

Theorem 6. 任意の非負整数 n について, 単調性

$$|a_n\alpha - a_{n+1}| \geq |a_{n+1}\alpha - a_{n+2}| \tag{22}$$

が成立する必要十分条件は,

$$|\beta| \leq 1. \tag{23}$$

本論文の構成は以下の通りである. まず Section 2 で, 主結果の証明に必要となるいくつかの補題を与える. 次いで Section 3 で, Theorem 1, Theorem 2, Theorem 3, Theorem 5, Theorem 6 を証明する. 最後に Section 4 で, 主結果を踏まえ, 二変数の完全斉次対称多項式の特殊値の中から, 単調性 (19), (13), (22) を全て満たす class を考え, Fibonacci 数の自然な拡張にあたる整数列についての考察を行う.

2 Preliminaries

この Section では特性根 α_+ と α_- の絶対値の大小に関する補題及び初期値一般の実定数係数二階線型常差分方程式 (5) の解の表示公式と, 十分大きな n に関しての非零性, そして隣接する解の比の極限についての結果を述べる.

Lemma 7. $a^2 - 4b \geq 0$ とする．このとき，

$$|\alpha_+| - |\alpha_-| = \begin{cases} \sqrt{a^2-4b} & (a>0, b>0) \\ -\sqrt{a^2-4b} & (a<0, b>0) \\ a & (b<0) \end{cases}.$$

よって特に

$$a > 0,\, a^2 - 4b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha_+| = \alpha_+ > |\alpha_-|, \tag{24}$$
$$a < 0,\, a^2 - 4b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha_+| < |\alpha_-|. \tag{25}$$

Proof. まず $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき，$a > \sqrt{a^2-4b} \geq 0$ ゆえ

$$|\alpha_+| - |\alpha_-| = \alpha_+ - \alpha_- = \sqrt{a^2-4b}.$$

次いで $a < 0$ かつ $b > 0$ のとき，$a + \sqrt{a^2-4b} < 0$ かつ $a - \sqrt{a^2-4b} < 0$ ゆえ

$$|\alpha_+| - |\alpha_-| = -\alpha_+ + \alpha_- = -\sqrt{a^2-4b}.$$

最後に $b < 0$ のとき，$\sqrt{a^2-4b} > a$ ゆえ

$$|\alpha_+| - |\alpha_-| = \alpha_+ + \alpha_- = a.$$

□

Lemma 8. 任意の非負整数 n について，

$$\begin{aligned} a_n &= c_0 h_n(\alpha_+, \alpha_-) + (c_1 - ac_0) h_{n-1}(\alpha_+, \alpha_-) && (26) \\ &= c_0 h_n(\alpha_+, \alpha_-) - bc_{-1} h_{n-1}(\alpha_+, \alpha_-) && (27) \\ &= \frac{(c_0\alpha_+ + c_1 - ac_0)\alpha_+^n - (c_0\alpha_- + c_1 - ac_0)\alpha_-^n}{\sqrt{a^2-4b}} && (28) \\ &= \frac{(c_1 - c_0\alpha_-)\alpha_+^n - (c_1 - c_0\alpha_+)\alpha_-^n}{\sqrt{a^2-4b}}. && (29) \end{aligned}$$

特に $\alpha = \alpha_+ = \alpha_-$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= c_0(n+1)\alpha^n + (c_1 - ac_0) n\alpha^{n-1} && (30) \\ &= c_0(1-n)\alpha^n + c_1 n\alpha^{n-1}. && (31) \end{aligned}$$

Proof. (26) だけ示す．定義より $h_{-1}(\alpha_+, \alpha_-) = 0$, かつ $h_0(\alpha_+, \alpha_-) = 1$ と $h_0(\alpha_+, \alpha_-) = a$ ゆえ，$n = 0, 1$ で (26) は成り立つ．更に

$$\begin{aligned} & h_{n+2}(\alpha_+, \alpha_-) - ah_{n+1}(\alpha_+, \alpha_-) + bh_n(\alpha_+, \alpha_-) \\ &= \frac{(\alpha_+^{n+3} - a\alpha_+^{n+2} + b\alpha_+^{n+1}) - (\alpha_-^{n+3} - a\alpha_-^{n+2} + b\alpha_-^{n+1})}{\alpha_+ - \alpha_-} = 0 \end{aligned}$$

ゆえ，任意の非負整数 n で (26) が成り立つ． □

Lemma 9. 初期値 c_0, c_1 が $c_0c_1 \neq 0$ かつ $a^2-4b \geq 0$ となる実定数係数二階線型常差分方程式 *(5)* の解 a_n は高々 1 個の n を除いて零ではない．特に十分大きな n に対して, $a_n \neq 0$.

Proof. $a^2-4b=0$ のとき, $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha$ であり,

$$a_n = c_0(1-n)\alpha^n + c_1 n\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(c_0\alpha - (c_0\alpha - c_1)n) = 0$$

とすると, $c_0\alpha = (c_0\alpha - c_1)n$. ここで $c_0\alpha - c_1 = 0$ ならば, $c_0 = c_1 = 0$ となるので仮定 $(c_0, c_1) \neq (0,0)$ に反するので, $c_0\alpha - c_1 \neq 0$ としてよい．ゆえに

$$n = \frac{c_0\alpha}{c_0\alpha - c_1}$$

であり, これを満たす n は高々1つである．

次いで $a^2-4b>0$ とする．このとき, $\alpha_+ \neq \alpha_-$ であり,

$$a_n = \frac{(c_1 - c_0\alpha_-)\alpha_+^n - (c_1 - c_0\alpha_+)\alpha_-^n}{\sqrt{a^2-4b}} = 0$$

とすると,

$$(c_1 - c_0\alpha_-)\alpha_+^n = (c_1 - c_0\alpha_+)\alpha_-^n. \tag{32}$$

仮定より $ab \neq 0$ ゆえ $\alpha_\pm \neq 0$ であり, $c_1 - c_0\alpha_+$ と $c_1 - c_0\alpha_-$ の少なくとも一方は非零である．よって (32) は

$$c_1 - c_0\alpha_- = (c_1 - c_0\alpha_+)\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^n$$

となるが, これを満たす n は高々1つである． □

Lemma 10. 初期値 c_0, c_1 が $c_0c_1 \neq 0$ となる実定数係数二階線型常差分方程式 *(5)* の隣接する解の比 a_{n+1}/a_n の極限が存在する必要十分条件は $a^2-4b \geq 0$ である．更にこのときの極限は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \alpha & (c_1 - c_0\beta \neq 0) \\ \beta & (c_1 - c_0\beta = 0) \end{cases}. \tag{33}$$

Proof. 必要条件を対偶で示す．$\alpha_\pm \notin \mathbb{R}$ のとき,

$$\alpha_\pm = |b|^{\frac{1}{2}} e^{\pm\sqrt{-1}\pi\theta}$$

となる $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ が存在するので,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = |b|^{\frac{1}{2}} \frac{c_0|b|^{\frac{1}{2}} \sin(\pi(n+2)\theta) + (c_1 - ac_0)\sin(\pi(n+1)\theta)}{c_0|b|^{\frac{1}{2}} \sin(\pi(n+1)\theta) + (c_1 - ac_0)\sin(\pi n\theta)}.$$

ここで $\theta = \frac{N}{M} \in \mathbb{Q}$ ならば, $a \neq 0$ より $M \geq 3$ であり, $a_{n+M} = (-1)^N a_n$ ゆえ, 極限は存在しない．また $\theta \notin \mathbb{Q}$ ならば Kronecker の稠密定理より, 極限は存在しない．

次いで十分条件を示す. $|\alpha| > |\beta|$ ならば

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(c_1-c_0\beta)\alpha^{n+1}-(c_1-c_0\alpha)\beta^{n+1}}{(c_1-c_0\beta)\alpha^n-(c_1-c_0\alpha)\beta^n}\\ &= \begin{cases}\alpha & (c_1-c_0\beta\neq 0)\\ \beta & (c_1-c_0\beta=0)\end{cases}.\end{aligned}$$

(9) より $|\alpha| = |\beta|$ ならば, $\alpha=\beta=\frac{a}{2}$. よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{-c_0n\alpha^{n+1}+c_1(n+1)\alpha^n}{c_0(1-n)\alpha^n+c_1n\alpha^{n-1}}\\ &= \alpha\lim_{n\to\infty}\frac{n(c_1-c_0\alpha)+c_1}{n(c_1-c_0\alpha)+c_0\alpha}\\ &= \begin{cases}\alpha & (c_1-c_0\alpha\neq 0)\\ \frac{c_1}{c_0}=\alpha & (c_1-c_0\alpha=0)\end{cases}.\end{aligned}$$

□

3 Proofs of main results

Proof of Theorem 1. 以下の 8 つの場合分けをして考える:
(a1) $\alpha_+ > 1$, $a^2-4b>0$, $a>0$, (a2) $\alpha_+ > 1$, $a^2-4b>0$, $a<0$, (a3) $\alpha_+ > 1$, $a^2-4b=0$,
(b1) $\alpha_+ < 1$, $a^2-4b>0$, $a>0$, (b2) $\alpha_+ < 1$, $a^2-4b>0$, $a<0$, (b3) $\alpha_+ < 1$, $a^2-4b=0$,
(c1) $\alpha_+ = 1$, $a^2-4b>0$, (c2) $\alpha_+ = 1$, $a^2-4b=0$.

(a1) (29) より初期値一般の a_n について,

$$a_{n+1}-a_n = \frac{\alpha_+^n(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\alpha_-^n(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)}{\sqrt{a^2-4b}}.$$

$a>0$ のとき, 不等式 (24) $|\alpha_+| > |\alpha_-|$ が成立するので

$$a_{n+1}-a_n = \frac{\alpha_+^n}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^n(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right] \tag{34}$$

と変形すると, 右辺の第二項の絶対値はいくらでも 0 に近づけられるから, 十分大きな n に対して $a_n \le a_{n+1}$ が成り立つ必要十分条件は $(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)>0$ である.

(a2) $a<0$ のとき, 不等式 (25) $|\alpha_+| < |\alpha_-|$ が成立するので

$$a_{n+1}-a_n = \frac{\alpha_-^n}{\sqrt{a^2-4b}}\left[\left(\frac{\alpha_+}{\alpha_-}\right)^n(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right] \tag{35}$$

と変形する. $\alpha_+ > 1$ かつ $a=\alpha_++\alpha_- < 0$ ゆえ, $\alpha_- < -1$ が成り立つので, 十分大きな n に対し, これは正にも負にもなるので不適合である.

(a3) (30) より初期値一般の a_n について,

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n &= c_0\alpha_+^n((n+2)\alpha_+-(n+1))+(c_1-ac_0)\alpha_+^{n-1}((n+1)\alpha_+-n)\\ &= ((n+1)\alpha_+-n)(c_1-c_0\alpha_-)\alpha_+^{n-1}+c_0\alpha_+^n(\alpha_+-1)\\ &= \alpha_+^{n-1}\left[(n+1)\left(\alpha_+-1+\frac{1}{n+1}\right)(c_1-c_0\alpha_-)+c_0\alpha_+(\alpha_+-1)\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

最右辺の第一項 $(n+1)\left(\alpha_+-1+\frac{1}{n+1}\right)$ は正でいくらでも大きくなるので, 十分大きな n に対して $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つ必要十分条件は $c_1-c_0\alpha_->0$ である.

(b1) (34) より, $\alpha_+<0$ の場合は正にも負にもなり不適合である. また $0<\alpha_+<1$ のときは, $(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)\geq 0$ が必要かつ十分である.

(b2) (a2) と同様に, $a<0$ のときも, $\alpha_-<0$ と (35) より不適合である.

(b3) $a^2-4b=0$ のとき, (36) の右辺の第一項 $(n+1)\left(\alpha_+-1+\frac{1}{n+1}\right)$ は十分大きな n に対して負で絶対値が大きくなる. 従って, $\alpha_+<0$ のときは不適合である. $0<\alpha_+<1$ のときは, $c_1-c_0\alpha_-\leq 0$ が必要かつ十分である.

(c1) このとき

$$b=\alpha_-=a-\alpha_+=a-1$$

ゆえ,

$$a_{n+1}-a_n=(a-1)(a_n-a_{n-1})=(a-1)^n(a_1-a_0).$$

$a^2-4b>0$ のときは,

$$a_0\leq a_1,\ a\geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad a_{n+1}-a_n\geq 0 \quad (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

(c2) $a^2-4b=0$ のときは, $\alpha_+=\alpha_-=1$ で, $a=2$ ゆえ

$$a_0\leq a_1 \quad\Leftrightarrow\quad a_{n+1}-a_n\geq 0 \quad (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

□

Proof of Theorem 2. $c_1\neq c_0\beta$ と $c_1=c_0\beta$ で場合分けして考える. まず $c_1\neq c_0\beta$ とする. このとき (33) から a_{n+1}/a_n の極限は α である. ここで

$$\left|\alpha-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|=\left|\alpha-a+b\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{-b}{\alpha}+b\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{b}{\alpha}\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\left|\alpha-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{37}$$

ゆえ, 不等式 (13) は

$$\left|\frac{b}{\alpha}\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\beta\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\leq 1 \tag{38}$$

の成立と同値であることに注意する. $a^2-4b>0$ のとき, $|\alpha|>|\beta|$ なので十分大きな n に対して, (38) が成り立つことは明らかである.

次いで $a^2-4b=0$ とする. このとき, $\alpha=\beta$ ゆえ, (30) より

$$\left|\beta\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\alpha\frac{c_0(n+1)\alpha^n+(c_1-ac_0)n\alpha^{n-1}}{c_0(n+2)\alpha^{n+1}+(c_1-ac_0)(n+1)\alpha^n}\right|$$

$$= \left| \frac{c_0(n+1)\alpha + (c_1 - ac_0)n}{c_0(n+2)\alpha + (c_1 - ac_0)(n+1)} \right|$$
$$= \left| \frac{c_0\alpha + (c_1 - c_0\alpha)n}{c_1 + (c_1 - c_0\alpha)n} \right|.$$

ここで $c_1 \neq c_0\alpha$ より, 十分大きな n について

$$\left| \beta \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 - \frac{1}{1 + \frac{c_1}{c_1 - \alpha c_0}\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \leq 1$$

ゆえ, 不等式 (13) は成立する.

$c_1 = c_0\beta$ のときは, 任意の非負整数 n について

$$a_n = c_0\beta^n$$

となる. 実際, $n = 0, 1$ で成立して, $n+1$ まで成立したとすると

$$a_{n+2} = aa_{n+1} - ba_n = c_0\beta^n((\alpha + \beta)\beta - \alpha\beta) = c_0\beta^{n+2}.$$

よってこのとき, 任意の非負整数 n について

$$\left| \alpha - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |\alpha - \beta| \geq 0$$

ゆえ, 不等式 (13) は成立する. □

Proof of Theorem 3. $\alpha_+ = 1$ のとき, 必要性は明らかである. 十分性については

$$a_{k+1} - a_k = (a-1)a_k - ba_{k-1} = (a-1)(a_k - a_{k-1}) \geq 0$$

ゆえ, $a - 1 \geq 0$. よって任意の $n \geq k-1$ に対し, $0 < a_n \leq a_{n+1}$.

$\alpha_+ \neq 1$ のとき, 必要性は Theorem 1 から明らかであるので, 十分性を示す. 条件 (15) を仮定する. まず $1 \neq \alpha_+ > 0$, $a > 0$ のとき, 不等式 (24) より $|\alpha_+| = \alpha_+ \geq |\alpha_-|$ に注意せよ. ここで

$$a_k - a_{k-1} = \frac{\alpha_+^{k-1}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[(\alpha_+ - 1)(c_1 - c_0\alpha_-) - \left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+} \right)^{k-1} (\alpha_- - 1)(c_1 - c_0\alpha_+) \right] \geq 0$$

と

$$a_{k+1} - a_k = \frac{\alpha_+^{k}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[(\alpha_+ - 1)(c_1 - c_0\alpha_-) - \left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+} \right)^{k} (\alpha_- - 1)(c_1 - c_0\alpha_+) \right] \geq 0$$

を仮定する.

(A1) $(\alpha_- - 1)(c_1 - c_0\alpha_+) \geq 0$, $\frac{\alpha_-}{\alpha_+} > 0$ の場合:

$$a_{k+m+1} - a_{k+m} = \frac{\alpha_+^{k+m}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[(\alpha_+ - 1)(c_1 - c_0\alpha_-) - \left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+} \right)^{k+m} (\alpha_- - 1)(c_1 - c_0\alpha_+) \right]$$

$$\geq \frac{\alpha_+^{k+m}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^k(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\geq 0.$$

(A2) $(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\geq 0$, $\frac{\alpha_-}{\alpha_+}<0$ の場合: k : odd のとき, $a_{k+2m+1}-a_{k+2m}\geq 0$ は明らかで,

$$\begin{aligned}
a_{k+2m}-a_{k+2m-1} &= \frac{\alpha_+^{k+2m-1}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k+2m-1}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&= \frac{\alpha_+^{k+2m-1}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k-1}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&\quad+\frac{\alpha_+^{k+2m-1}}{\sqrt{a^2-4b}}\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k-1}\left[1-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{2m}\right](\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\geq 0.
\end{aligned}$$

k : even のとき, $a_{k+2m}-a_{k+2m-1}\geq 0$ は明らかで,

$$\begin{aligned}
a_{k+2m+1}-a_{k+2m} &= \frac{\alpha_+^{k+2m}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k+2m}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&= \frac{\alpha_+^{k+2m}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&\quad+\frac{\alpha_+^{k+2m}}{\sqrt{a^2-4b}}\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k}\left[1-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{2m}\right](\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\geq 0.
\end{aligned}$$

(B1) $(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\leq 0$, $\frac{\alpha_-}{\alpha_+}>0$ の場合：明らか.
(B2) $(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\leq 0$, $\frac{\alpha_-}{\alpha_+}<0$ の場合：k : odd のとき, $a_{k+2m}-a_{k+2m-1}\geq 0$ は明らかで,

$$\begin{aligned}
a_{k+2m+1}-a_{k+2m} &= \frac{\alpha_+^{k+2m}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k+2m}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&= \frac{\alpha_+^{k+2m}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&\quad+\frac{\alpha_+^{k+2m}}{\sqrt{a^2-4b}}\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k}\left[1-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{2m}\right](\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\geq 0.
\end{aligned}$$

k : even のとき, $a_{k+2m+1}-a_{k+2m}\geq 0$ は明らかで,

$$\begin{aligned}
a_{k+2m}-a_{k+2m-1} &= \frac{\alpha_+^{k+2m-1}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k+2m-1}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&= \frac{\alpha_+^{k+2m-1}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[(\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k-1}(\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\right]\\
&\quad+\frac{\alpha_+^{k+2m-1}}{\sqrt{a^2-4b}}\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{k-1}\left[1-\left(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)^{2m}\right](\alpha_--1)(c_1-c_0\alpha_+)\geq 0.
\end{aligned}$$

□

Theorem 3 の証明からもわかるように, 不等式 (19) が最初の 2 steps の単調性 $a_{k-1} \le a_k \le a_{k+1}$ と十分大きな n に対してが成立するならば, $k-1 \le n$ に対して成立する.

Remark 11. Hartman-Aurel [2], [3] は線型常差分方程式の解の単調性 $a_n < a_{n+1}$ (より正確には単調性を満たす解の存在) に関するいくつかの十分条件を与えている. 彼らの結果を, 実定数係数二階線型常差分方程式 (5) に適用すると, その十分条件は

$$a-1-b>0, \quad b>0$$

となる. これが十分条件であることは

$$a_{n+2}-a_{n+1}=(a-1-b)a_{n+1}+b(a_{n+1}-a_n)$$

より直ちにわかる.

