

日本フィボナッチ協会 第**22**回研究集会報告書

2024年8月

日本フィボナッチ協会

フィボナッチ数と初等整数論に関心のある皆様へ

第22 回日本フィボナッチ研究集会

8 月23 日に東京理科大学で開催された表記研究集会の発表論文(12名分)を掲載しました。今回の研究集会には、新しく参加された方々が多く、来年度は準備して話したいという方がおられたことも大変心強く思っております。

また中川幸一さんとSteven Miller会長のご尽力のおかげで国際Fibonacci協会と新たな関係が形成されようとしています。今後の発展が楽しみです。

最後に今回から片山が新たに代表となりました。何分不慣れで行き届かないところもあると思いますが、どうか今後ともこのユニークな研究集会の発展のために皆様のご協力をお願い申し上げます

日本フィボナッチ協会代表 片山 真一

本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会 プログラム

日 時 2024 年 8 月 23 日（金曜日） 10 時 00 分～17 時 30 分
場 所 東京理科大学（神楽坂校舎） 2 号館 4 階の 241・242 教室
アクセス 飯田橋駅（JR 総武線、東京メトロ 東西線、有楽町線、南北線、都営大江戸線）徒歩 5 分
参 加 費 1000 円（中学生・高校生・高専生は無料）

主催：日本フィボナッチ協会

協賛：東京理科大学理数教育研究センター

第 1 セッション（座長：飯高茂）

- 10:05 片山 真一（徳島大学）「放物線 $y = x^2 - D$ の有理点の乗法群と $\sqrt{D}$ への割線法」
- 10:25 久保田 和臣（放送大学教養学部）「フィボナッチ数の求め方」
- 10:45 吉田 佑恭（海城高校 1 年）「A certain sum formula derived from Fibonomial coefficient」
- 11:05 塩野 彰悟（芝高校 3 年）「黄金比に収束する数列」

昼休み（11:25～13:00）

第 2 セッション（座長：中村滋）

- 13:00 金山 知樹（海城中学 3 年）「コラッツ予想の操作における数列の法則」
- 13:20 飯高 茂（元学習院大学）「新世代完全数の発展」
- 13:40 宮本憲一（放送大学多摩数学クラブ）「乗数 3 付きの Miyamoto-Euler の方程式のダブル B 型解の研究（特殊解の考察を含む）」
- 14:00 清水 真先（放送大学多摩数学クラブ）「ディリクレ積による概完全数方程式の一般化」
- 14:20 中川 幸一（足利大学）「2024 国際フィボナッチ協会研究集会の報告」

休憩（14:30～15:00）

第 3 セッション（座長：大関清太）

- 15:00 岩淵 勇樹 「フィボナッチの放射と螺旋」
- 15:20 中西 真悟（大阪工業大学）「図余りと図足らずを許した正三角形を連ねた螺旋図（Gibonacci 数列と関連数列）」
- 15:40 渋川元樹（神戸大学）「Ramanujan's exercise の一般化と Fibonacci 多項式」
- 16:00 中村 滋（元東京海洋大学）「フィボナッチ数を導く積分方程式とレーマー公式の図形解」
- 16:20 事務連絡・アンケート回収（片山 真一）

目次

1	円錐曲線の有理点の群構造	1
2	割線法から導かれる放物線 $y = x^2 - D$ の有理点の乗法群	1
3	$\sqrt{D}$ の連分数展開への乗法群の応用	2
4	代数的トーラス	5
5	その他	6

1 円錐曲線の有理点の群構造

D を平方数でない正整数とする。楕円 $x^2 + Dy^2 = 1$ の 2 つの有理点 A, B が与えられたとき、有理点 A, B を結ぶ。結んだ線分と平行な直線で $x^2 + Dy^2 = 1$ の自明な有理点 $O = (1, 0)$ を通るものと楕円との交点を A, B の積 $A * B$ とすることにより楕円上の有理点に自然に乗法群の構造が入る。例えば $D = 1$ の場合は、三角関数を用いたパラメータ表示での偏角の加法構造に他ならない。放物線 $y = x^2 - D$ を C_0 と表して、頂点 $O = (0, -D)$ を用いて同手順で、 C_0 上の有理点 $C_0(\mathbb{Q}) = \{(x, x^2 - D) \mid x \in \mathbb{Q}\}$ に、各点の x 座標の加法と同一視できる「加法群」の構造が入る。