Proof of Corollary 4. $a_1 = aa_0$ に注意して, $k=0$ として Theorem 3 を用いると, 条件 (15) は

$$0<a_{-1}=0<a_0 \le a_1 = aa_0, \quad 1 \ne \alpha_+ > 0, \quad a>0, \quad (\alpha_+-1)(c_1-c_0\alpha_-)=a_0\alpha_+(\alpha_+-1)>0.$$

となり, これは $a_0>0$, $a \ge 1$, $\alpha_+>1$ と同値である. また, 条件 (16) に関しては $a_0>0$, $a\ge 1$, $\alpha_+=1$ と同値であり, 併せて必要十分条件 (20) を得る. □

Remark 12. Corollary 4 の条件 (16) 下では

$$\alpha_+=\alpha, \quad \alpha_-=\beta$$

が成立することに注意せよ. このとき, 領域

$$D_1 := \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha+\beta\ge 1,\ \alpha\ge 1,\ |\alpha|\ge|\beta|\} \tag{39}$$

及び

$$D_1' := \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a\ge 1,\ \alpha\ge 1,\ |\alpha|\ge|\beta|\} \tag{40}$$

を図示すると, 以下のようになる:

Proof of Theorem 5. 十分性を示す. Theorem 2 の証明と同様に, 任意の n に対して, 不等式 (38)

$$\left|\frac{b}{\alpha}\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\beta\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}\right| \le 1$$

が成立することと (13) が成立することは同値である. $|\alpha|=|\beta|$ のとき, (9) より, $\alpha=\beta\ne 0$. よって

$$a_n=a_0(n+1)\alpha^n, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n+1}\alpha$$

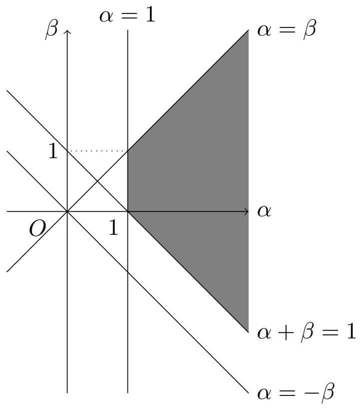


図 1: D_1

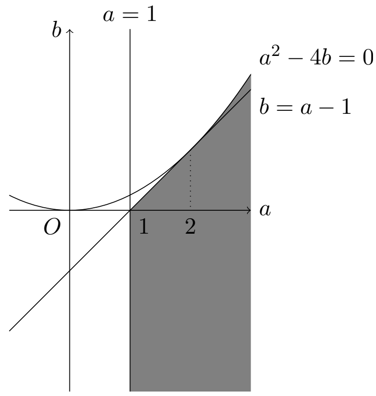


図 2: D_1'

ゆえ,

$$\left|\alpha - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right| = \frac{|\alpha|}{n+2} \leq \frac{|\alpha|}{n+1} = \left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

が任意の非負整数 n に対して成り立つ.

以下, $|\alpha| > |\beta|$ とする. 特性根が $\alpha, \beta > 0$ のとき, $\alpha \geq \beta$ かつ条件 (21) より $\alpha + \beta \geq \beta$ ゆえ

$$|\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}| - |\beta(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})| = \alpha^{n+1}(\alpha - \beta) \geq 0.$$

$\alpha, \beta < 0$ のときも同様に不等式 (13) が成り立つことがわかる.

次いで $\alpha > 0$ かつ $\beta < 0$ のとき, $|\alpha| = \alpha > -\beta = |\beta|$ かつ $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta \geq -\beta = |\beta|$ ゆえ

$$\begin{aligned} |\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}| - |\beta(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})| &= \alpha^{n+1}(\alpha + \beta) - 2\beta^{n+2} \\ &= \alpha^{n+1}(\alpha + 2\beta) - \beta(\alpha^{n+1} + 2\beta^{n+1}) \qquad (41) \end{aligned}$$

であり, $\alpha^{n+1} + 2\beta^{n+1} \geq 0$ が任意の非負整数 n について成り立つことから, (41) は非負である.

$\alpha < 0$ かつ $\beta > 0$ のときは, $\alpha' := -\alpha$, $\beta' := -\beta$ として同様の議論をすることで (38) が示せる.

必要性を示す. 不等式 (38) の $n = 0$ の場合を考えると,

$$\left|\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right| \leq 1$$

より, $\alpha + \beta \neq 0$ かつ $|\beta| \leq |\alpha + \beta|$. 更に Theorem 2 より, 十分大きな n で不等式 (13) が成り立つ同値条件は $a^2 - 4b \geq 0$ ゆえ, これで必要性が示された. □

Remark 13. Theorem 5 の類似として, 初期値一般の場合に, 必要条件 $a^2 - 4b \geq 0$,

$$\left|\frac{\beta c_0}{c_1}\right| \leq 1$$

を仮定しても, これは十分ではない. 実際,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 3, \quad \alpha = 2.1, \quad \beta = -2$$

とすると, $a_2 = (2.1-2)3+4.2 = 4.5$ であり,

$$\left|\frac{\beta c_0}{c_1}\right| = \frac{2}{3} \leq 1$$

は成立するが,

$$\left|\frac{\beta c_1}{c_2}\right| = \frac{4}{3} \geq 1$$

となる.

Remark 14. Theorem 5 の条件 (21) を満たす領域

$$D_2 := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\alpha+\beta| \geq |\beta|, |\alpha| \geq |\beta|\}, \tag{42}$$

及び

$$D_2' := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |a| \geq |\beta|, |\alpha| \geq |\beta|\} \tag{43}$$

を図示すると, 以下のようになる:

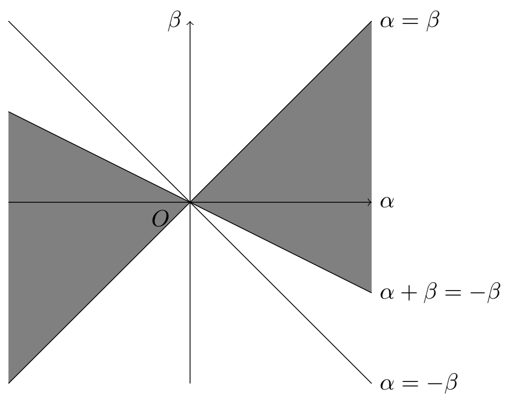


図 3: D_2

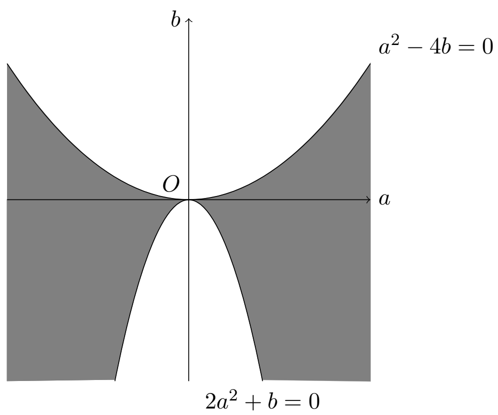


図 4: D_2'

Remark 15. Theorem 5 は, 実定数係数差分 Ricacci 方程式

$$b_{n+1} = \frac{xb_n+y}{zb_n+w} \tag{44}$$

の解についての性質と読み替えられる. 実際,

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

とおけば, 差分方程式 (5) の両辺を a_{n+1} で割って整理すると

$$b_{n+1} = a - b\frac{1}{b_n} = \frac{ab_n - b}{b_n} \tag{45}$$

となる. すなわち Theorem 5 は, 初期値

$$b_0 = \frac{a_1}{a_0} = a$$

の差分 Ricacci 方程式 (45) の解が, (45) の不動点に単調に近づく同値条件を与えている.

Proof of Theorem 6. 初期値一般の a_n について

$$\begin{aligned}
|a_n\alpha - a_{n+1}| &= |c_0(h_n(\alpha,\beta)\alpha - h_{n+1}(\alpha,\beta)) + (c_1 - ac_0)(h_{n-1}(\alpha,\beta)\alpha - h_n(\alpha,\beta))| \\
&= \left| c_0 \frac{\beta^{n+2} - \alpha\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} + (c_1 - ac_0)\frac{\beta^{n+1} - \alpha\beta^n}{\alpha - \beta} \right| \\
&= \left| -c_0\beta^{n+1} - (c_1 - ac_0)\beta^n \right| \\
&= |\beta|^n \left| c_0\beta + (c_1 - ac_0) \right| \\
&= |c_1 - c_0\alpha||\beta|^n.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
|a_n\alpha - a_{n+1}| - |a_{n+1}\alpha - a_{n+2}| &= |c_1 - c_0\alpha||\beta|^n - |c_1 - c_0\alpha||\beta|^{n+1} \\
&= |c_1 - c_0\alpha||\beta|^n(1 - |\beta|) \geq 0
\end{aligned} \tag{46}$$

ならば, $|\beta| \leq 1$.

逆に $|\beta| \leq 1$ ならば, (46) が成り立つ. □

Remark 16. 任意の非負整数 n についての正値単調非減少性 (19) と比の単調性 (22) が成り立つならば,

$$\left| \alpha - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| \leq \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \left| \alpha - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

となって, (13) が成り立つ (Proposition 19 参照). ただし, 逆は成立しない. たとえば, (6) の場合, 比の単調性 (13) と (22) は成り立つが, 正値単調非減少性 (19) は成り立っていない.

Remark 17. 差分方程式 (5) において, $a, b \in \mathbb{Z}$ かつ特性多項式 $x^2 - ax + b$ が $\mathbb{Z}$ 上既約とする. このとき, 条件 (23) は, $\beta \neq 0$ かつ $|\beta| < 1$ であり, α は 1 より大きい 2 次の代数的整数かつ Pisot 数になる [1]. つまり, $a, b \in \mathbb{Z}$ かつ特性多項式 $x^2 - ax + b$ が $\mathbb{Z}$ 上既約のとき, 任意の初期値 c_0, c_1 と任意の非負整数 n について (22) が成り立つ必要十分条件は, α が Pisot 数になることである. 「初期値一般の整数係数二階線型差分方程式の解の比の単調性」という解析的条件が, 「特性根 α が Pisot 数」という代数的条件と同値なのは興味深い.

Remark 18. Theorem 6 の条件 (23) を満たす領域

$$D_3 := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\beta| \leq 1, |\alpha| \geq |\beta|\} \tag{47}$$

及び

$$D_3' := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid |\beta| \leq 1, |\alpha| \geq |\beta|\} \tag{48}$$

を図示すると, 以下のようになる:

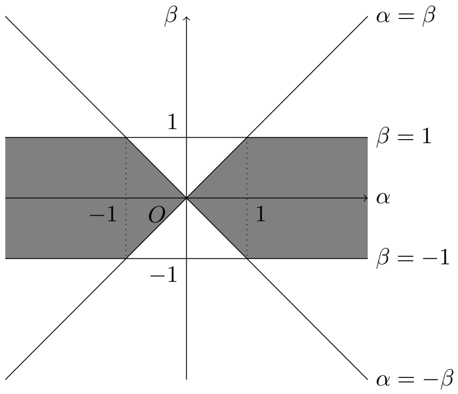


図 5: D_3

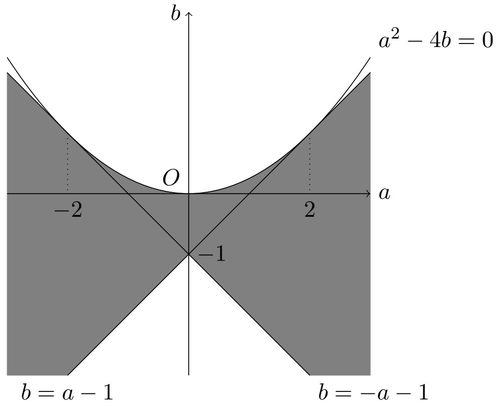


図 6: D'_3

4 Concluding remarks

本研究の動機の一つに Fibonacci 数の一般化が挙げられる. Fibonacci 数の一般化として, 実定数係数二階線型常差分方程式 (5) の解, その中でも特に初期値が $a_{-1} := 0$, $a_0 := 1$ のもの (すなわち二変数の完全斉次対称式の特殊値) から定まる正値整数列はよく研究されてきた [4]. しかし, 従来の研究では単調性 (1), (2), (3) に関して注意が払われてこなかったように思われる. 本論文の主結果を用いることで, Fibonacci 数の単調性 (1), (2), (3) の類似 (19), (13), (22) を保つような整数列を考えることができる.

実際, Remark 12, Remark 14, Remark 18 で述べた領域 D_1, D_2, D_3 もしくは D'_1, D'_2, D'_3 それぞれの intersection $D := D_1 \cap D_2 \cap D_3$ もしくは $D' := D'_1 \cap D'_2 \cap D'_3$ に, (5) の特性根, もしくは (5) の係数を制限すればよい. 簡単な計算より, 次がわかる.

Proposition 19.

$$D := D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha + \beta \geq 1,\ \alpha \geq 1,\ |\beta| \leq 1\}, \tag{49}$$

$$D' := D'_1 \cap D'_2 \cap D'_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 1,\ a - 1 \geq b \geq -a - 1\}. \tag{50}$$

更に次の Lemma に注意しよう.

Lemma 20. $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \cap D'$ とする.

$$x^2 - ax + b \text{ が } \mathbb{Z} \text{ 上既約} \quad \Leftrightarrow \quad b \neq -a - 1,\ 0,\ a - 1. \tag{51}$$

Proof. $b = -a - 1,\ 0,\ a - 1$ ならば $\mathbb{Z}$ 上可約は明らかなので, 逆を示す.
$x^2 - ax + b$ が $\mathbb{Z}$ 上可約とすると, ある整数 k が存在して

$$x^2 - ax + b = (x - k)(x - a + k).$$

$(k, a - k) \in \mathbb{Z}^2 \cap D$ もしくは $(a - k, k) \in \mathbb{Z}^2 \cap D$ ゆえ, Proposition 19 より, $|a - k| \leq 1$ もしくは $|k| \leq 1$ が成り立つ. よって, $k = a - 1, a, a + 1$ もしくは $k = -1, 0, 1$ であり, 取りうる $b = k(a - k)$ の値も $b = -a - 1, 0, a - 1$ に限る. $\square$

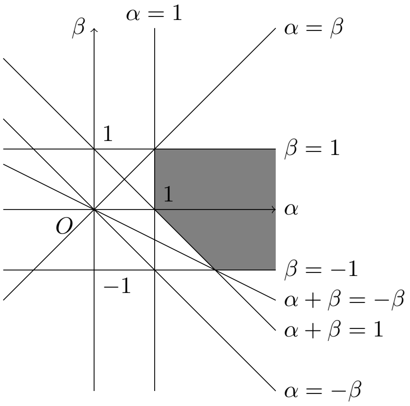


図 7: D

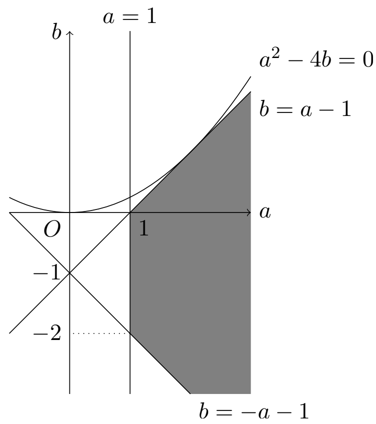


図 8: D'

$(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \cap D'$ について, 条件 (51) を満たす整数係数二階線型常差分方程式 (5) を list すると以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&a = 1 : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \\
&a = 2 : a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \\
&a = 3 : a_{n+2} = 3a_{n+1} + 3a_n,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

これにより, 確かに Fibonacci 数は単調性の観点から見ても, かなり特殊な class であることがわかる.

Acknowledgments

Theorem 6 を考えるきっかけを与えて下さった秋山茂樹氏 (筑波大学) に感謝を申し上げる. 本研究は CREST (JST CREST Grant Number JP19209317) と科研費 (JSPS KAKENHI Grant Number 21K13808) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] M.J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J.P. Schreiber: *Pisot and Salem Numbers*, Birkhauser, Basel, (1992).

[2] P. Hartman and W. Aurel: *On linear difference equations of second order*, Amer. J. Math. **72**-1, (1950) pp124–128.

[3] P. Hartman and W. Aurel: *Linear differential and difference equations with monotone solutions*, Amer. J. Math. **75**, (1953) pp731–743.

[4] T. Koshy: *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications Volume 1 Second Edition*, Wiley, (2017).

Yoshiaki Goto
General Education
Otaru University of Commerce
3-5-21, Midori, Otaru, 047-8501, JAPAN
E-mail: goto@res.otaru-uc.ac.jp

Genki Shibukawa
Department of Mathematics
Graduate School of Science
Kobe University
1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe, 657-8501, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

1文字完全数について
日本フィボナッチ協会研究会
2023年８月２５日

飯高 茂

2023 年 8 月 29 日

1　完全数の始まり

自然数 a の約数の和をギリシャ文字を使って $\sigma(a)$ と書く. 数学の始祖ともいえるエウクレイデス (ユークリッド) は組織的に完全数をつくることを考えた.

1 を 2 倍して 2. それを 2 倍して 4 , この操作を続けると $8, 16 \cdots, 2^e$. かくして出てきた数をすべて加えると数 $N = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^e = 2^{e+1} - 1$ を得る. N が素数となったとき, $a = 2^e N$ は完全数になる.

2　平行移動 m の完全数

命題 1 整数 m について, $p = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数とするとき $a = 2^e p$ は $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす.

$p = 2^{e+1} - 1 + m = N + m, a = 2^e p$ によって作られた数 a を平行移動 m のユークリッドの完全数という .

一般に $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす自然数 a を平行移動 m の完全数という.

命題 1 は 平行移動 m のユークリッド完全数は 平行移動 m の完全数になることを意味する. $m = 0$ の場合はユークリッドの原論で扱われている.

3　1 文字完全数

与えられた自然数 k に関して次のような課題を出してみよう.

$k\sigma(\alpha) - \sigma(k)\alpha = 0$ を満たす α を 1 文字 k の完全数という. これを与えられた自然数 k について計算せよ.

平行移動のパラメータ m について $k\sigma(\alpha) - \sigma(k)\alpha = -m$ を満たす α を平行移動 m の 1 文字 k の完全数という. これも計算せよ.

このとき, 定数 C があり, k の約数ではない素数 p について $\alpha = Cp$ が解になり, p は C の約数ではない, と仮定する. しかもこのような素数が複数個あるとする.

$k\sigma(Cp) - \sigma(k)Cp = (k\sigma(C) - \sigma(k)C)p + k\sigma(C) = -m.$

このような素数 p が複数個あるとしたので, $k\sigma(C) - \sigma(k)C = 0, k\sigma(C) = -m.$

とくに $C = k$ にとると解 α は $k\sigma(\alpha) - \sigma(k)\alpha = k\sigma(k)$ を満たす. α を 1 文字 k の宇宙完全数という.

kp 以外の解 を特にエイリアン解という.

k によって多種多様な解が得られるであろう.

i. $k = 2$ の場合.

1 文字宇宙完全数の方程式は $2\sigma(\alpha) - 3\alpha = 6$ でありその解は $\alpha = 8, 2p.(p:$ は奇素数).

これは私が完全数研究の練習として a が素数の特徴づけの式 $\sigma(a) = a + 1$ の類似を考えたときの結果である.

a が素数 p の 2 倍になることの特徴付けが $2\sigma(a) - 3a = 6$ であることにその当時気がつき, 続いて素数の 2^e 倍や 3^e 倍の特徴付けができた.

ii. 奇素数のべき, すなわち $k = Q^\varepsilon$ の場合.

$k\sigma(\alpha) - \sigma(k)\alpha = 0$ を満たす α は k, すなわち,Q^ϵ.

この場合, 宇宙完全数の方程式 $k\sigma(\alpha) - \sigma(k)\alpha = k\sigma(k)$ を満たす解は $\alpha = Q^\varepsilon p, (p \neq Q:$ 素数) 以外に, $Q^{2\varepsilon+1}$ があるだけ.

k の素数倍でない解 を特にエイリアン解という.

k によって多種多様な解が得られるであろう.

iii. $k = 15$ の場合

パソコンで計算すると $3(5\sigma(\alpha) - 8\alpha) = 3 * 8 * 24$ を満たす α は $15p, 3^3 * 5, 3 * 5^3$ のみと想像される.

この場合宇宙完全数は数が少いので, 宇宙ということは言えない. そこで小宇宙と言うにとどめたい.

iv. $k = 21$ の場合.$21\sigma(\alpha) - 32\alpha = 0$ を満たす α は 21 のみ. これは後に示す.

k が素数べきではない場合を考える.

$k\sigma(\alpha) = \sigma(k)\alpha$ を満たす α が k にならない場合を調べてみよう.

乗数 $k\sigma(\alpha) = \sigma(k)\alpha$ について k が小さいときの解を調べる.

素数べきの場合を除外すると $k = 6, 12, 14, 15 \cdots$ が残る.

表 1: $k\sigma(\alpha) = \sigma(k)\alpha$ の解

α	素因数分解
$k=6$	
α	素因数分解
6	$2*3$
28	2^2*7
496	2^4*31
8128	2^6*127
$k=12$	
α	素因数分解
12	2^2*3
234	$2*3^2*13$
$k=30$	
30	$2*3*5$
140	2^2*5*7
2480	2^4*5*31
6200	2^3*5^2*31
40640	$2^6*5*127$

完全数の 5 倍 以外の解をすべて求めたい. しかしこれは難題であろう.

表 2: $k\sigma(\alpha) = \sigma(k)\alpha, k = 3*28$ の解

α	素因数分解
$k=84$	2^2*3*7
84	2^2*3*7
270	$2*3^3*5$
1488	2^4*3*31
1638	$2*3^2*7*13$

完全数の 3 倍 以外の解をすべて求めたい.

表 3: $k\sigma(\alpha) = \sigma(k)\alpha$ の解

α	素因数分解
$k = 40$	
40	$2^3 * 5$
224	$2^5 * 7$
174592	$2^9 * 11 * 31$
$k = 56$	
56	$2^3 * 7$
3724	$2^2 * 7^2 * 19$
$k = 60$	
60	$2^2 * 3 * 5$
1170	$2 * 3^2 * 5 * 13$
$k = 80$	
80	$2^4 * 5$
200	$2^3 * 5^2$

$k = 80$ のときの解は 2 例のみ. 高島の定理として証明済み.

上の例について若干の説明する. 残りは未完の問題と言ってよい.

i.

$k=6$ のとき $\sigma(k)=12$ なので方程式は $6\sigma(\alpha)=12\alpha;\ \sigma(\alpha)=2\alpha$ になる. 完全数の定義式になった.

ii.

$k=30$ の場合 $\sigma(k)=72$ なので方程式は $5\sigma(\alpha)=12\alpha$.

$a=6200=2^3*5^2*31$ は新規参入組

iii.

$k=84$ の場合

$\sigma(k)=224$ なので方程式は $3\sigma(\alpha)=8\alpha$.

4 h 倍完全数

奇素数 h を 1 つ決めて h 倍の完全数を考えてみよう.

$\widetilde{h}=h+1$ を使う.

$A=2^{e+1}-1+m$, (A: 素数) と仮定する.2^eA は平行移動 m の完全数だからその h 倍は $\alpha=2^ehA$.

$\alpha=2^ehA$ として定義されたモノはユークリッド完全数の流れをくむものである.

以下でこれの満たす関係式を求めよう.

$N=2^{e+1}-1, \varepsilon=2^{e+1}$ とおくと $A=\varepsilon-1+m. N=\varepsilon-1$.

$$\sigma(\alpha)=\sigma(2^e)\sigma(h)\sigma(A)=N\widetilde{h}\widetilde{A}=N\widetilde{h}(A+1).$$

に h を掛けて

$$h\sigma(\alpha)=\widetilde{h}(hNA+hN).$$

$hNA=h(2^{e+1}-1)A=h2^{e+1}A-hA=2\alpha-hA$ により

$$h\sigma(\alpha)=\widetilde{h}hNA+\widetilde{h}hN=2\widetilde{h}\alpha+\widetilde{h}h(N-A).$$

$N-A=-m$ によって,

$$h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-m\widetilde{h}h.$$

これが h 倍の完全数 α についての定義方程式である.

定義 1 $h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-m\widetilde{h}h$ の解を乗数 h, 平行移動 m の多重完全数 *(pluri-perfect number)* という.

$(h,0,2\widetilde{h})$ 完全数ともいう.

(3 倍積完全数というものもありこれらは $\sigma(a)=3a$ の解であり, ここで扱う多重完全数とは異なっている.)

5　一匹狼

1 文字 k の完全数が k しかないとき, 一匹狼 (lone wolf) という
k が奇素数べき Q^{ε} なら一匹狼である.
素因子 2 個の場合に次の結果をえた.

定理 1 *$\sigma(k)\alpha = k\sigma(\alpha)$, k が相異なる 2 奇素数の積 pQ のとき解は $\alpha = pQ = k$ である. ただし, 解は p の倍数と仮定する.*

この結果, pQ も一匹狼である.

Proof

$k = pQ$ のとき $\sigma(k) = \widetilde{p}\widetilde{Q}$ ここで $(\widetilde{p} = p+1, \widetilde{Q} = Q+1)$. $\sigma(k)\alpha = k\sigma(\alpha)$ より $\widetilde{p}\widetilde{Q}\alpha = pq\sigma(\alpha)$ をえる. $p|\widetilde{p}\widetilde{Q}\alpha$ により $\widetilde{Q}$ が p の倍数でないなら $p|\alpha$.

$pQ = 15$ のように $\widetilde{Q} = 6$ が $p = 3$ の倍数なら $p|\alpha$ の証明は成り立たない. そこで仕方なく解は p の倍数という条件を仮定して考えることにした.

よって $\alpha = p^e L, (p \not| L)$ と書けるので

$$\sigma(\alpha) = \sigma(p^{\varepsilon} L) = \frac{X}{\overline{p}}\sigma(L).$$

ただし $(X = p^{\varepsilon+1} - 1)$.

$$\widetilde{p}\widetilde{Q}\alpha = \widetilde{p}\widetilde{Q}p^e L = pq\sigma(\alpha) = \frac{pQX}{\overline{p}}\sigma(L)$$

ゆえに $Q|\widetilde{p}\widetilde{Q}p^{e-1}L, p+1 < Q$ により $Q|L$.
よって, $L = Q^f M, (Q \not| M)$ と書ける.
ゆえに $\sigma(L) = \sigma(Q^f M) = \dfrac{Y}{\overline{Q}}\sigma(M)$, ただし $Y = Q^{f+1} - 1$
よって, $\widetilde{p}\widetilde{Q}\alpha = pQ\sigma(\alpha) = \dfrac{pQX}{\overline{p}}\sigma(L)$ に $L = Q^f M$ を代入して 整理すると

$$\frac{XY}{\overline{p}\,\overline{Q}}\sigma(M) = \widetilde{p}\widetilde{Q}p^{e-1}Q^{f-1}M.$$

これらに $\overline{p}\overline{Q}$ を乗じて

$$XY\sigma(M) = p_2 Q_2 p^{e-1}Q^{f-1}M.$$

ここで $p_2 = p^2 - 1, Q_2 = Q^2 - 1$ とした. これらより

$$p_2 Q_2 p^{e-1}Q^{f-1}M = XY\sigma(M) \geq XYM.$$

M を除して

$$p_2 Q_2 p^{e-1}Q^{f-1} \geq XY.$$

計算をすると $XY = p^{e+1}Q^{f+1} - p^{e+1} - Q^{f+1} + 1$,

$p_2Q_2p^{e-1}Q^{f-1} = p^{e+1}Q^{f+1} - p^{e+1}Q^{f-1} - p^{e-1}Q^{f+1} + p^{e-1}Q^{f-1}$.
計算して整理し

$$0 \geq XY - p_2Q_2p^{e-1}Q^{f-1} = -p^{e+1} - Q^{f+1} + 1 - (-p^{e+1}Q^{f-1} - p^{e-1}Q^{f+1} - p^{e-1}Q^{f-1}).$$

符号を変更して
$R(f) = p^{e+1} + Q^{f+1} - 1 + (-p^{e+1}Q^{f-1} - p^{e-1}Q^{f+1} + p^{e-1}Q^{f-1})$ とおくと, $R(f) \geq 0$.
$R(f)$ の値を再評価すると

$$R(f) = Q^{f+1}(1 - p^{e-1}) + Q^{f-1}(p^{e-1} - p^{e+1}) + p^{e+1} - p^{e-1}) \leq 0.$$

したがって, $R(f) = 0$. よって $e = f = 1$. 結局 $\sigma(M) = M$ になり $M = 1$. $\alpha = p^eQ^fM = pQ = k$.
q.e.d.

同様に次の結果が示される.
かくしてこの場合, 宇宙小完全数にはエイリアン解がないことが示された.

定理 2 $\sigma(k)\alpha = k\sigma(\alpha) + k\sigma(k)$, k が相異なる 2 奇数素数の積 pQ のとき解は $\alpha = kP, p^3Q, qQ^3$ である. ただし, 解は p の倍数と仮定する.

$p < Q, \widetilde{Q} = Q+1$ は p で割れないと仮定する.
しかし, この条件が成り立たなくても解は p で割れないと仮定する. この場合の仮定は奇数完全数の場合を除外して完全数の懸案を解決したオイラーの仮説の類似というべきものとして受け入れてよい仮定である.

Proof

$\widetilde{p} = p+1, \widetilde{Q} = Q+1$ とおくと, $\sigma(k) = \widetilde{p}\widetilde{Q}$.
$k\sigma(\alpha) - \sigma(k)\alpha = k\sigma(k)$ を書き直すと $pQ\sigma(\alpha) - \widetilde{p}\widetilde{Q}\alpha = pQ\widetilde{p}\widetilde{Q}$.
これより, 仮説を用いると, α は p, Q の約数なので, $\alpha = p^eQ^fM(, e, f > 0)$ と書けて M は pQ と互いに素.
$X = p^{e+1} - 1, Y = Q^{f+1} - 1$ とおくと $\sigma(\alpha) = \dfrac{XY}{\overline{p}\overline{Q}}\sigma(M)$.
書き直すと

$$pQ\frac{XY}{\overline{p}\overline{Q}}\sigma(M) - \widetilde{p}\widetilde{Q}p^eQ^fM = pQ\widetilde{p}\widetilde{Q}.$$

式に $\overline{p}\overline{Q}$ を書けると $p_0 = p^2 - 1, Q_0 = Q^2 - 1$ を用いて簡略化すると,

$$pQXY\sigma(M) - p_0Q_0p^eQ^fM = pQp_0Q_0.$$

ここで i. $M > 1$ と ii. $M = 1$ の場合分けを行う.

i. $M > 1$ のとき, $\sigma(M) \geq M + 1$ を代入すると

$$pQp_0Q_0 \geq pQXY(M+1) - p_0Q_0p^eQ^fM = (pQXY - p_0Q_0p^eQ^f)M + pQXY.$$

$$pQp_0Q_0 > (pQXY - p_{Q0}p^eQ^f) + pQXY,$$

$$pQp_0Q_0 - pQXY > pQXY - p_0Q_0p^eQ^f,$$

$$pQp_0Q_0 + p_0Q_0p^eQ^f > 2pQXY.$$

pQ で除して

$$p_0Q_0 + p_0Q_0p^{e-1}Q^{f-1} > 2XY.$$

$p0 = p^2 - 1, Q_0 = Q^2 - 1$ を用いて

$X = p^{e+1} - 1 = p^{e-1}p^2 - 1 = p^{e-1}(p_0 + 1) - 1 = p^{e-1}(p_0) + p^{e-1} - 1 \geq p^{e-1}p_0$,
$Y = Q^{f-1}(Q_0 + 1) - 1 \geq Q^{f-1}Q_0$.
ゆえに

$$p_0Q_0 + p_0Q_0p^{e-1}Q^{f-1} \geq 2XY \geq 2p^{e-1}p_0Q^{f-1}Q_0$$

$$p_0Q_0 \geq p^{e-1}p_0Q^{f-1}q_0 \geq p_0Q_0$$

かくして $e = 1, f = 1$.
等号が成立したので $\sigma(M) = M + 1$. これより M は素数なので P と書くと $\alpha = kP$.

ii. $M = 1$ のとき,

$$pQXY\sigma(M) - p_{Q0}p^eQ^fM = pQXY - p_{Q0}p^eQ^f = pQp_0Q_0.$$

$e = 1$ とすると, $X = p^2 - 1 = p_0$.
$pQXY - p_0Q_0pQ^f = pQp_0Q_0$ から p_0 を除して

$$QY - Q_0Q^f = QQ_0$$

$Y = Q^{f+1} - 1$ によって,

$$Q^{f+1} - 1 - Q_0Q^{f-1} = Q_0 = Q^2 - 1$$

よって, $f \geq 3$.
$Q^{f+1} - Q_0Q^{f-1} = Q^2, Q^{f-1} - Q_0Q^{f-3} = 1$.
$f = 3$ となり $\alpha = p^eQ^fM = pQ^3$.
$e = 2, f = 2$ のとき不成立を確認.
$e = 3, f = 1$ のとき $\alpha = p^eQ^fM = p^3Q$.
それ以外は不成立を確認..
q.e.d.

6　エイリアン A 型解

$k=6$ の場合.$6(\sigma(\alpha)-2\alpha)=0$ を満たす α は古典的完全数.

1 文字宇宙完全数の方程式は, $6(\sigma(\alpha)-2\alpha-12)=0$. その解は $6p, 2^3*3, 2*3^3$ のほかにエイリアン解がいくつもある

A 型解に絞って多くのエイリアン解を探すことにしよう.

$k=6, \sigma(\alpha)-2\alpha=2k$ を一般化して R を完全数とし $\sigma(\alpha)-2\alpha=2R$ の A 型解

$\alpha=2^eQ, (Q:$ 奇素数$)$, があるとしてこれを求める.

$N=2^{e+1}-1$ とおくとき

$$\sigma(\alpha)-2\alpha=\sigma(2^eQ)-2*2^eQ=N(Q+1)-(N+1)Q=N-Q=2R.$$

$Q=N-2R=2^{e+1}-1-2R$ を得る.

エイリアン A 型解 α を探すには完全数 R に対し $Q=2^{e+1}-1-2R$ が素数になる e をパソコンでもとめ $\alpha=2^eQ$ とおけば良い.

表 4: $\sigma(\alpha)-2\alpha=2R$, エイリアン A 型解

$R=6;e$	Q	$\alpha=2^eQ$	素因数分解
4	19	304	2^4*19
8	499	127744	2^8*499
12	8179	33501184	$2^{12}*8179$
16	131059	8589082624	$2^{16}*131059$
56	A	X	$2^{56}*144115188075855859$
104	B	Y	$2^{104}*40564819207303340847894502572019$
136	C	Z	$2^{136}*U$

$A=144115188075855859$ a - $X=10384593717069654320312270165377024$

$B=40564819207303340847894502572019$

$Y=822752278660603021077484591278411581166520461101278617407586304$

$C=174224571863520493293247799005065324265459$

$Z=151771007205135083665582961470587414581426709703777$ 途中略す 7965824

$U=174224571863520493293247799005065324265459$

私は $e<20$ の場合を計算して, 次の $e=20$ は無いだろうと予想した.

当時小学 4 年の高根沢君は数多くの素因数分解を実行して $e=56,104,136$ があることを報告してくれた. 私は凄いですねと思わず宣った.

7 齋藤の $\varphi(a)^2$ 完全数

ユークリッドの完全数を a をベース p, 平行移動 m, 乗数 h について定義すると $(\overline{p}=p-1)$ $q=\dfrac{hp^{e+1}-1}{\overline{p}}+m$ を素数と仮定すれば $a=p^eq$ はユークリッドの完全数として自然である. $p=2,h=1$ のとき, $\sigma(a)=2a-m$ となる.

齋藤之理さんは約数関 数 $\sigma(a)$ の代わりにオイラー関数 $\varphi(a)$ をもちいて完全数の一般化を次のように行った.

$X=p^e$ を使う.

$q=\dfrac{hpX-1}{\overline{p}}+m$ になるので

$p\varphi(a)=X\overline{p}(q-1)=hpX^2+(m\overline{p}-p)X.$

$a=Xq$ により, $\overline{p}a=(hpX-1+m\overline{p}p)X=hpX^2+(-1+m\overline{p}p)X.$

かくして X についての 2 次方程式が 2 つあり共通根があるとき係数の間の関係式が得られこれが齋藤の $\varphi(a)^2$ 完全数の定義式になる.

最も簡単な $p=2,m=0,h=1$ のとき $4\varphi(a)^2+\varphi(a)-4a\varphi(a)-a+a^2$ が定義式になる.

古典的完全数では未発見の奇数解がここでは 3 個でてくる点に注意.

平行移動 $m=-12$ のとき 解 $6p$ は出て来ないがエイリアン解 $304=2^4*19, 127744=2^8*499$ は大きな顔をして出ている (A 型解).

表 5: Saitou 完全数,$h=1,m=0,2,-12;p=2$

a	素因数分解				
$m=0$		$m=2$		$m=-12$	
3	3	10	$2*5$	15	$3*5$
6	$2*3$	136	2^3*17	24	2^3*3
21	$3*7$	32896	2^7*257	304	2^4*19
28	2^2*7			2535	$3*5*13^2$
465	$3*5*31$			127744	2^8*499
496	2^4*31				
8128	2^6*127				

参考文献

[1] 飯高 茂 『数学の研究をはじめよう (I),(II),(III),(IV),(V),(VI),(VII),(VIIII),』, 現代数学社 ,2016,2017,2018,2020,2021,2023.

[2] 飯高 茂 『1 文字完全数と小宇宙 (中)』, 現代数学 ,2023,9 月号.

[3] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[4] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[5] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1

φ^2 完全数

齋藤之理 (麻布中学 2 年)

2023 年 8 月

Abstract

This paper researches the fascinating realm of φ^2-perfect numbers, where φ denotes Euler's totient function, and p and q are prime numbers. Foucusing on the form $\alpha = p^e q$ where $q = \frac{p^{e+1}-1}{p-1}$, I made an extension of Euclidian perfect number, φ^2-perfect number with φ. I derive a defining equation for $\varphi(\alpha)$, leading to the expression:

$$p^2(\varphi(\alpha))^2 - (p-1)(2\alpha p - 1)\varphi(\alpha) + \alpha(\alpha - 1)(p-1)^2 = 0$$

The main theorem establishes a remarkable insight for φ^2-perfect numbers: the maximum exponent of any prime factor of α (excluding p) is always equal to 1. To demonstrate this result, I provide numerical examples and a general solution for $\varphi(\alpha)$ when α is expressed as $\alpha = \prod_{i=0}^{n} q_i^{e_i}$, with q_i being distinct primes and $e_0 > 1$.