2 割線法から導かれる放物線 $y = x^2 - D$ の有理点の乗法群

以下 $D > 0$ のときの $\sqrt{D}$ の近似値の計算に使われる「割線法」から導かれる有理点の新しい「乗法群」について述べる。割線法から導かれる構造なので、 $D > 0$ として説明を加えよう。 $C_0 : y = x^2 - D$ に対しての「割線法」とは、2 点 $P_1 = (x_1, x_1^2 - D)$, $P_2 = (x_2, x_2^2 - D)$ を結んだ直線 ℓ が、 x 軸と交わる点の x 座標を x_3 とするとき、 x_3 が x_1, x_2 より $\sqrt{D}$ のより良い近似を与えるという $\sqrt{D}$ の求根アルゴリズムである。

例えば $\sqrt{D} < x_2 < x_1$ とすると、放物線 C_0 は下に凸な曲線なので、 ℓ は右上がりの直線となり、確かに x_3 は $\sqrt{D} < x_3 < x_2 < x_1$ をみたす。 x_3 は、 ℓ の傾きが $\lambda = (x_2^2 - D - x_1^2 + D)/(x_2 - x_1) = x_2 + x_1$ なので $0 = \lambda(x - x_1) + x_1^2 - D$ を解いて、次のように表せる。

$$x_3 = \frac{x_1 x_2 + D}{x_1 + x_2}$$

このようにして決まる $P_3 = (x_3, x_3^2 - D)$ を $P_1 = (x_1, x_1^2 - D)$ と $P_2 = (x_2, x_2^2 - D)$ の積とみなす。各有理点の x 座標を次のように分数の形で表しておけば

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}, x_2 = \frac{p_2}{q_2}, x_3 = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 D}{p_1 q_2 + p_2 q_1} \quad (1)$$

この演算により $C_0(\mathbb{Q})$ に積の構造が入る。群になるためには、さらに単位元として無限遠点 $\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (t, t^2 - D) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t, t^2 - D)$ も $C_0(\mathbb{Q})$ に加えて $\overline{C_0(\mathbb{Q})} = C_0(\mathbb{Q}) \cup \{\infty\}$ として扱う必要がある。

群を成すことを直接に確かめることも可能であるが、ここでは、2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の乗法群 $K^\times$ からの写像を用いて説明しておく。

$$p - q\sqrt{D} \rightarrow \left(\frac{p}{q}, \frac{p^2}{q^2} - D \right)$$

$$(p_1 - q_1\sqrt{D})(p_2 - q_2\sqrt{D}) = p_1 p_2 + q_1 q_2 D - (p_1 q_2 + p_2 q_1)\sqrt{D} \quad (2)$$

まずこの写像は、全射で、さらに等式 (1), (2) により、全射準同型であることがわかる。また準同型の核は、 $\mathbb{Q}^\times$ なので、放物線 $C_0 : y = x^2 - D$ の有理点に割線法から導かれる乗法群に関して、次の同型が成立する。

定理 2.1

$$\overline{C_0(\mathbb{Q})} \cong K^\times / \mathbb{Q}^\times$$

以下有理点 $P = \left(\frac{p}{q}, \frac{p^2}{q^2} - D\right)$ に対応する $K^\times / \mathbb{Q}^\times$ の同値類 $(p - q\sqrt{D})\mathbb{Q}^\times = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D}\right)\mathbb{Q}^\times$ を $[p - q\sqrt{D}]$ と表す。また $P = \left(\frac{p}{q}, \frac{p^2}{q^2} - D\right)$ を x 座標を用いて、 $P(p/q)$ と略記する。
すなわち $P_1 = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1^2}{q_1^2} - D\right)$, $P_2 = \left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_2^2}{q_2^2} - D\right)$ の積は $P_1 = P(p_1/q_1)$, $P_2 = P(p_2/q_2)$ と略記した上で次のように表せる。

$$P_1 * P_2 = P(p_1/q_1) * P(p_2/q_2) = P((p_1p_2 + Dq_1q_2)/(p_2q_1 + p_1q_2))$$

3 $\sqrt{D}$ の連分数展開への乗法群の応用

D を平方数でない正整数とすると、 $\sqrt{D}$ の連分数展開が周期 n であれば

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n}]$$

とこれ以降は、周期部分 $a_1, \dots, a_n$ がこの順番で繰り返され現れる。また $a_n = 2a_0$ であり、 $1 \leq k \leq n-1$ に対して $a_{n-k} = a_k$ という対称性が成り立つ。

以下近似分数 P_k/Q_k を次のように番号付けする。なお通常の論文や教科書では、この付け方とは添え字の付け方が1つずれた定義が採用されていることに注意しておこう。一方で古い日本語の文献（高木貞治『初等整数論講義』、河田敬義『数論』、小野孝『数論序説』）では、ここで用いる番号付けを採用している。