Additionally, the study expands to cases where h and m differ, revealing diverse families of φ^2-perfect numbers exhibiting intriguing patterns. I explore the connection between φ^2-perfect numbers and Mersenne primes, Fermat primes, and other special primes.

Moreover, I venture into investigating σ^2-perfect numbers, defined using the sum of divisors function σ. This exploration leads us to present various properties of σ^2-perfect numbers and explore their relation to classical perfect numbers. Details on the definition formula and these properties can be found in the appendix.

In conclusion, this paper uncovers novel insights into the properties of φ^2-perfect numbers, contributing significantly to the broader understanding of perfect numbers in number theory. Furthermore, the findings pave the way for further exploration and investigation into perfect numbers and related topics, enriching the field of number theory with fresh perspectives.

1 概要

この論文では、p, q はともに素数、σ は約数の和を表す関数、φ はオイラーのトーシェント関数とする。整数 α が σ を使って、$\sigma(\alpha) = 2\alpha$ の時、$\alpha = 2^e q \ \ (q = 2^{e+1} - 1)$ となり[1]、ユーグリッド完全数[2]というのであった。

[1]奇数の不存在は長年の予想、偶数の場合についてのみ考える。オイラーが証明した
[2]いわゆる完全数。ここでは区別のためこう呼ぶ。

なので、整数 $\alpha = 2^e q \quad (q = 2^{e+1} - 1)$ をもとに φ を使って、完全数を定義してみる。すると、2 次式で、

$$4\varphi(\alpha)^2 + \varphi(\alpha) - 4\alpha\varphi(\alpha) - \alpha + \alpha^2 = 0$$

とかける。
また、$\alpha = p^e q \quad (q = \frac{p^{e+1}-1}{p-1})$ に拡張して、

$$p^2(\varphi(\alpha))^2 - (p-1)(2\alpha p - 1)\varphi(\alpha) + \alpha(\alpha-1)(p-1)^2 = 0$$

となる。

2 $\alpha = p^e q(q = \frac{p^{e+1}-1}{p-1})$ の φ による定義式

$\alpha = p^e q = p^e(\frac{p^{e+1}-1}{p-1})$(ただし、$q$ は素数) とする。

$$\alpha = p^e\left(\frac{p^{e+1}-1}{p-1}\right)$$
$$\alpha(p-1) = p^e(p^{e+1}-1)$$

ここで、p^e を X と置いて、

$$\alpha(p-1) = X(p \cdot X - 1)$$

この中の X を $\varphi(\alpha)$ を用いて消去することを考える。

$$\varphi(\alpha) = \varphi(p^e)\varphi(q)$$
$$\varphi(\alpha) = (p-1)p^{e-1}\left(\frac{p^{e+1}-1}{p-1} - 1\right)$$
$$\varphi(\alpha) = p^{2e} - p^e$$

ここで、p^e を X と置いて、

$$X^2 - X - \varphi(\alpha) = 0$$

二次方程式の解の公式より、

$$X = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \{-\varphi(\alpha)\}}}{2 \cdot 1}$$

$X > 0$ と $\sqrt{4\varphi(\alpha)+1} > 1$ に注意すると、

$$X = \frac{\sqrt{4\varphi(\alpha)+1} + 1}{2}$$

$\alpha(p-1)=X(p\cdot X-1)$ に $X=\frac{\sqrt{4\varphi(\alpha)+1}+1}{2}$ を代入し、

$$\begin{aligned}\alpha(p-1)&=\frac{\sqrt{4\varphi(\alpha)+1}+1}{2}\left(p\cdot\frac{\sqrt{4\varphi(\alpha)+1}+1}{2}-1\right)\\4\alpha(p-1)&=(\sqrt{4\varphi(\alpha)+1}+1)(p\sqrt{4\varphi(\alpha)+1}+p-2)\\4\alpha(p-1)&=(2p-2)\sqrt{4\varphi(\alpha)+1}+4p\varphi(\alpha)+2p-2\\(p-1)\sqrt{4\varphi(\alpha)+1}&=2\alpha(p-1)-2p\varphi(\alpha)-(p-1)\end{aligned}$$

両辺を二乗して、$\varphi(\alpha)$ の次数ごとに整理すると、

$$p^2\{\varphi(\alpha)\}^2-(p-1)(2\alpha p-1)\varphi(\alpha)+\alpha(\alpha-1)(p-1)^2=0$$

これを定義式とする。

3 数値例

Table 1: φ 完全数

p	α	α の素因数分解	解の形
2	3	3	$q=p^2-p+1$
2	6	$2*3$	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
3	7	7	$q=p^2-p+1$
2	21	$3*7$	qr
2	28	2^2*7	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
7	43	43	$q=p^2-p+1$
3	117	3^2*13	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
13	157	157	$q=p^2-p+1$
2	465	$3*5*31$	qrs
2	496	2^4*31	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
5	775	5^2*31	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
2	8128	2^6*127	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
17	88723	17^2*307	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
3	796797	3^6*1093	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
7	6725201	7^4*2801	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$
2	33550336	$2^{12}*8191$	$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$

上のように、解は定義通りの $p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$、素数、その他に分けられる。
素数解については次章で、$p^eq\ \ q=\sigma(p^e)$ は 5 で、その他はその後に述べる。

4　α が素数の場合

解になるためには、$p^2(\varphi(\alpha))^2-(p-1)(2\alpha p-1)\varphi(\alpha)+\alpha(\alpha-1)(p-1)^2=0$ になれば良い。

$$\begin{aligned} p^2\{\varphi(\alpha)\}^2-(p-1)(2\alpha p-1)\varphi(\alpha)+\alpha(\alpha-1)(p-1)^2=0 \\ p^2(\alpha-1)^2-(p-1)(2\alpha p-1)(\alpha-1)+\alpha(\alpha-1)(p-1)^2=0 \\ (\alpha-1)(\alpha-p^2+p-1)=0 \end{aligned}$$

α は 1 ではないから、$\alpha-p^2+p-1=0$、よって、$\alpha=p^2-p+1$。実はこの解には、p が大きい場合に大量の解がある。ここにその一部を載せる。

p	α	p	α	p	α	p	α
2	3	991	981091	2113	4462657	3919	15354643
3	7	1021	1041421	2137	4564633	4003	16020007
7	43	1093	1193557	2143	4590307	4057	16455193
13	157	1117	1246573	2239	5010883	4111	16896211
67	4423	1201	1441201	2281	5200681	4159	17293123
79	6163	1231	1514131	2557	6535693	4327	18718603
139	19183	1381	1905781	2647	7003963	4447	19771363
151	22651	1423	2023507	2659	7067623	4507	20308543
163	26407	1549	2397853	2683	7195807	4561	20798161
193	37057	1567	2453923	2689	7228033	4813	23160157
337	113233	1597	2548813	2731	7455631	5011	25105111
349	121453	1621	2626021	3049	9293353	5179	26816863
379	143263	1693	2864557	3271	10696171	5209	27128473
457	208393	1747	3050263	3331	11092231	5527	30542203
541	292141	1789	3198733	3511	12323611	5641	31815241
613	375157	1801	3241801	3541	12535141	5749	33045253
643	412807	1933	3734557	3607	13006843	5779	33391063
727	527803	1987	3946183	3733	13931557	5839	34088083
769	590593	2011	4042111	3847	14795563	–	–
919	843643	2017	4066273	3889	15120433	–	–

5　α が p^eL として表される場合

p と L を互いに素とし、$\alpha = p^eL$ とする。

$$p^2(\varphi(\alpha))^2 + \alpha(\alpha-1)(p-1)^2 - (p-1)(2\alpha p-1)\varphi(\alpha) = 0$$

$\alpha = p^eL$ および $\varphi(p^eL) = (p-1)p^{e-1}\varphi(L)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
p^{2e}\varphi(L)^2(p-1)^2 + p^eL(p^eL-1)(p-1)^2 - (p-1)^2(2p^eLp-1)p^{e-1}\varphi(L) &= 0 \\
p^{2e}\varphi(L)^2 + p^eL(p^eL-1) - (2p^eLp-1)p^{e-1}\varphi(L) &= 0 \\
p^{e+1}\varphi(L)^2 - \varphi(L)(2p^{e+1}L-1) + pL(p^eL-1) &= 0
\end{aligned}$$

$\varphi(L)$ について、2 次方程式の解を用いると、

$$\begin{aligned}
\varphi(L) &= \frac{2p^{e+1}L - 1 \pm \sqrt{4Lp^{e+1}(p-1)+1}}{2p^{e+1}} \\
\varphi(L) &= L \pm \frac{\sqrt{4Lp^{e+1}(p-1)+1} \mp 1}{2p^{e+1}} \\
\varphi(L) &= L - \frac{\sqrt{4Lp^{e+1}(p-1)+1} + 1}{2p^{e+1}}
\end{aligned}$$

ここで、あまり有名ではないが、一般的に用いられる $co\varphi(n) = n - \varphi(n)$ を導入する。

$$co\varphi(L) = \frac{\sqrt{4Lp^{e+1}(p-1)+1} + 1}{2p^{e+1}}$$

$$\begin{aligned}
2p^{e+1}co\varphi(L) - 1 &= \sqrt{4Lp^{e+1}(p-1)+1} \\
4p^{2e+2}co\varphi(L)^2 - 4p^{e+1}co\varphi(L) + 1 &= 4Lp^{e+1}(p-1) + 1 \\
4p^{2e+2}co\varphi(L)^2 - 4p^{e+1}co\varphi(L) &= 4Lp^{e+1}(p-1) \\
p^{e+1}co\varphi(L)^2 - co\varphi(L) &= L(p-1) \\
co\varphi(L)(p^{e+1}co\varphi(L) - 1) &= L(p-1)
\end{aligned}$$

5.1　もし L が素数の冪である場合

L が素数の冪、q^f である場合、$co\varphi(L) = q^{f-1}$ となる。

$$q^{f-1}(p^{e+1}q^{f-1} - 1) = q^f(p-1)$$

$$p^{e+1}q^{f-1} - 1 = q(p-1)$$

ここで、　$\bmod q$ で考えると、

$$p^{e+1}q^{f-1} \equiv 1 \mod q$$

q^{f-1} と q は互いに素なので、$q^{f-1}=1$ となる。この時、$f=1$ と分かる。

$$p^{e+1}-1=q(p-1)$$
$$q=\frac{p^{e+1}-1}{p-1}$$

この形は定義で想定した形になる。

5.2 一般の L について

L を $\Pi_{i=0}^{n} q_i{}^{e_i}$ と表す。ただし、$q_i > q_j (i<j)$ および $e_0 > 1$ とする。$\Pi_{i=0}^{n}$ の代わりに Π と書くことにする。

$$\begin{aligned} co\varphi(L) &= \Pi q_i{}^{e_i} - \Pi\{(q_i-1)q_i{}^{e_i-1}\} \\ &= \Pi q_i{}^{e_i-1}\{\Pi q_i - \Pi(q_i-1)\} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \Pi q_i{}^{e_i-1}\{\Pi q_i - \Pi(q-1)\}(p^{e+1}\Pi q_i{}^{e_i-1}\{\Pi q_i - \Pi(q_i-1)\}-1) &= \Pi q_i{}^{e_i}(p-1) \\ \{\Pi q_i - \Pi(q_i-1)\}(p^{e+1}\Pi q_i{}^{e_i-1}\{\Pi q_i - \Pi(q_i-1)\}-1) &= \Pi q_i(p-1) \end{aligned}$$

q_0 で考えると、

$$\begin{aligned} \{-\Pi(q_i-1)\}(-1) &\equiv 0 \mod q_0 \\ \Pi(q_i-1) &\equiv 0 \mod q_0 \end{aligned}$$

q_0 が素数であるため、$q_a - 1 \equiv 0 \mod q_0$ を満たす a が存在する。

$$\begin{aligned} q_a - 1 &\equiv 0 \mod q_0 \\ q_a &\equiv 1 \mod q_0 \end{aligned}$$

$q_0 > q_a$ かつ $q_a \equiv 1 \mod q_0$ であるため、$q_a = 1$ となる。しかしそれは $q_i (0 \leq i \leq n)$ が素数であることに矛盾する。よって、$e_0 = 1$ であり、φ^2 完全数の p を除く最大の素因数の次数は 1 であることが示された。

6 $\varphi(\alpha)$ について解く

$\varphi(\alpha)$ の二次方程式を用いると、以下のようになる。

$$2p^2\varphi(\alpha) = (p-1)\{2p\alpha - 1 \pm \sqrt{4p\alpha(p-1)+1}\}$$

ここから、$(p-1) \mid \varphi(\alpha)$ および

$$\mp(p-1)\sqrt{4p\alpha(p-1)+1} = 2p(p-1)\alpha - (p-1) - 2p^2\varphi(\alpha)$$

$(p-1) \mid \varphi(\alpha)$ であるとすると、整数関数 $\varphi'(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{p-1}$ を導入する。

$$\mp\sqrt{4p\alpha(p-1)+1} = 2p\alpha - 1 - 2p^2\varphi'(\alpha)$$

となる。$n=\alpha-p\varphi'(\alpha)$ とする。すると、$(p-1)n=\alpha(p-1)-p\varphi(\alpha)$ も成立する。

$$
\begin{aligned}
\mp\sqrt{4p\alpha(p-1)+1} &= 2pn-1 \\
4p\alpha(p-1)+1 &= (2pn-1)^2 \\
4p\alpha(p-1)+1 &= 4p^2n^2-4pn+1 \\
\alpha(p-1) &= pn^2-n \\
\alpha &= \frac{n(pn-1)}{p-1}
\end{aligned}
$$

これを $(p-1)n=\alpha(p-1)-p\varphi(\alpha)$ に代入すると、

$$(p-1)n=n(pn-1)-p\varphi\left\{\frac{n(pn-1)}{p-1}\right\}$$

6.1 p=2 の場合

p=2 なら、

$$n=n(2n-1)-2\varphi\{n(2n-1)\}$$

よって、

$$\varphi\{n(2n-1)\}=n(n-1)$$

また、

$$\alpha=n(2n-1)$$

6.1.1 n が正の数の場合

ここで、n と $2n-1$ は互いに素なので、

$$\varphi\{n(2n-1)\}=n(n-1)$$

$$\varphi(n)\varphi(2n-1)=n(n-1)$$

ここで、n が偶数でかつ 2 の累乗ではないとすると、$n=2^eL(L>1)$ と置けて、

$$
\begin{aligned}
\varphi(n)\varphi(2n-1) &= n(n-1) \\
\varphi(2^eL)\varphi(2n-1) &= 2^eL(n-1) \\
2^{e-1}\varphi(L)\varphi(2n-1) &= 2^eL(n-1) \\
\varphi(2n-1) &= \frac{2L(n-1)}{\varphi(L)}
\end{aligned}
$$

$L>1$ だから、$\varphi(L)<L$ となり、

$$
\begin{aligned}
\varphi(2n-1) &> \frac{2L(n-1)}{L} \\
\varphi(2n-1) &> 2n-2
\end{aligned}
$$

となって、矛盾が生じる。よって n は奇数か 2 の累乗。

n が 2 の累乗の時、2^e と書けて、

$$\varphi(2^e)\varphi(2^{e+1}-1) = 2^e(2^e-1)$$

$$2^{e-1}\varphi(2^{e+1}-1) = 2^e(2^e-1)$$

$$\varphi(2^{e+1}-1) = (2^{e+1}-1)-1$$

$2^{e+1}-1$ が素数になり、その時の $\alpha = n(2n-1) = 2^e(2^{e+1}-1)$ が解となる。これは、偶数のユーグリッド完全数の形であり、すべての偶数のユーグリッド完全数は φ^2 完全数であると分かる。

6.1.2 n が負の数の場合

$m = -n$ とおく。α は、

$$\alpha = -m(-2m-1) = m(2m+1)$$

であり、

$$\varphi\{-m(-2m-1)\} = -m(-m-1)$$

$$\varphi\{m(2m+1)\} = m(m+1)$$

ここで、m と $2m+1$ は互いに素なので、

$$\varphi(m)\varphi(2m+1) = m(m+1)$$

ここで、m が偶数であるとすると、$m = 2^e L$

$$\begin{aligned}
\varphi(m)\varphi(2m+1) &= m(m+1) \\
\varphi(2^e L)\varphi(2m+1) &= 2^e L(m+1) \\
2^{e-1}\varphi(L)\varphi(2m+1) &= 2^e L(m+1) \\
\varphi(2m+1) &= \frac{2L(m+1)}{\varphi(L)} \\
\varphi(2m+1) &\geq \frac{2L(m+1)}{L} \\
\varphi(2m+1) &\geq 2m+2
\end{aligned}$$

となって、矛盾が生じる。よって m は奇数。

もし、$2m+1$ がメルセンヌ素数なら、$2m+1 = 2^{e+1}-1$、$m = 2^e-1$ と置けて、

$$\varphi(m)2m = m(m+1)$$

$$2\varphi(m) = m+1$$

$$2\varphi(2^e-1) = 2^e$$

$$\varphi(2^e-1)=2^{e-1}$$

この時、m を $\Pi_{i=0}^{n} {q_i}^{e_i}$ と表す。ただし、$q_i > q_j (i < j)$ および $e_0 > 1$ とする。$\Pi_{i=0}^{n}$ の代わりに Π と書くことにする。

$$\varphi(m)=\varphi(\Pi {q_i}^{e_i})=\varphi(\Pi {q_i}^{e_i})=\Pi\varphi({q_i}^{e_i})=\Pi\{(q_i-1){q_i}^{e_i-1}\}$$

すると、全ての q_i-1 と ${q_i}^{e_i-1}$ が 2 の累乗になるため、q_i は、2^f+1 の形になり、${q_i}^{e_i-1}$ は 1 になるので、e_i は全て 1 となる。よって、この場合、$m=2^e-1$ は全てフェルマ素数の積になることが分かる。
例えば、$m=2^e-1$ の場合、この形を満たす場合がいくつかあり、α は $m(2m+1)=(2^e-1)(2^{e+1}-1)$ となる。この形の解はエイリアン解として解になる。例えば、

$$\alpha=3*7 \quad (e=2)$$

$$\alpha=3*5*31 \quad (e=4)$$

$$\alpha=3*5*17*257*131071 \quad (e=16)$$

などの例がある。先ほど示したように、ここに出てくる素数は全て 2^f+1 の形もしくは、$m=2^e-1$ そのものであり、指数は 1 である。

7 $\alpha = p^e q\ (q = \frac{hp^{e+1}-1}{p-1} + m)$ の φ による定義式

$\alpha = p^e q = p^e(\frac{hp^{e+1}-1}{p-1} + m)$ とする。(ただし、$q = \frac{hp^{e+1}-1}{p-1} + m$ で素数) α について、

$$\alpha(p-1) = p^e q(p-1)$$
$$\alpha(p-1) = p^e(hp \cdot p^e - 1 + mp - m - 1)$$

ここで、$X = p^e, Z = mp - m - 1$ と置く。

$$\alpha(p-1) = X(hpX + Z)$$

$$hpX^2 + ZX = \alpha(p-1)$$

また、$\varphi(\alpha)$ について、

$$p\varphi(\alpha) = p\varphi(p^e)\varphi(q)$$
$$p\varphi(\alpha) = p^e(hp \cdot p + mp - m - p)$$

ここで、$X = p^e, Y = mp - m - p$ と置く。

$$p\varphi(\alpha) = X(hpX + Y)$$

$$hpX^2 + YX = p\varphi(\alpha)$$

以上より、

$$\begin{cases} hpX^2 + ZX = \alpha(p-1) \\ hpX^2 + YX = p\varphi(\alpha) \end{cases}$$

が示された。よって、

$$X(Z - Y) = \alpha(p-1) - p\varphi(\alpha)$$

$Z - Y = (mp - m - 1) - (mp - m - p) = p - 1$ である。X は、$hpX^2 + YX = p\varphi(\alpha)$ を解くと、

$$X = \frac{-Y + \sqrt{Y^2 + 4hp^2\varphi(\alpha)}}{2hp}$$

となる。以上を代入して、

$$\alpha(p-1) - p\varphi(\alpha) = (p-1)\frac{(-Y + \sqrt{Y^2 + (4hp^2\varphi(\alpha))})}{2hp}$$
$$2hp(\alpha(p-1) - p\varphi(\alpha)) = (-Y + \sqrt{Y^2 + (4hp^2\varphi(\alpha))})(p-1)$$
$$Y(p-1) + 2hp(\alpha(p-1) - p\varphi(\alpha)) = \sqrt{Y^2 + (4hp^2\varphi(\alpha))}(p-1)$$

二乗して、$Y = mp - m - p$ を代入して、整理し、全体を $4hp$ で割る。
以下の定義式を得る。

$$hp^3\{\varphi(\alpha)\}^2 + \alpha^2 hp(p-1)^2 - 2\alpha hp^2(p-1)\varphi(\alpha) - p(p-1)(mp-m-1)\varphi(\alpha) + \alpha(p-1)^2(mp-m-p) = 0$$

h=1,m=0 なら、

$$\alpha^2 p(p-1)^2 - 2\alpha p^2(p-1)\varphi(\alpha) - \alpha p(p-1)^2 + p^3(\varphi(\alpha))^2 + p(p-1)\varphi(\alpha) = 0$$

つまり、

$$\alpha(\alpha-1)(p-1)^2 - (2\alpha p-1)(p-1)\varphi(\alpha) + p^2(\varphi(\alpha))^2 = 0$$

となり、拡張を入れない $h=1, m=0$ の定義式になる。

8　数値例

Table 2: 解の例

p	h	m	alpha	factor	p	h	m	alpha	factor
2	1	-4	75	$3*5^2$	3	1	-3	55	$5*11$
2	1	0	3	3	3	1	0	7	7
2	1	0	21	$3*7$	3	1	3	4	2^2
2	1	0	465	$3*5*31$	3	1	3	25	5^2
2	1	2	1	1	3	1	3	875	5^3*7
2	1	4	9	3^2	3	2	0	1	1
2	1	4	135	3^3*5	3	2	3	2	2
2	1	4	495	3^2*5*11	3	2	3	7	7
2	2	-2	45	3^2*5	5	1	-5	1127	7^2*23
2	2	2	3	3	5	2	-5	27	3^3
2	2	4	1	1	5	2	-5	49	7^2
3	1	-3	5	5	7	1	0	43	43
3	1	-3	10	$2*5$	7	2	0	9	3^2

9　$\alpha = p^e q$ として考察

定義式、

$$hp^3\{\varphi(\alpha)\}^2 + \alpha^2 hp(p-1)^2 - 2\alpha hp^2(p-1)\varphi(\alpha) - p(p-1)(mp-m-1)\varphi(\alpha) + \alpha(p-1)^2(mp-m-p) = 0$$

において、p, q を互いに素として、$\alpha = p^e q$ また、$\varphi(\alpha) = (p-1)p^{e-1}(q-1)$ と置く。共通部分を括り出すと、

$$-p^e(p-1)^2(-hpp^e - mp + m + pq - q + 1) = 0$$

p^e や $(p-1)^2$ が 0 になることはないから、

$$hpp^e + mp - m - pq + q - 1 = 0$$
$$hpp^e + mp - m + q(1-p) - 1 = 0$$

よって、

$$\begin{aligned} q &= \frac{hp^{e+1}+mp-m-1}{p-1} \\ &= \frac{hp^{e+1}-1}{p-1}+m \end{aligned}$$

となる。

References

[1] 飯高茂,『0 から始める完全数入門』 現代数学社

[2] 飯高茂,『完全数の一般化について』 日本数学学会 2022 秋季総合分科会代数学 55

A　附録 σ^2 完全数

この附録では、φ^2 完全数と同じように、$\alpha = p^e q = p^e\left(\frac{p^{e+1}-1}{p-1}\right)$ の形の数が満たす数式を φ の代わりに、σ を使って考える。

A.1　$\alpha = p^e q(q = \frac{p^{e+1}-1}{p-1})$ の σ による定義式

$\alpha = p^e q(q = \frac{p^{e+1}-1}{p-1})(q = \frac{p^{e+1}-1}{p-1})$ とする。$\sigma(\alpha)$ を考えると、

$$\sigma(\alpha) = \sigma(p^e)\sigma(q)$$

q の定義を代入して分母の $p-1$ を払う。

$$(p-1)^2\sigma(\alpha) = (p^{e+1}-1)(p^{e+1}+p-2) \tag{1}$$

$\alpha = p^e q(q = \frac{p^{e+1}-1}{p-1})$ に、$(p-1)$ をかけて分母を払い、 φ^2 完全数と同様に、p^e の多項式として整理する。

$$p(p^e)^2 - (p^e) - (p-1)\alpha = 0$$

p^e の二次方程式として解の公式を用いて

$$p^e = \frac{1+\sqrt{1+4p(p-1)\alpha}}{2p}$$

(1) に代入して、分母の 4 をを払う。

$$4(p-1)^2\sigma(\alpha) = (\sqrt{1+4p(p-1)\alpha}-1)(\sqrt{1+4p(p-1)\alpha}+2p-3)$$

展開して平方根を含む項と含まない項に分ける。

$$(p-2)\sqrt{1+4p(p-1)\alpha} = 2(p-1)^2\sigma(\alpha) - 2p(p-1)\alpha + (p-2)$$

平方根を外して展開し、

$$4(p-1)^2((p-1)\sigma(\alpha)-p\alpha)^2+4(p-1)((p-1)\sigma(\alpha)-p\alpha)(p-2)+(p-2)^2 = 4p(p-2)^2(p-1)\alpha+(p-2)^2$$

さらに、$(p-2)^2$ 両辺から引いて、$4(p-1)$ で割りまとめると、定義式

$$\{(p-1)\sigma(\alpha) - p\alpha\}^2 = (p-2)\{p\alpha - \sigma(\alpha)\}$$

を得る。

A.2 数値例

p	α	factor
2	6	$2*3$
2	28	2^2*7
2	496	2^4*31
2	8128	2^6*127
3	5	5
3	26	$2*13$
3	51	$3*17$
3	117	3^2*13
3	477	3^2*53
5	19	19
5	775	5^2*31
7	41	41
7	2051	$7*293$

A.3 考察

A.3.1 $\alpha = p^e q$ の場合

定義式

$$\{(p-1)\sigma(\alpha) - p\alpha\}^2 = (p-2)\{p\alpha - \sigma(\alpha)\}$$

は、q を任意の p でない素数として α が $p^e q$ とかける場合、

$$\{(p-1)\sigma(p^e q) - p\cdot p^e q\}^2 = (p-2)\{p\cdot p^e q - \sigma(p^e q)\}$$

p と q が互いに素だから、$\sigma(\alpha) = \sigma(p^e)\sigma(q) = \frac{p^{e+1}-1}{p-1}(q+1)$ となる。これを使って、

$$\{(p^{e+1}-1)(q+1) - p^{e+1}q\}^2 = (p-2)\left\{p^{e+1}q - \frac{(p^{e+1}-1)(q+1)}{p-1}\right\}$$

$(p-1)$ をかけて、展開して因数分解すると、

$$\{(p-1)q - (p^{e+1}-1)\}[q - \{(p-1)(p^{e+1}-1) + (p-2)\}] = 0$$

よって、$q = \sigma(p^e)$ 又は $q = (p-1)p^{e+1} - 1$ となる。

A.3.2　α が素数の場合

定義式

$$\{(p-1)\sigma(\alpha)-p\alpha\}^2=(p-2)\{p\alpha-\sigma(\alpha)\}$$

において、α を p でない素数とすると、$\sigma(\alpha)=\alpha+1$ だから

$$\{(p-1)(\alpha+1)-p\alpha\}^2=(p-2)\{p\alpha-(\alpha+1)\}$$

因数分解すると、

$$(\alpha-1)(\alpha+1+p-p^2)=0$$

$\alpha=1$ の時 α は素数でないから、

$$\alpha=p^2-p-1$$

となる。

A.3.3　$\sigma(\alpha)=p\alpha$ の時

定義式、

$$\{(p-1)\sigma(\alpha)-p\alpha\}^2=(p-2)\{p\alpha-\sigma(\alpha)\}$$

に $\sigma(\alpha)=p\alpha$ を代入して、

$$\begin{aligned}
\{(p-1)p\alpha-p\alpha\}^2&=(p-2)\{p\alpha-\sigma(\alpha)\}\\
\{(p-1)p\alpha-p\alpha\}^2&=(p-2)\{p\alpha-p\alpha\}\\
\{(p-1)p\alpha-p\alpha\}^2&=0\\
(p-1)p\alpha-p\alpha&=0\\
(p-2)p\alpha&=0
\end{aligned}$$

$p=0$ または $\alpha=0$ でないので、$p-2=0$ つまり、$p=2$。

A.3.4　$\sigma(\alpha)=q\alpha$ の時

定義式、

$$((p-1)\sigma(\alpha)-p\alpha)^2=(p-2)(p\alpha-\sigma(\alpha)$$

に $\sigma(\alpha)=p\alpha$ を代入して、

$$\begin{aligned}
((p-1)q\alpha-p\alpha)^2&=(p-2)(p\alpha-\sigma(\alpha))\\
((p-1)q\alpha-p\alpha)^2&=(p-2)(p\alpha-q\alpha)\\
((p-1)q-p)^2\alpha^2&=(p-2)(p-q)\alpha\\
((p-1)q-p)^2\alpha&=(p-2)(p-q)\\
\alpha&=\frac{(p-2)(p-q)}{((p-1)q-p)^2}\\
&=\frac{(p-2)(p-q)}{(pq-q-p)^2}
\end{aligned}$$

となる。

交代完全数の研究

澤田晴丈（津山高専４年），岡崎莉輝斗（津山高専４年），
松田修（津山高専）

完全数

n：自然数，$d_1 < d_2 < \cdots < d_r \neq n$： nの正の真の約数とする．

$$n = d_1 + d_2 + \cdots + d_r$$

を満たすとき， nを完全数という．

たとえば，6 and 28 は完全数である．

$$6=1+2+3, \quad 28=1+2+4+7+14$$

ユークリッド･オイラーの定理

偶数の完全数は，　$2^{p-1}(2^p-1)$ の形に限る.
ここで, 2^p-1 はメルセンヌ素数である.

交代完全数の研究について

本研究は，３，４年生の選択科目「全系横断演習」において行った．

$\tau_k(n)$の定義

n：自然数，$1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_r \neq n$： nの正の真の約数とする．
そして，

$$\tau_k(n) := u_0 d_0 + u_1 d_1 + u_2 d_2 + \cdots + u_r d_r$$

ただし

$$u_j = \begin{cases} -1 & (j \equiv k \ \ mod\ k+1) \\ \ \ 1 & (j \not\equiv k \ \ mod\ k+1) \end{cases}$$

とする．

(k,p) 交代完全数について

n,p：自然数とする． nが

$$n = p \cdot \tau_k(n)$$

を満たすとき，nを(k,p)**交代完全数**という．

たとえば,

6 は (1,3) 交代完全数：6=(1−2+3)×3

105は (2,3) 交代完全数：105=3× (1+3ー5+7+15ー21+35)

$(1,p)$ 交代完全数について

（定義の復習）

n,p：自然数，$d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_r \neq n$

$$n = p \cdot \tau_1(n) = p \cdot \{d_0 - d_1 + d_2 - \cdots + (-1)^{r-1} d_r\}$$

たとえば，

6 は (1,3) 交代完全数：6= 3 ×(1−2+3)

1 5 は (1,5) 交代完全数： 15=5 × (1−3+5)

(1,3) 交代完全数の調査結果

(1,3) 交代完全数のリスト

3,6,12,24,48,60,96,180,192,300,384,540,768,924,1500,
1512,1536,1620,3072,4104,4860, …

分類

Type1	$3,6,12,24,48,96,192,384,768,1536,3072,\cdots,\ 3\cdot 2^{n-1}$
Type2	$60,180,540,1620,4860\,,\cdots,60\cdot 3^{n-1}$
Type3	$300,1500,\cdots,300\cdot 5^{n-1}$
others	$924,1512,4104,\cdots,?$

定理1

n を自然数とする．このとき，

$$3 \cdot 2^{n-1}, \quad 60 \cdot 3^{n-1}, \quad 300 \cdot 5^{n-1}$$

は，いずれも (1,3)交代完全数である．

研究課題

$3 \cdot 2^{n-1}$，$60 \cdot 3^{n-1}$，$300 \cdot 5^{n-1}$以外の(1,3) 交代完全数はどのようなものか？

定理1の証明（その1）

$3 \cdot 2^{n-1}$が$(1,3)$ 交代完全数であることの証明.

$3 \cdot 2^{n-1}$の真の約数の交代和は,

$$\begin{aligned}\tau_1(3 \cdot 2^{n-1}) &= 1 - 2 + 3 - 2^2 + (2 \cdot 3) - 2^3 + \cdots - 2^{n-1} + (2^{n-2} \cdot 3) \\ &= \{1 + 3 + (2 \cdot 3) + \cdots + (2^{n-2} \cdot 3)\} - \{1 + 3(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2})\} \\ &= 1 + 3(2^{n-1} - 1) - (2^n - 2) = 2^{n-1}\end{aligned}$$

よって，$3 \cdot 2^{n-1} = 3\tau_1(3 \cdot 2^{n-1})$

したがって，$3 \cdot 2^{n-1}$が$(1,3)$ 交代完全数である.

補題１．$n \geq 4$のとき，$a_n = 3^n \cdot 20$と $a_{n-1} = 3^{n-1} \cdot 20$の約数は，$a_{n-3} = 3^{n-3} \cdot 20$まで同じである．

証明．a_nとa_{n-1}の約数の中にa_{n-3}の約数が全て含まれることは明らかである．しかし，a_nの約数である3^nは，$a_{n-3} < 3^n$であるがa_{n-1}の約数ではない．よって，示された．

補題２． $n \geq 3$のときの $a_n = 3^n \cdot 20$の約数について $a_{n-3} = 3^{n-3} \cdot 20$までの約数の交代和は$-3^{n-1}$である．

証明． $n = 3$のとき，a_3の約数について$a_0 = 20$までの約数の交代和τは

$$\tau = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 9 - 10 + 12 - 15 + 18 - 20 = -9 = -3^2$$

であるので成り立つ．$n \geq 4$のとき，$n = k - 1$まで成り立つと仮定する．

すなわち$a_{k-4} = 3^{k-4} \cdot 20$までの約数の交代和は$-3^{k-2}$であるとする．

a_kの$a_{k-3} = 3^{k-3} \cdot 20$までの交代和$\tau$を考える．$\tau_1$を$a_{k-4}$までの交代和とすると$\tau_1 = -3^{k-1}$である．約数で$a_k$の約数で$a_{k-4}$以降の約数の交代和を$\tau_2$とすると，

$$\tau_2 = 3^k - 2 \cdot 5 \cdot 3^{k-2} + 2^2 \cdot 3^{k-1} - 5 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^k - 2^2 \cdot 5 \cdot 3^{k-2}$$
$$= 3^k(1 + 2) + 3^{k-1}(2^2 - 5) - 3^{k-2}(2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5) = 3 \cdot 3^k - 3^{k-1} - 30 \cdot 3^{k-2} \quad = -2 \cdot 3^{k-1}$$

よって，$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -3^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1} = -3^k$．したがって，数学的帰納法により成り立つ．

定理1の証明（その2）

$60\cdot 3^{n-1}$が$(1,3)$ 交代完全数であることの証明.

① 60と$60\cdot 3$と$60\cdot 3^2$が $(1,3)$ 交代完全数であることは実際の計算からわかる.

② $n\geq 4$とする．補題2より，$60\cdot 3^{n-1}$の約数の$60\cdot 3^{n-3}$までの交代和τ_1は-3^{n-1}である．したがって，$60\cdot 3^{n-1}$の$60\cdot 3^{n-3}$以後の真の約数の交代和τ_2は

$$\tau_2 = 3^n - 2\cdot 5\cdot 3^{n-2} + 2^2\cdot 3^{n-1} - 5\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^n - 2^2\cdot 5\cdot 3^{n-2} + 2\cdot 5\cdot 3^{n-1}$$
$$-2^2\cdot 3^n + 5\cdot 3^n - 2^2\cdot 5\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 5\cdot 3^n$$
$$= 3^n(1+2-2^2+5+2\cdot 5) + 3^{n-1}(2^2-5+2\cdot 5-2^2\cdot 5)$$
$$-3^{n-2}(2\cdot 5+2^2\cdot 5)$$
$$= 14\cdot 3^n - 11\cdot 3^{n-1} - 30\cdot 3^{n-2} \quad = 21\cdot 3^{n-1}$$

よって，$60\cdot 3^{n-1}$の真の約数の交代和$\tau_1(60\cdot 3^{n-1})$は

$$\tau_1(60\cdot 3^{n-1}) = \tau_1 + \tau_2 = -3^{n-1} + 21\cdot 3^{n-1} = 20\cdot 3^{n-1}$$

よって，$60\cdot 3^{n-1} = 3\cdot \tau_1(60\cdot 3^{n-1})$が成り立つので，$60\cdot 3^{n-1}$は$(1,3)$交代完全数である.

(1,3) 交代完全数の母関数

$$\frac{3}{2x+1} = 3 - 6x + 12x^2 - 24x^3 + 48x^4 - 96x^5 + \cdots$$

$$\frac{60}{3x+1} = 60 - 180x + 540x^2 - 1620x^3 + 4860x^4 - 14580x^5 + \cdots$$

$$\frac{300}{5x+1} = 300 - 1500x + 7500x^2 - 37500x^3 + \cdots$$

(1,5)交代完全数の調査結果

(1,5) 交代完全数のリスト

$5, 15, 45, 135, 315, 405, 495, 1215, 2205, 3645, 5445, 10935, 15435,$
$32805, 59895, 108045, 658845, 98415, 295245, 885735, 2657205,$
7247295 $,7971615, \ldots$

分類

Type1	$5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3645, 10935, 32805, \cdots$, $5 \cdot 3^{n-1}$
Type2	$315,$ $2205, 15435, 108045$ $, 756315, 5294205,$ $\cdots, 315 \cdot 7^{n-1}$
Type3	$495,$ $5445,$ $59895,$ $658845, 7247295,$ $\cdots, 495 \cdot 11^{n-1}$
others	?

定理2

n を自然数とする．このとき，

$$5\cdot 3^{n-1},\quad 315\cdot 7^{n-1},\quad 495\cdot 11^{n-1}$$

は，いずれも (1,5) 交代完全数である．

研究課題

$5\cdot 3^{n-1}$，　$315\cdot 7^{n-1}$，$495\cdot 11^{n-1}$以外の(1,5) 交代完全数はどのようなものか？

定理3

p を素数，$a=\frac{p+1}{2}$も素数とする．このとき，

$$pa^{n-1}$$

は，$(1,p)$ 交代完全数である．

（証明）pa^{n-1}の約数は，$1,a,p,a^2,pa,\cdots,pa^{n-2},a^{n-1}$であり

$$\begin{aligned}\tau_1(pa^{n-1}) &= 1-a+p-a^2+pa-\cdots+pa^{n-2}-a^{n-1}\\ &= 1+\frac{u(a^{n-1}-1)}{a-1}-\frac{a(a^{n-1}-1)}{a-1}\\ &= 1+\frac{(2a-1)(a^{n-1}-1)}{a-1}-\frac{a(a^{n-1}-1)}{a-1}=a^{n-1}\end{aligned}$$

である．よって，pa^{n-1}は$(1,p)$交代完全数である．　□

$(2, p)$交代完全数について

（定義の復習）

n, p：自然数，$d_1 < d_2 < \cdots < d_r \neq n$： nの正の約数とする．

$$n = p \cdot \tau_2(n) = p \cdot \{u_0 d_0 + u_1 d_1 + u_2 d_2 + \cdots + u_r d_r\}$$

ここで

$$u_j = \begin{cases} -1 & (j \equiv 2 \; mod \; 3) \\ 1 & (j \not\equiv 2 \; mod \; 3) \end{cases}$$

たとえば,

105は(2,3) 交代完全数： 105=3× (1+3-5+7+15-21+35)

189は(2,3) 交代完全数： 189= 3 × (1+3-7+9+11-27+63)

(2,3)交代完全数の調査結果

$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 = 3 \times (1+3-5+7+15-21+35)$

$3^3 \cdot 7 = 189 = 3 \times (1+3-7+9+21-27+63)$

$3^3 \cdot 11 = 297 = 3 \times (1+3-9+11+27-33+99)$

$3 \cdot 11 \cdot 13 = 429 = 3 \times (1+3-11+13+33-39+143)$

$3 \cdot 17 \cdot 19 = 969 = 3 \times (1+3-17+19+51-57+323)$

$3 \cdot 29 \cdot 31 = 2697 = 3 \times (1+3-17+19+51-57+323)$

Note. $(5,7),(11,13),(17,19),(29,31)$は双子素数

定理4

$(p, p+2)$ を双子素数で，$p \neq 3$とする． このとき，
$3p(p+2)$ は (2,3)交代完全数である.

（証明）$3p(p+2)$の約数は，$1, 3, p, 3p, (p+2), 3(p+2), p(p+2)$であり

$$\tau_2\bigl(3p(p+2)\bigr) = 1 + 3 - p + (p+2) + 3p - 3(p+2) + p(p+2)$$
$$= p(p+2)$$

である． よって，$3p(p+2)$は(2,3)交代完全数である． □

研究課題

(2,3) 交代完全数は，$189, 297, 3p(p+2)$ 以外に存在するか？

$(k,1)$交代完全数について（$k \geq 1$）

（定義の復習）

n, p：自然数，$d_1 < d_2 < \cdots < d_r \neq n$： nの正の約数とする．

$$n = p \cdot \tau_k(n) = p \cdot \{u_0 d_0 + u_1 d_1 + u_2 d_2 + \cdots + u_r d_r\}$$

ここで

$$u_j = \begin{cases} -1 & (j \equiv k \; mod \; k+1) \\ 1 & (j \not\equiv 0 \; mod \; k+1) \end{cases}$$

たとえば,

6は(3,1) 交代完全数： 6= 1+2+3

40は(3,1) 交代完全数： 40= 1+2+4-5+8+10+20

(3,1)交代完全数の調査結果

(3,1) 交代完全数のリスト

6, 40, 42, 54, 66, 78, 102, 114, 138, 174, 186, 222, 246, 258, 282, 294, 318, 354, 366, 402, 426, 438, 474, 486, …

定理5

$p \geq 7$ を素数とする.このとき，$6p$ は (3,1) 交代完全数である.

（証明） $6p$の約数は$1,2,3,6,p,2p,3p$であり，

$$\tau_3(6p) = 1 + 2 + 3 - 6 + p + 2p + 3p = (1 + 2 + 3)p = 6p$$

よって， $6p$ は (3,1) 交代完全数である． □

(3,1)交代完全数のある部分列の特徴

(3,1) 交代完全数の部分列

42, 54, 66, 78, 102, 114, 138, 174, 186, 222, 246, 258,
282, 318, 354, 366, 402, 426, 438, 474, …

上の数列$\{a_n\}$は，d_iをa_nの真の約数で，$\sqrt{a_n} < d_i$とすると，

$$\sum_i d_i = a_n$$ という特徴をもつ．

たとえば，42の真の約数で$\sqrt{42} \sim 6.5$以上であるものの和は，$7 + 14 + 21 = 42$.

これを**$\sqrt{n}$完全数**と呼ぶことにする．

研究課題

$\sqrt{n}$完全数は(3,1)交代完全数か？

r+1個の約数をもつ完全数a_rから得られる $(r,1)$ 交代完全数

定理6

a_r を$r+1$個の約数をもつ完全数，$p \geq a_r$ を素数とする．
このとき，$a_r p$ は $(r,1)$交代完全数である．

（証明）$a_r p$の約数は，$1, d_1, \cdots, d_{r-1}, a_r, p, pd_1, \cdots, pd_{r-1}$

$$\tau_r(a_r p) = 1 + d_1 + \cdots + d_{r-1} - a_r + p + pd_1 + \cdots + pd_{r-1}$$
$$= (1 + d_1 + \cdots + d_{r-1})p = a_r p$$

よって，$a_r p$ は $(r,1)$ 交代完全数である．□

$r+1$個の約数をもつ$(u,1)$交代完全数a_rから得られる $(u,1)$ 交代完全数

定理7

$u+1$を$r+1$の約数とする．そして，a_r を$r+1$個の約数をもつ$(u,1)$完全数，さらに，$p>a_r$ を素数とする．
このとき，$a_r p$ は $(u,1)$交代完全数である．

（証明）$a_r p$の約数は，$1, d_1, \cdots, d_{r-1}, a_r, p, pd_1, \cdots, pd_{r-1}$で，
$u+1$は$r+1$の約数なので，$\tau_u(a_r)=a_r$である，よって，

$$\tau_u(a_r p)=\tau_u(a_r)-a_r+\tau_u(a_r)p=a_r p$$

したがって，$a_r p$ は $(u,1)$ 交代完全数である．□

$(u,1)$ 交代完全数の拡大定理

定理8

$a_r p$ は定理７から得られた $(u,1)$交代完全数とし，
$q > a_r p$ を素数とする.
このとき，$a_r pq$ は $(u,1)$交代完全数である.

（証明）$\tau_u(a_r p) = a_r p$より

$$\tau_u(a_r pq) = \tau_u(a_r p) - a_r p + \tau_u(a_r p)q = a_r pq$$

したがって，$a_r pq$ は $(u,1)$ 交代完全数である．□

油分け算と一次不定方程式

片山 真一 (徳島大学) フィボナッチ研究集会 (2023)

1　ダイハード３から

ダイハードは，ブルース・ウィルス主演のアクション映画で，１作目の大ヒットを受けてシリーズ化されている。実は，第３作のダイハード３で「油分け算」の問題（注意：油分け算という呼称は，『塵劫記』の類題に由来する）が扱われている。映画での「油分け算」は，公園の泉 (撮影は，ニューヨーク市**マンハッタン地区**) の噴水に仕掛けられた爆弾にブルース・ウィルス扮するマクレーン刑事が今回映画での相棒のサミュエル・L・ジャクソン扮するタクシードライバーと彼のイエローキャブで公園を突っ切って駆けつけるところで現れる。犯人からの指示で,『 噴水が出ている公園の泉に「５ガロンの容器」と「３ガロンの容器」が置いてあり，起動した爆弾の上に制限時間内に正確に４ガロンを測り取った容器を置かないと爆発する』ので時間内に爆発を回避しようと試みる場面である。

注意）水は噴水の池から自由に汲んだり捨てたりできる。

映画は，主人公達が怒鳴りあいながら作業する次の映像から始まる。

0)　5 ガロン容器に 2 ガロンの水が入り 3 ガロン容器に水がいっぱい入っている状況から
1)　3 ガロンの容器の水をすべて出し，5 ガロン容器の水を 3 ガロン容器に移す。
　　（すなわち 3 ガロン容器に 2 ガロンの水＝1 ガロンの空き）
2)　5 ガロン容器いっぱいに水をため，1 ガロンの空きがある 3 ガロン容器に 1 ガロン分を移す
　　（これで 5 ガロン容器に 4 ガロンの水が残る）
3)　4 ガロン入りのこの容器を爆発物の上に置くことで爆弾の起動を解除する。

1.1　一次不定方程式との関係

この問題は，一次不定方程式 $5x+3y=4$ の整数解として $x=2, y=-2$ が得られることに帰着する。5 ガロンの容器を一杯にする操作を 2 回，3 ガロンの容器に移す操作が 2 回で 4 ガロンが実現できることを実際の手順にして整理しておく。
以下 (p,q) の左の p は 5 ガロン容器に入っている水の量，右の q は 3 ガロン容器に入っている水の量を表すとする。

$$(0,0)\to(5,0)\to(2,3)\to(2,0)\to(0,2)\to(5,2)\to(4,3)$$

すべての整数解 (x,y) は $x=2+3k, y=2-5k$ $(k\in\mathbb{Z})$ と表せるのでほとんどの場合は，この手順より無駄の多い手順となる。しかし $k=-1$ の場合には，次のように同じ位の回数（+2 回）で 4 ガロンを測りとることができる。

$$(0,0)\to(0,3)\to(3,0)\to(3,3)\to(5,1)\to(0,1)\to(1,0)\to(1,3)\to(4,0)$$

2　一次不定方程式の整数解の代表系

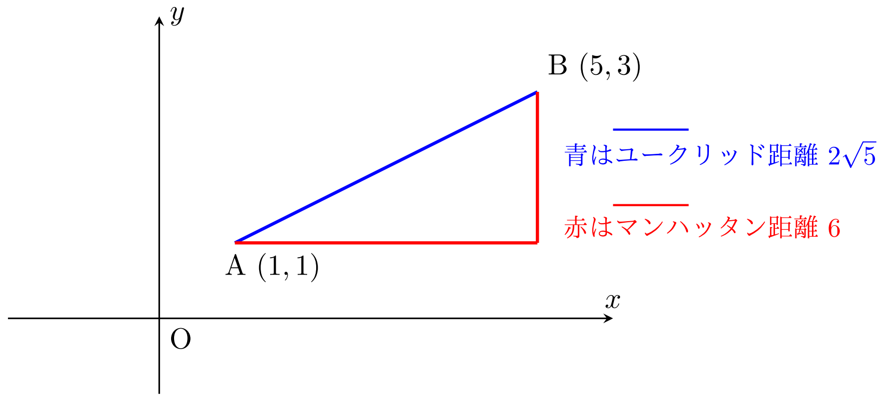
ここで一旦油分け算から離れて，一次不定方程式 $5x+3y=38$ の整数解を求める通常の解法について再考してみよう。
まず拡張ユークリッド互除法により $5x+3y=1$ の整数解を求め，$x_0=-1, y_0=2$ が得られる。両辺の 38 倍で元の一次不定方程式の整数解 (x,y) として $x=38\times x_0=-38, y=38\times y_0=76$ が得られる。すべての整数解は，整数パラメータ k を用いて次のように表すことができる。

$$x=-38+3k, y=76-5k,\ (k\in\mathbb{Z})$$

この解について再度観察してみよう。解の集合 (x,y) は $\mathbb{Z}^2$ を，その部分加群 $\{k(3,-5)\mid k\in\mathbb{Z}\}$ で割った剰余加群の 1 つの剰余類である。普通は上記の通り代表元として $(-38,76)$ を採用するが，k を動かして $k=15$ を選べば，より ”小さな ” 代表 $(7,1)$ がとれる。

このような**小さな代表**を，明確に特徴づけてみよう。直感的に用いた**小さな解**ということを正確に記述するために，**マンハッタン距離**（マンハッタンのように碁盤目状の都市での平面の移動に必要な距離）を使う。

(x, y) の大きさを $L(x, y) = |x| + |y|$ とする。すなわち下の図のように $A = (0, 0)$ と $B = (x, y)$ のマンハッタン距離 $d(A, B)$ は，$d(A, B) = L(x, y) = |x| + |y|$ で定められる。



マンハッタン距離も次の距離の公理をみたしている（注：絶対値の性質から簡単に導かれる）。

1. $d(a, b) \geq 0$, ここで等号が成り立つのは $a = b$ の時に限る
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$　（三角不等式）

$5x + 3y = 38$ の整数解 (x, y) の大きさ $L(x, y)$ の分布表は次の通り

k	$(x = -38 + 3k, y = 76 - 5k)$	大きさ $L(x, y)$
0	$(-38, 76)$	114
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$(-38 + 3k, 76 - 5k)$	$114 - 8k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11	$(-5, 21)$	26
12	$(-2, 16)$	18
13	$(1, 11)$	12
14	$(4, 6)$	10
15	$(7, 1)$	8
16	$(10, -4)$	14
17	$(13, -9)$	22
18	$(16, -14)$	30
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$(-38 + 3k, 76 - 5k)$	$8k - 114$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

一般化した一次不定方程式 $ax + by = c$ で $(GCD(a, b) = 1$ で $a > b > 0, c > 0$ の場合)，整数解 (x, y) の大きさ $L(x, y)$ は，次の 3 パターンが混在して分布する。

(1)　$x, y > 0$ の場合には $L(x, y)$ は公差 $a - b$ の有限等差数列

(2)　$x \leq 0, y \geq 0$ の場合は，公差 $a + b$ の無限等差数列

(3)　$x \geq 0, y \leq 0$ の場合も，公差 $a + b$ の無限等差数列

注意）$0 < c < a + b$ の場合には，公差 $a - b$ の有限等差数列は存在しない。

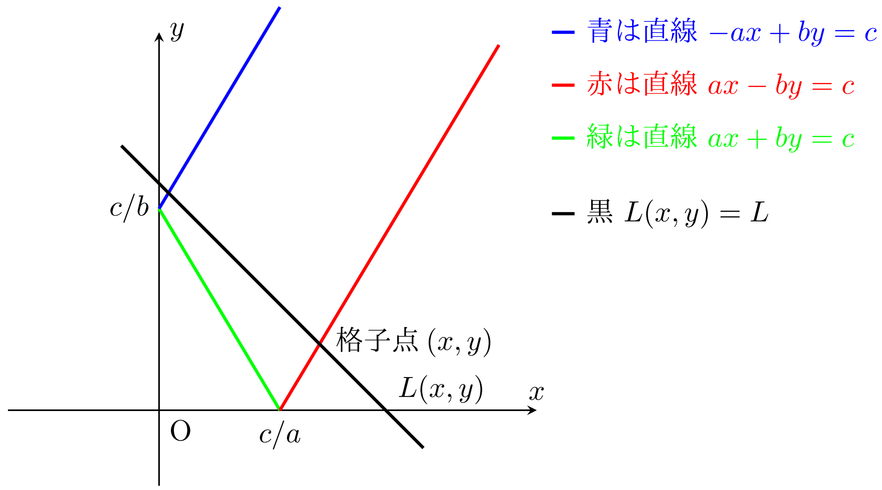
例の一次不定方程式 $a = 5, b = 3, c = 38$ の場合は，

(1) は $\{8, 10, 12\}$　次のグラフの緑の線分上の格子点

(2) は $\{18, 26, 34, \cdots\}$　次のグラフの青の半直線上の格子点

(3) は $\{14, 22, 30, \cdots\}$　次のグラフの赤の半直線上の格子点

であり大きさが最小の解 は $(x, y) = (7, -1)$ である。$ax + by = c$ の整数解の大きさを測るには，青 $(-ax + by = c)$ 上の格子点，緑 $(ax + by = c)$ 上の格子点，赤 $(ax - by = c)$ 上の格子点をプロットし，各格子点から $y = -x$ と平行な直線を引いて y 切片 L を比較すればよい。



一次不定方程式 $E = E_{(a,b,c)} : ax + by = c$ の整数解の (x, y) の大きさ $L(x, y) = |x| + |y|$ の中で最小な値を，与えられた一次不定方程式　$E = E_{(a,b,c)}$ の整数解の Minimai Length （**最小の長さ**）と呼んで L_E と略記し，L_E を与える整数解 (X, Y) を **最小整数解**と呼ぶ。最小整数解は整数解 $S_{(a,b,c)}$ の代表元となり，整数解全体は次のように表せる

$$S_{(a,b,c)} = \{(X - bk, Y + ka) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

L_E に関する易しい性質をいくつか挙げておこう。まず $E_{a,b,1}$ すなわち $E_{(a,b,1)} : ax + by = 1$ の場合は，L_E を与える (X, Y) は，拡張ユークリッド互除法で得られる X_n, Y_n に他ならない。

これは n 回のステップで得られる $X = (-1)^{n-1}X_n, Y = (-1)^n Y_n$ が $aX + bY = 1$ をみたすこと，$X_n + Y_n = L_E < (a + b)/2$ であることから分かる。

注意）最後の不等号は $X_{n+1} = b, Y_{n+1} = a$ であり，最後の商 $a_n \geq 2$ をみたすことから示される。

3　拡張ユークリッド互除法と連分数展開

ここで拡張ユークリッド互除法について，復習しておく。ユークリッド互除法が n 回で終わる手順を次のように整理する。

$$\begin{array}{lcl}
a & = & a_0 b + r_1,\ (0 < r_1 < b) \\
b & = & a_1 r_1 + r_2,\ (0 < r_2 < r_1) \\
r_1 & = & a_2 r_2 + r_3,\ (0 < r_3 < r_2) \\
 & \vdots & \\
r_{n-2} & = & a_{n-1} r_{n-1} + r_n,\ (0 < r_n < r_{n-1}) \\
r_{n-1} & = & a_n r_n, \\
r_n & = & d = GCD(a.b)
\end{array}$$

すなわち $r_{-1} = a, r_0 = b,\ X_{-1} = 1, X_0 = 0,\ Y_{-1} = 0, Y_0 = 1,\ X_i = a_{i-1}X_{i-1} + X_{i-2},\ Y_i = a_{i-1}Y_{i-1} + Y_{i-2}$ とおく．このとき次の漸化式が，i に関する帰納法によりすべての $i = -1, , 0, \ldots, n$ で成立する。

$$r_i = a(-1)^{i-1}X_i + b(-1)^i Y_i$$

定理 3.1 (拡張ユークリッド互除法) $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して，最大公約数を $GCD(a,b)=1$ とする．n 回のステップで $r_n = 1$ が求まるとき，一次不定方程式

$$E_{(a,b,1)} : ax + by = 1$$

の最小長さを与える整数解 X, Y は，次の漸化式で得られる．
$X_{-1} = 1, X_0 = 0,\ Y_{-1} = 0, Y_0 = 1,\ X_i = a_{i-1}X_{i-1} + X_{i-2},\ Y_i = a_{i-1}Y_{i-1} + Y_{i-2}$ とおくと，

$$X = (-1)^{n-1}X_n, Y = (-1)^n Y_n$$

また，$x_1 = (-1)^n X_{n+1} = (-1)^n b, y_1 = (-1)^{n+1}Y_{n+1} = (-1)^{n+1}a$ であり，すべての整数解 x, y は，$x = X + bk, y = Y - ak,\ (k \in \mathbb{Z})$ と表せる．

3.1 最小の長さを与える整数解を求めるアルゴリズム

$b = X_{n+1},\ a = Y_{n+1}$ から，i 番目の余り r_i に対して

$$E = E_{(a,b,r_i)} : ax + by = r_i$$

の最小長さを与える解は, $(-1)^{i-1}X_i, (-1)^i Y_i)$ なので，最小長さは $L_E = X_i + Y_i$ である。さらに $a = a_0 b + r_1$ のとき $c = a - b, a - 2b, \ldots, a - a_0 b = r_1$ の途中経過の場合も，

$$ax + by = c$$

と変形した場合の a_1 通りの $E_{(a,b,c)} : ax + by = c$ の最小長さ L_E が $|x| + |y|$ で与えられる。従って拡張ユークリッド互除法のステップを整理すると $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ 個の一次不定方程式の最小整数解を与えるアルゴリズムが，拡張ユークリッド互除法の手順に内包されていることがわかる。

3.2 連分数展開での言いかえ

ここで正の既約分数 $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ の有限連分数展開を次の通りとする

$$\left(\frac{a}{b}\right) = [a_0; a_1, a_2 \ldots, a_n]$$

ユークリッド互除法の手順を再度述べておくと

$$\begin{array}{rcl}
a & = & a_0 b + r_1,\ (0 < r_1 < b) \\
b & = & a_1 r_1 + r_2,\ (0 < r_2 < r_1) \\
r_1 & = & a_2 r_2 + r_3,\ (0 < r_3 < r_2) \\
 & \vdots & \\
r_{n-2} & = & a_{n-1} r_{n-1} + r_n,\ (0 < r_n < r_{n-1}) \\
r_{n-1} & = & a_n r_n, \\
r_n & = & d = GCD(a.b)
\end{array}$$

このとき k 次の中間連分数を次のように表す

$$\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$$

$P_{-1} = 0, P_0 = 1, Q_{-1} = 1, Q_0 = 0$ と置けば, $k \geq 0$ に対して次の漸化式が成立する。

$$P_{k+1} = a_k P_k + P_{k-1}, Q_{k+1} = a_k Q_k + Q_{k-1}$$

行列表示では

$$\begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ Q_{k+1} & Q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特に $k = n$ のとき $a = P_{n+1}, Q_{n+1} = b$ なので

$$\begin{pmatrix} a & P_n \\ b & Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

もちろん拡張ユークリッド互除法の記号なら $X_k = Q_k, Y_k = P_k$ である。

4 Frobenius の硬貨問題

以下では，$ax + by = c$ に非負整数解があるとき（すなわち緑の線分上に格子点が存在するとき）は, $a > b$ の条件から最小整数解の候補の格子点は，青の半直線上には無いことから，緑の線分上の格子点の長さと赤の半直線上の格子点との長さを比較して最小長さが決定されることの注意から始めよう。

正整数 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ の最大公約数が $GCD(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ であるとする。このとき c が十分に大きければ，一次不定方程式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

は非負整数解を持つ。より精密には次のことが知られている (参考文献 J. Ramírez Alfonsín 『The Diophantine Frobenius problem』 Oxford Univ. Press. (2005)）

定理 4.1 (Frobenius 数の存在) 上の条件をみたす $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，非負整数で表せない c の最大値が存在する。その値を *Frobenius* 数と呼び，$g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と表す。

注意）$a_1, a_2, \ldots, a_n$ の錐結合で表せない整数の集合は，Schur の定理により限りがあるため，Frobenius 数が存在することが導かれる。$n \geq 3$ のときには，Frobenius 数 $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を表す閉じた式は得られていないが，$n = 2$ すなわち $a, b > 0$, $GCD(a, b) = 1$ の場合の Frobenius 数 $g(a, b)$ は次のように得られている。

定理 4.2 (Sylvester(1882)) $g(a, b) = ab - a - b$

注意）Sylvester はさらに $1 \leq c \leq g(a, b)$ の c の中で $(a-1)(b-1)/2$ 個の自然数 c に対して一次不定方程式 $ax + by = c$ が非負整数解を持たないことも指摘している。このことは $c' = g(a, b) - c$ とすると $0 \leq c \leq g(a, b) = (a-1)(b-2) - 1$ に対して

$$ax + by = c \quad \text{非負整数解を持つ} \iff ax + by = c' \quad \text{非負整数解を持たない}$$

と 2 個づつ対をなすことから導かれる。

$a > b > 0$ で，a, b が互いに素である場合に $ax + by = c$ に非負整数解小整数解が存在する条件は次の通りである。

1 次合同式

$$by \equiv c \pmod a$$

の解で y_0 で $0 \leq y_0 < a$ となるものを取るとき $c - by_0 \geq 0$ となることである。このとき $x_0 = (c - by_0)/a$ とすれば (x_0, y_0) が $ax_0 + by_0 = c$ の非負整数解で y_0 が最小（すなわち長さが最小なもの）となる。このとき $y_0 - a$ は負となるので，$(x_0 + b, a - y_0)$ は，赤の半直線上の最小長さの整数解である。$L_1 = L(x_0, y_0) = x_0 + y_0)$, $L_2 = L(x_0 + b, y_0 - a) = a + b + x_0 - y_0$ とおくと

$$L_1 < L_2 \iff y_0 < (a + b)/2$$

まとめておくと

定理 4.3 上の記号の下で

$$E_{(a,b,c)} : ax + by = c \text{ が非負整数解をもつ} \Leftrightarrow c \geq by_0$$

定理 4.4 同じく上の記号の下で $y_0 \le (a+b)/2$ のとき最小整数解は (x_0, y_0) で最小長さ $L_E = x_0 + y_0$
一方 $y_0 > (a+b)/2$ の場合の最小整数解は $(x_0 + a, y_0 - b)$ で最小長さ $L_E = a + b + x_0 - y_0$

注意１）Frobenius の硬貨問題の結果は $y_0 = 0$ の場合も包含する。しかし $GCD(a,c) = GCD(b,c) = 1$ と仮定すると $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ である。
注意２） $c \ge (a-1)(b-1)$ のときに非負整数解 (x_0, y_0) が存在するので上のアルゴリズムで最小長さの整数解を見つけることができる。

5　$a, b, c > 0$, $GCD(a,b) = 1$ の場合に帰着すること

一次不定方程式　$ax + by + c = 0$ を $E_{(a,b,c)}$ とおく。その整数解全体を $S_{(a,b,c)}$ と表す。一次不定方程式の整数解とその大きさの分布は，$ax + by = c$ で「$GCD(a,b) = 1$ で $a > b > 0, c > 0$ の場合」に帰着することは次のようにしてわかる。

(1) $GCD(a,b) = d > 1$ の場合は，$d|c$ なので
$a_0 = a/d, b = b/d, c_0 = c/d,$ とおけば $ax + by = c \Longleftrightarrow a_0x + b_0y = c_0$ なので

$$S_{(a,b,c)} = S_{(a_0,b_0,c_0)}$$

(2) $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c \in \{-1, 1\}$ とおくと $a' = \varepsilon_a a, b' = \varepsilon_b b, c' = \varepsilon_c$ とおく。
このとき $E_{(a,b.c)}$ から $E_{(a',b',c')}$ への対応 ϕ を
$(x,y) \in S_{(a,b,c)}$ に対して $x' = \varepsilon_c\varepsilon_a x, y' = \varepsilon_c\varepsilon_b y$ として $\phi((x,y)) = (x', y')$ とおく。このとき ϕ は，$E_{(a,b,c)}$ の整数解から $E_{(a',b',c')}$ の整数解への全単射を与えることは次のように明らかである。

$$ax + by = c \Leftrightarrow (a\varepsilon_a)(\varepsilon_c\varepsilon_a x) + (b\varepsilon_b)(\varepsilon_c\varepsilon_b y) = (c\varepsilon_c) \Leftrightarrow a'x' + b'y' = c'$$

さらに対応 ϕ は，整数解の大きさを保つ。

$$L(x,y) = |x| + |y| = |x'| = |y'| = L(x', y')$$

したがって一般の一次不定方程式の整数解 (x,y) の大きさ $L(x,y)$ の分布を考えるには，
「$a, b.c$ がすべて正で，a, b が互いに素な場合」を考えれば十分であることがわかる。

6　油分け算と最小長さの関係

油分け算を，水 $a+b$ ガロンが入った容器と，a ガロン と b ガロン が正確に測れる容器 2 つが与えれられた局面から始めて，c ガロン $(1 \le c < a)$ を何回で測れるかという問題と考える。油分け算と対応する一次不定方程式 $E : ax + by = c$ の整数解 (x,y) とその大きさ $L(x,y) = |x| + |y|$ との関係は，次のように書ける

定理 6.1 上記の記号の下で一次不定方程式 $E : ax + by = c$ の整数解 (x,y) に対応する手順で $c(\neq b)$ を測り取る回数 z は次のように表せる。
$1 \le c < b$ のとき $z = 2L(x,y) - 2$
$b < c < a$ で $x > 0$ のときは, $z = 2L(x,y) - 2$
$b < c < a$ で $x < 0$ のときは, $z = 2L(x,y)$

証明の方針：油分け算の回数は，２つの容器の片方を一杯にするかまたは空にする毎に 1 カウントされることから容易にわかる。

6.1 Three Jugs Problem

油分け算は，欧米では Three Jugs Problem と呼ばれていて

a, b が正の奇数で $a > b > 0$ で互いに素である場合に $a+b, a, b$ の 3 つの容器で， $a+b$ の容器に水がいっぱいに入っているときに a, b の容器を何回用いて $a+b$ の容器と a の容器にちょうど 2 等分する最小手順を求める問題である。

結局 $E : ax + by = c = (a+b)/2$ の整数解の最小長さ L_E を与える整数解の問題に帰着する。

実は，$a > b > 0$, $GCD(a, b) = 1$ のとき $0 < c < a$ の範囲で c を動かすとき，一次不定方程式 $E = E_{(a.b,c)} : ax+by = c$ の最小長さ L_E を与える整数解が 2 個存在する必要十分条件が $c = (a+b)/2$ である。2 つの整数解に付随する油分け算の手順がほとんど変わらない（1 回だけ差がある）ので，最小手順を考える場合に試行錯誤が一番起きる場合が Three Jugs Problem で設定されている場合に他ならない。

定理 6.2 $GCD(a, b) = 1$, $a > b > 1$ のとき, $1 \le c < a$ の範囲で，c を動かすとき，一次不定方程式

$$E_c = E_{(a,b,c)} : ax + by = c$$

の整数解の最小長さ L_c を与える整数解は $c = \dfrac{a+b}{2}$ の場合を除きただ 1 つに決まる。$c = \dfrac{a+b}{2}$ のときは 2 つの整数解が最小長さを与える。

注意）a, b が共に奇数の場合にしか例外の最小整数解は存在しない。

定理 6.3 (Three Jugs Problem) 上記の条件で

$E = ax + by = (a+b)/2$ の最小の大きさ L_E を与える 2 つの整数解 (x, y) に対応する最小手順数は次の通り

$x > 0$ の整数解に対応するときの最小手順は $2L_E - 1$

$x < 0$ の整数解に対応するときの最小手順は $2L_E$

例）ここで上の定理を実例で確かめておく。$a = 5, b = 3, c = (5+3)/2 = 4$ のとき，一次不定方程式 $5x + 3y - 4$ の最小整数解は $(x, y) = (2, -2)$ と $(-1, 3)$ の 2 つ存在し最小長さはともに $L_E = 4$ である。以下手順を再度解説しておく。$(8, 5, 3)$ の順に入っている量を表す。

(1) 整数解 $(2, -2)$ に対応する手順は下記の通りで $2 \times 4 - 1 = 7 (= 2L_E - 1)$ 回

$$(8,0,0) \to (3,5,0) \to (3,2,3) \to (6,2,0) \to (6,0,2) \to (1,5,2) \to (1,4,3) \to (4,4,0)$$

(2) 整数解 $(-1, 3)$ に対応する手順は下記の通りで $2 \times 4 = 8 (= 2L_E)$ 回

$$(8,0,0) \to (5,0,3) \to (5,3,0) \to (2,3,3) \to (2,5,1) \to (7,0,1) \to (7,1,0) \to (4,1,3) \to (4,4,0)$$

7 塵劫記

『塵劫記』は，明代の中国の算術書を範としたもので，江戸初期の 1627 年（寛永 4 年），京都の吉田光由によって書かれた。そろばんの使い方や九九から始めて，米や材木の売り買い，金銀の両替，検地等の様々な実用的な問題だけでなく，百五減算，継子立て，ねずみ算などの数学遊びも数多く扱っている。江戸時代を通じて初等的で標準的な数学の教科書として流布しただけでなく，今でも岩波文庫で入手可能である。以下に挙げる油分け算も『塵劫記』で取り上げられている。塵劫記の油分け算は次のような問題である。

「油はかり分ける事」

「斗桶に油一斗あるを，七升枡と三升枡と二つある。これにて，五升ずつに分けたいといふ」

すなわち，10 升の油を 7 升と 3 升の枡を用いて 5 升ちょうどを 7 升の枡と 10 升の桶に半分ずつ分けるにはどうすればよいかという Three Jugs Problem と同じタイプの問題である。

解法）一次不定方程式 $E: 7x+3y=5$ の整数解の最小長さ $L_E=5$ を与える整数解は，$(2,-3)$ と $(-1,4)$ の 2 通り。以下左から 10 升，7 升，3 升のますにいくら入っているかを表すとする。整数解 $(-2,3)$ に対応する手順を書くとこの場合も

$$(10,0,0)\to(3,7,0)\to(3,4,3)\to(6,4,0)\to(6,1,3)$$

$$\to(9,1,0)\to(9,0,1)\to(2,7,1)\to(2,5,3)\to(5,5,0)$$

9 回 $(=2L_E-1)$ のステップで半分ずつに分けることができる。

8　Fibonacci 数と Lucas 数係数の一次不定方程式

F_n, L_n をそれぞれ n 番目の Fibonacci 数，Lucas 数とする。c が小さな場合の次のような一次不定方程式の大きさ最小の整数解を考える

$$F_{n+1}x+F_ny=c, L_{n+1}x+L_ny=c$$

$F_2=1, F_3=2, F_4=3$ なので拡張ユークリッド互除法により

$(8-1)$ $E_{(F_{n+1},F_n,1)}: F_{n+1}x+F_ny=1$ の整数解の最小の長さは F_n
最小長さとなる整数解は $x=(-1)^{n-1}F_{n-2}, y=(-1)^nF_{n-1}$
$(8-2)$ $E_{(F_{n+1},F_n,2)}: F_{n+1}x+F_ny=2$ の整数解の最小の長さは F_{n-1}
最小長さとなる整数解は $x=(-1)^nF_{n-3}, y=(-1)^{n-1}F_{n-2}$
$(8-3)$ $E_{(F_{n+1},F_n,3)}: F_{n+1}x+F_ny=3$ の整数解の最小の長さは F_{n-2}
最小長さとなる整数解は $x=(-1)^{n-1}F_{n-4}, y=(-1)^nF_{n-3}$

同様にして Lucas 数 $L_1=1, L_2=3$ 等から

$(8-4)$ $E_{(L_{n+1},L_n,1)}: L_{n+1}x+L_ny=1$ の整数解の最小の長さは F_{n+1}
最小長さとなる整数解は $x=(-1)^nF_{n-1}, y=(-1)^{n+1}F_n$
$(8-5)$ $E_{(L_{n+1},L_n,2)}: L_{n+1}x+L_ny=2$ の整数解の最小の長さは F_{n+2}
最小長さとなる整数解は $x=(-1)^{n+1}F_n, y=(-1)^nF_{n+1}$
$(8-6)$ $E_{(L_{n+1},L_n,3)}: L_{n+1}x+L_ny=3$ の整数解の最小の長さは F_n
最小長さとなる整数解は $x=(-1)^{n-1}F_{n-2}, y=(-1)^nF_{n-1}$

注意）これらは良く知られた公式であるが，今回は一次不定方程式の最小長さの整数解を与える公式という視点で並べている。念のため一目で分かる行列式の形でもまとめておく。

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n-1} \\ F_n & F_{n-2} \end{vmatrix}=(-1)^{n+1},\quad \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n-2} \\ F_n & F_{n-3} \end{vmatrix}=(-1)^n2,\quad \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n-3} \\ F_n & F_{n-4} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}3$$

一次不定方程式 $E_{(L_{n+1},L_n,c)}: L_{n+1}x+L_ny=c\ \ (c=1,2,3)$ の最小長さの整数解は

$$\begin{vmatrix} L_{n+1} & F_n \\ L_n & F_{n-1} \end{vmatrix}=(-1)^n,\quad \begin{vmatrix} L_{n+1} & F_{n+1} \\ L_n & F_n \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}2,\quad \begin{vmatrix} L_{n+1} & F_{n-1} \\ L_n & F_{n-2} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}3$$

リュカ数さがし

萩原幸男（元東京大学、元日本大学）
立井博子（元津田塾大学）

要旨　分割数と約数関数の間に成り立つ関係式を参照して、フィボナッチ数とリュカ数の間に類似の関係式を作り、それが“XX-リュカ数”と呼ばれる XX 数にも適用できるかを検討する。またフィボナッチ数と無関係と考えられる他の数列にも類似の関係式が存在するかどうかも検討する。

１．分割数と約数関数

正の整数nをnより小さい整数の和（1 とnを含む）に分割する仕方の数を分割数$p(n)$という。ただし、$p(0)=1$と置く。また、$p(n)$の生成（母）関数は

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \qquad (0 \le x < 1) \tag{1}$$

により与えられる。

一方、nの約数の総和（1 とnを含む）を約数関数と呼び、$\sigma(n)$により表す。$n=1{\sim}10$の$\sigma(n)$値を$p(n)$と共に表 1 に示す。このとき、$P(x)$は$\sigma(n)$との間に

$$P(x)=\exp\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{\sigma(n)}\!/_{n}\right\}x^n\right] \tag{2}$$

の関係式が成り立つ。なお式（２）の両辺の対数をとり、次いでxについて微分すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n)x^{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)x^{k-1}\right)$$

を得る。この両辺のxのべきの係数を等しいとすれば次式が得られる。

$$np(n)=\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)\,p(n-k) \tag{3}$$

表 1　分割数$p(n)$と約数関数$\sigma(n)$ の数値($n=0{\sim}10$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
$\sigma(n)$		1	3	4	7	6	12	8	15	13	18

２．フィボナッチ数とリュカ数

フィボナッチ数F_nの生成（母）関数を$F(x)$ $(0 \le x < 1)$と記すと

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{(1-x-x^2)} \tag{4}$$

である。また上式（４）右辺の分母は

$$\frac{1}{(1-x-x^2)} = \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left({}^{L_n}\!/_{n}\right)x^n\right\} \qquad (5)$$

と書くこともできる。ここにL_nはリュカ数である。

したがって式（4）と（5）により

$$F(x) = x\ \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left({}^{L_n}\!/_{n}\right)x^n\right\} \qquad (6)$$

のように、$F(x)$は式（2）に類似の関係式によりL_nと結ばれることが知れる。

表2にF_nとL_nの数値($n = 0 \sim 10$)を記す。F_nとL_nの間には漸化式

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \end{cases} \qquad (7)$$

が成り立つ。

表2　フィボナッチ数F_nとリュカ数L_nの数値($n = 0 \sim 10$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

3．XX-リュカ数

3－1．トリボナッチ数とトリボナッチ-リュカ数

トリボナッチ数T_nの生成（母）関数$T(x)$ $(0 \le x < 1)$は

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \frac{x}{(1-x-x^2-x^3)} \qquad (8)$$

である。また、

$$\frac{1}{(1-x-x^2-x^3)} = \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left({}^{K_n}\!/_{n}\right)x^n\right\} \qquad (9)$$

と、トリボナッチ-リュカ数K_nにより書ける。したがって以下の関係式が成立する。

$$T(x) = x\exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left({}^{K_n}\!/_{n}\right)x^n\right\} \qquad (10)$$

表3にT_nとK_nの数値($n = 0 \sim 10$)を記す。T_nとK_nはそれぞれ次の漸化式が成り立つ。

$$\begin{cases} T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \\ K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} \end{cases} \qquad (11)$$

表3　トリボナッチ数T_nとトリボナッチ-リュカ数K_nの数値($n = 0 \sim 10$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149
K_n	3	1	3	7	11	21	39	71	131	241	443

３－２．ペル数とペル-リュカ数

ペル数P_nおよびペル-リュカ数Q_nは

$$P_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 2P_{n-1}+P_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases} \tag{12}$$

$$Q_n = \begin{cases} 2 & (n=0) \\ 2 & (n=1) \\ 2Q_{n-1}+Q_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases} \tag{13}$$

により与えられる。

前記の例と同様にして、P_nの生成（母）関数はQ_nとの間に関係式

$$P(x) = x\exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left({Q_n}/{n}\right)x^n\right\} \tag{14}$$

が成立する。

表４にP_nとQ_nの数値$(n=0\sim10)$を記す。

表４　ペル数P_nとペル-リュカ数Q_nの数値$(n=0\sim10)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0	1	2	5	12	29	76	169	408	985	2378
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726

３－３．ヤコビスタール数とヤコビスタール-リュカ数

ヤコビスタール数J_nおよびヤコビスタール-リュカ数I_nは

$$J_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ J_{n-1}+2J_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases} \tag{15}$$

$$I_n = \begin{cases} 2 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ I_{n-1}+2I_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases} \tag{16}$$

である。

前記の例と同様にして、J_nの生成（母）関数はI_nとの間に関係式

$$J(x) = x\exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left({I_n}/{n}\right)x^n\right\} \tag{17}$$

により結ばれる。表５にJ_nとI_nの数値$(n=0\sim10)$を記す。

表５　ヤコビスタール数J_nとヤコビスタールーリュカ数I_nの数値$(n=0\sim10)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
I_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025

４．パドヴァン数とペラン数

パドヴァン数P_nの生成（母）関数$P(x)$は

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{1+x}{(1-x^2-x^3)} \qquad (18)$$

である。上式の右辺の分母は、

$$\frac{1}{(1-x^2-x^3)} = \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left({}^{Q_n}/_{n}\right) x^n\right\} \qquad (19)$$

とペラン数Q_nによって書くことができる。したがって、式（18）は式（19）により

$$P(x) = (1+x)\exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left({}^{Q_n}/_{n}\right) x^n\right\} \qquad (20)$$

により結ばれることになる。

しかし、ペラン数を「パドヴァン-リュカ数」とは呼ばない。

それは、(18)式の右辺の分母がリュカ数の場合と異なるためである。

P_nとQ_nの数値($n = 0 \sim 10$)を表６に与える。

表６　パドヴァン数P_nとペラン数Q_nの数値($n = 0 \sim 10$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
Q_n	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17

５．平面分割数と約数関数

再び分割数に戻って、ここでは２次元に拡張された場合の平面分割数と約数関数を考える。表７は正の整数nを平面上に分割する仕方の数$f(n)(1 \leqq n \leqq 6)$を示す。また、表８には$1 \leqq n \leqq 10$の値を与える。

いま平面分割の生成（母）関数を

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \quad (0 \leq x < 1) \qquad (21)$$

とする。これを式（２）と同じく約数関数$s(n)$とともに関係式

$$F(x) = \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left({}^{s(n)}/_{n}\right) x^n\right\} \qquad (22)$$

が成立するものとすると、$s(n)$は

$$\begin{aligned} s(1) &= 1 \\ s(2) &= 1 + 2^2 \\ s(3) &= 1 + 3^2 \\ s(4) &= 1 + 2^2 + 4^2 \\ s(5) &= 1 + 5^2 \end{aligned} \qquad (23)$$

$$s(6) = 1 + 2^2 + 3^2 + 6^2$$

$$\vdots$$

となる。正の整数nの約数を$m|n$と記すならば、$s(n)$は約数の総和（1とnを含む）となる。すなわち、

$$s(n) = \textstyle\sum_m (m|n) \tag{24}$$

6．謝辞

筆者らは平面分割数を数え上げることにより表７を紹介した。これに対して研究集会終了後に小林雅人氏はマクマホンの公式を用いて 2 次元約数関数を求める方法をご教示くださった。ここ記して謝意を表する。

次いで著者らが講演の中で、今後の研究課題として「平面（2 次元）フィボナッチ数」について言及したところ、講演会終了後に神戸大学の渋川元樹氏より

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ,\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

を用いて$f(n)$を表す方式により、2 次元への拡張が可能であることを示された。

筆者らは dilogarithm の不思議な関係式に興味を持ってはいたが、上記の方法が「2 次元フィボナッチ数」への拡張に関係するとは思いもよらなかった。筆者らの不明を恥じるとともに、同氏の熱意あるご説明に深甚なる謝意を捧げる次第である。

表７．平面分割の仕方

n	平面分割の仕方	$f(n)$
1	1	1
2	$\begin{matrix}2&0\\0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}$	3
3	$\begin{matrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{matrix}$	6
4	$\begin{matrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}3&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}3&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{matrix}$	13

表８．平面分割の$f(n)$値

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
$f(n)$	1	1	3	6	13	24	48	86	160	282	500

日本フィボナッチ協会の 25 年　　　(2023. 9. 6)

東京海洋大学名誉教授　中　村　　　滋

(『数学セミナー』「日本フィボナッチ協会の 20 年」(2018 年 8 月号) を書き換え)

§1　日本フィボナッチ協会の創立

日本フィボナッチ協会が創立から20年目に入った時の記事を基に，歴史をまとめます．早くからわが国のフィボナッチ数研究者たち，安藤四郎，佐藤大八郎，一松信（以下，敬称すべて省略）などは，アメリカに作られた「フィボナッチ協会」の The Fibonacci Quarterly にその成果を発表してきました．フィボナッチ協会が作られたのが1963年で，その年から Quarterly が発行されています．1984年からは隔年で国際会議（International conference on the Fibonacci Numbers and their Applications）が開かれるようになりました．第1回目はパトラス（ギリシア），2回目はサン･ノゼ（アメリカ），3回目はピサ（イタリア）というように，ヨーロッパ（アメリカ外）とアメリカ（またはその近郊国）が交互に開催する形になりました．筆者が初めて参加した1996年の第7回グラーツ（オーストリア）大会には日本から7人が参加し，発表会場も2箇所に分けられるほどの賑わいを見せました．その次の第8回ロチェスター（アメリカ）大会（1998年）にも日本人研究者がたくさん出席し，再会を喜びました．特に，日本人研究者のまとめ役であり，エネルギーと好奇心のかたまりのような佐藤大八郎を囲んで，しばしば談笑しました．この頃 佐藤はカナダにいて，この国際会議以外にはなかなか顔を合わせにくい状況でした．その翌年 佐藤から中村に連絡があり，日本に行くことになったから，日本人研究者で集まる機会を作ってほしいとの要望が伝えられました．そこで私が皆さんに手紙を書き，日程調整をして，1999年6月18日に東京商船大学（現・東京海洋大学）に集まったのです．数件の研究発表が行われた後に，お台場に場所を移して懇親会が開かれました．このときのメンバーは，佐藤，安藤の他に，細矢治夫，堀部安一，長坂建二，佐藤修一，東川和夫，大関清太と中村の9人でした．宴たけなわのころ，佐藤（大）がこの会を「日本フィボナッチ協会」の創立としようと提案し，異論なしに認められたのでした．人数的に少々不安もありましたが，「本家のフィボナッチ協会も，発足当初はこんなものだったよ」という佐藤（大）の一言に勇気づけられたのを覚えています．確かに，本家のフィボナッチ協会創立の準備のときも，「1962年の暮に，北カリフォルニアの数学者の小さなグループが集まり，フィボナッチ数と関連するトピックスの研究に特化した組織作りを発起した.」と報告されています．そして翌年に発足すると季刊誌“The Fibonacci Quarterly”が刊行され始めました．このフィボナッチ協会創立の中心人物は，サン･ノゼ州立大のホガット（Verner E. Hoggatt, Jr.；1921－1980）とセント･マリー･カレッジのブルソー（Brother Alfred Brousseau；1907－1988）の２人で，彼らとそれを支える数名のグループで始まったのでした．

§２　日本フィボナッチ協会の初期の活動

ちょうど日本フィボナッチ協会が発足した頃から中村が書き始めていた『フィボナッチ数の小宇宙』が，2002 年 9 月に刊行されたのをきっかけにして，その年の 12 月に第 2 回目の日本フィボナッチ協会の研究集会が開かれました．このときに一松信，塩川宇賢などが加わります．その後，2004 年 12 月第 3 回，2006 年 3 月第 4 回，2007 年 3 月第 5 回，と回を重ねて，飯高茂，和田秀男などの大学関係者，松田修，大塚秀幸，五輪教一，などの高専・高校関係者，大学生の中川幸一などが順次加わって多彩になって行きました．第 5 回研究集会には 50 人近い人が集まり，人数も順調に増えて行きます．この頃の変わり種は，「フィボナッチにはまった」ために東京大学医学部をやめて熱血塾講師になった青木亮二です．初期の研究集会の様子を伝えるために，当時医学部の 2 年生だった青木の研究発表を紹介します．

● ｎ段の階段を，１段または２段ずつ昇る昇り方の数 S_n はフィボナッチ数 F_{n+1} です（例えば拙著『フィボナッチ数の小宇宙』第 14 章例 30)．この昇り方を，ｋ段目を踏む場合と踏まない場合で 2 つに分けます．ｋ段目を踏む昇り方は，踏む前にｋ段を昇り，踏んだ後で残りのｎ－ｋ段を昇りますから，$S_k \times S_{n-k}$ 通りあります．踏まない方は，ｋ－１段目を踏んだ後，(ｋ＋１)段目から先のｎ－(ｋ＋１)段を昇りますから，$S_{k-I} \times S_{n-k-1}$ 通りあります．これらで全部の場合になるので，$S_n = S_k \times S_{n-k} + S_{k-1} \times S_{n-k-1}$ となります．これをフィボナッチ数の関係式に直せば，

$$F_{n+1} = F_{k+1} F_{n-k+1} + F_k F_{n-k}$$

となって，フィボナッチ数の加法定理が得られます．この他にも，碁石モデルやネックレス・モデルなども考えて，フィボナッチ数の加法定理の新証明をいくつも提供しました（青木亮二「フィボナッチの加法定理」;『数学セミナー』2003 年 7 月号所収)．その後，彼が連れてきた高校生 2 人が「フィボナッチ・ベクトル」を定義して，フィボナッチ数の加法定理を拡張すると共に，$F_n{}^k$ のエントリー・ポイントは $nF_n{}^{k-1}$ という予想を立てて，$k=2$，3 のときの証明に挑戦しています．その中の一人，中村勇哉は数学オリンピックのメダリストで，その後数学者になりました．

この頃は中学生・高校生の発表は少なかったのですが，最近は熱心な数学の先生方の努力もあって，若い人たちが毎回レベルの高い発表を行うようになったのは嬉しいことです．

創立以来のメンバーである細矢は化学者ですが，分子の配列を数学的に考える中でグラフ理論やフィボナッチ数に出会い，すばらしい成果を上げています．コシーの大著『フィボナッチ数とリュカ数，その応用』には「細矢トライアングル」という 1 章が立てられるほどの数学者顔負けのフィボナッチ数研究者です．細矢は研究集会でフェルマー・ペル方程式の最速解法を発表しました．これは，$Dx^2 + b = y^2$（ｘ，ｙ，D，b は整数で，D は平方因数を持たない）の形の不定 2 次方程式のことで，ヨーロッパでは 17 世紀のフェルマー（Pierre de Fermat ; 1607－1665）が深く考え，18 世紀にオイラー（Leonhard Euler ; 1707－1783）が「エレガントな方法」で解き，ラグランジュ（Joseph Louis Lagrange ;

1736－1813）が解の構造を完全に解き明かしました．未知数が 2 つで式が 1 つですから，一般にたくさんの解を持ちます．これを初めてまとまった形で取り上げたブラーマグプタ（Brahmagupta；598－？）は，天文学などで必要になる平方根計算のために，1 つの解から次々に新たな解を見つける素晴らしい方法を述べています．

細矢は大分前に，グラフを特徴づける数値の一つとして，トポロジカル･インデックス（または Z インデックス）という量を提案しました．グラフとは，いくつかの点（頂点，vertex）とそれらを結ぶ線（辺，edge）で出来ている数学的な対象です．彼は，互いに隣り合わない k 本の辺の組み合わせの総数を「k 非隣接数」と定め，k＝0 のときの k 非隣接数を常に 1 と決めた上で，各 k に対する k 非隣接数の総和をそのグラフの Z インデックスと定義しました．そして彼の発見は，n 項経路グラフの各頂点から c_r-1 本（$1 \leqq r \leqq n$）の辺が出ているキャタピラー $C_n(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n)$ の Z インデックス $Z_n(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n)$ が，オイラーが連分数計算を簡単にするために導入した「連分多項式」に等しいことを証明し，それを使って上述のフェルマー・ペル方程式 $Dx^2+b=y^2$ の新しい解法を発表したのです．ここでは詳しく説明しませんが，拙著『フィボナッチ数の小宇宙』改訂版，第 20A 章（amazon の POD で入手可能）に書いてあります．細矢の『トポロジカル・インデックス』（日本評論社）にも詳しく説明されています．

細矢の発表と並んで，塩川の一連の研究発表を私は誇りに思っています．彼はフィボナッチ数に関連する無限和の超越性に関する結果を次々に証明しました．20 世紀後半に $\sigma_1=\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/F_n)$ が無理数であることが証明されましたが，20 世紀の終わり頃から塩川とその仲間は $\sigma_{2k}=\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/F_n^{2k})$，$\tau_{2k}=\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/L_n^{2k})$ が超越数であること，奇数項だけの和 $\sigma^{(o)}_k=\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/F_{2n-1}^{k})$，$\tau_k^{(o)}=\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/L_{2n-1}^{k})$ も超越数となることなどを証明しています．このような結果の一部を研究集会で発表したのでした．証明は省略します．（塩川「フィボナッチ数の逆数和の無理性と超越性」（『数学セミナー』2003 年 7 月号），または 塩川著『無理数と超越数』（森北出版；1999） 参照）．

§３　日本フィボナッチ協会のその後

以上，日本フィボナッチ協会の初期の研究集会の様子を書いてきました．その後の動きもざっと追っておきましょう．創立から 15 年間，第 12 回研究集会まで，中村が協会代表を務め，13 回目から大関に代表を交代しました．初期の頃は 2 年に 1 回のペースで開かれていましたが，中村が定年になった 2006 年からは毎年開かれるようになりました．当初は毎回日程調整をして決めていましたが，この年からほぼ 3 月開催になっています．参加者数と発表者数が変動するのは，主に開催日のせいで，土日だと増え，ウィークデーだと減る傾向があるのでした．私が代表の時代で特に印象深いのは，東日本大震災の 1 週間後に開かれた第 9 回目の集会です．まだ余震が続く中で，北陸から深夜バスで来た参加者が仮眠をとっている時，会場に学部長がやって来て，「建物が古くて責任が持てないので，今日の集会を中止して下さい」と言うのです．止める訳にはいかないとして交渉した結果，3 時

までに終えることを条件に開催が許可されました．あのときは，異様な雰囲気の中で，大急ぎで研究発表を行ったのでした．12 回大会終了時に，代表の交代を発表しました．この代表交代にともなって，会場が東京商船大学（統合により東京海洋大学に名称変更）から都心の東京理科大学に変更になります．アクセスが格段に良くなり，モダンな建物での開催になりました．大関の働きかけに応えた秋山仁の尽力により快適な環境が整備され，とても良い雰囲気で研究集会が行われていることをとても嬉しく，また有難く感じています．

日本フィボナッチ協会の中核を担う数学者たちを中心とするグループで，フィボナッチ数に関するほとんどあらゆる事柄を網羅したコシーの大著“フィボナッチ数・リュカ数とその応用” 第 2 版を翻訳することになりました． 2 巻本に増えたこの本の翻訳が，大関を監訳者として進められています．小松尚夫，青木美穂，金子元など，次世代を担うフィボナッチ数研究者も参加しています．初期からのメンバーにこれらの方たちと，渋川元樹など,『数学セミナー』(2018 年 8 月号) の「フィボナッチ数特集」の執筆者たちを加えると，日本フィボナッチ協会の数学者たちの全体像が見えてきます．そしてフィボナッチ数特有の状況で，数学以外の分野の人たち，藤田眞作，根岸利一郎，尾立貴志，宗像修などが彩りを豊かにしてくれているのです．なお残念なことに，上に名前の挙がった方のうち次の方が亡くなりました．深く哀悼の意を表して記録しておきます．

佐藤大八郎（1932－2008.5.28)，　75 歳
和田秀男　（1940－2012.1.7)，　71 歳
長坂建二　（1946－2017.12.13)　71 歳

2020 年からの新型コロナウィルス (covid-19) の感染流行によって, 2020 年から 3 年間，研究集会はネット開催となり，直接顔を合わせる機会はなくなりました．投稿された論文をまとめた形で読めるのですが，やはり寂しく感じていました．今回の研究集会が久しぶりにリアル開催になり，とても嬉しかったです．また小・中学生の参加と発表もあり，とても心強く感じました．中学生，高校生，高専生の発表も毎回行われるようになっていて，小学生から 90 代の幅広い年代層で日本のフィボナッチ数研究が進んでいるのを実感します．塩川の論考の最後を締めくくっている「フィボナッチ数列の先に未知の世界が広がっている．」という言葉にある，未知の世界の「宝物」を発見して行く若者がこれからも次々に現れて，日本フィボナッチ協会が今後益々発展していくことを信じて，この小論を終えたいと思います．

最後に創立以来の研究集会の概況をまとめます.

日本フィボナッチ協会の研究集会

(1) 1999.6.18 東京商船大学 参加者 11, 発表者 4.

(2) 2002.12.6 東京商船大学 参加者 18, 発表者 9.

(3) 2004.12.17 東京商船大学 参加者 18, 発表者 8.

(4) 2006.3.3 東京海洋大学 参加者 26, 発表者 8.

(5) 2007.3.3 東京海洋大学 参加者 約 50, 発表者 10.

(6) 2008.3.7 東京海洋大学 参加者 12, 発表者 5.

(7) 2009.3.12 東京海洋大学 参加者 19, 発表者 8.

(8) 2010.3.12 東京海洋大学 参加者 17, 発表者 7.

(9) 2011.3.19 東京海洋大学 参加者 18, 発表者 10.

(10) 2012.3.23 東京海洋大学 参加者 27, 発表者 9.

(11) 2013.3.10 東京海洋大学 参加者 48, 発表者 17.

(12) 2014.8.25 東京海洋大学 参加者 40, 発表者 19.

(13) 2015.8.21 東京理科大学 参加者 52, 発表者 16.

(14) 2016.8.26 東京理科大学 参加者 44, 発表者 19.

(15) 2017.8.25 東京理科大学 参加者 47, 発表者 17.

(16) 2018.8.24 東京理科大学 参加者 39, 発表者 17.

(17) 2019.8.25 東京理科大学 参加者 38, 発表者 17.

(18) 2020.8.21 コロナのため対面研究会中止 発表者 15.

(19) 2021.8.21 コロナのため対面研究会中止 発表者 12.

(20) 2022.8.25 コロナのため対面研究会中止 発表者 12.

(21) 2023.8.25 東京理科大学 参加者 28, 発表者 11.