$P_{-1} = 0, P_0 = 1, Q_{-1} = 1, Q_0 = 0$, 以下 $k \geq 0$ に対して、 $P_{k+1} = a_k P_k + P_{k-1}$ および $Q_{k+1} = a_k Q_k + Q_{k-1}$ とおく。見やすいように次の表の形にしておく。

k	-1	0	1	2	$\dots$	n	$\dots$
a_k		a_0	a_1	a_2	$\dots$	$a_n = 2a_0$	$\dots$
P_k	0	1	a_0	$a_1 a_0 + 1$	$\dots$	$P_n = a_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2}$	$\dots$
Q_k	1	0	1	a_1	$\dots$	$Q_n = a_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-2}$	$\dots$

ここで (P_n, Q_n) は、 $P_n^2 - DQ_n^2 = (-1)^n$ をみたすペル方程式の解で、 $P_n - Q_n\sqrt{D}$ は、 K の整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ の基本単数 ε_D である。 $\eta_k = P_k - Q_k\sqrt{D}$ とするとき、 k に関する帰納法により、 $0 \leq k \leq n$ で次が成立することが言える。

$$\eta_k \eta_{n-k} \in \eta_n \mathbb{Q}^\times = \varepsilon_D \mathbb{Q}^\times$$

従って $K^\times / \mathbb{Q}^\times$ においては

$$[\eta_k][\eta_{n-k}] = [\varepsilon_D]$$

さらに同型 $\overline{C_0(\mathbb{Q})} \cong K^\times / \mathbb{Q}^\times$ により、次の等式が成立する。言い換えれば近似分数を x 座標とする対称な2点を結ぶ直線は、全て同じ x 軸の点 $(P_n/Q_n, 0)$ を通ることが言える。

$$P(P_k/Q_k) * P(P_{n-k}/Q_{n-k}) = P(P_n/Q_n)$$

定理 3.1 $0 \leq k \leq n$ に対して

$$[\eta_k][\eta_{n-k}] = [\varepsilon_D]$$

ここで $\eta_n = P_n - Q_n\sqrt{D} = \varepsilon_D$ であり、放物線 C_0 の有理点の関係として言い直せば、次の通りになる。

$$P(P_k/Q_k) * P(P_{n-k}/Q_{n-k}) = P(P_n/Q_n)$$

証明 $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n}]$ とおくと、 $k \geq 1$ のとき、 α_k は $\sqrt{D}$ と対等な簡約2次無理数で下記左辺の式をみたすので、逆に解いて右辺の表示を得る。

$$\sqrt{D} = \frac{\alpha_k P_k + P_{k-1}}{\alpha_k Q_k + Q_{k-1}} \iff \alpha_k = -\frac{P_{k-1} - Q_{k-1}\sqrt{D}}{P_k - Q_k\sqrt{D}}$$

ここで $\sqrt{D}$ の連分数展開の周期の中での対称性は、 $1 \leq k \leq n-1$ のとき、 $\alpha_{n-k+1} = -\frac{1}{\alpha_k}$ と言い換えられるので、

$$\alpha_k = -\frac{\eta_{k-1}}{\eta_k}, -\overline{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_{n-k+1}} = -\frac{\eta_{n-k+1}}{\eta_{n-k}}$$

$\alpha_k \overline{\alpha_k} = N_{K/\mathbb{Q}} \alpha \in \mathbb{Q}^\times$ なので

$$\eta_k \eta_{n-k} = (-1/N_{K/\mathbb{Q}} \alpha_k) \eta_{k-1} \eta_{n-k+1}$$

をみtas. $k=0$ のときは、 $\eta_0 \eta_n = 1 \times \varepsilon_D \in \varepsilon_D \mathbb{Q}^\times \in K^\times / \mathbb{Q}^\times$ なので、 k に関する帰納法が完成する。上記の証明を少し詳細に見直すと、次のようにより一般的な中間近似分数に関しても同様の結果が拡張できる。

結果が見易いように $1 \leq k \leq n-1$ および整数 $0 \leq b_k < a_k$ に対して中間近似分数を $P_k(b_k) = \left(\frac{b_k P_k + P_{k-1}}{b_k Q_k + Q_{k-1}} \right)$,
 $P_{n-k}(a_k - b_k) = \left(\frac{(a_k - b_k) P_{n-k} + P_{n-k-1}}{(a_k - b_k) Q_{n-k} + Q_{n-k-1}} \right)$ と表しておく

命題 3.2 $1 \leq k \leq n-1$ のとき、任意の自然数 $0 < b_k < a_k$ に対する近似分数に関して、次が成立する。

$$P(P_k(b_k)) * P(P_{n-k}(a_k - b_k)) = P(P_n/Q_n).$$

注意) 上で得られた中間近似分数の公式で、 $b_k = 0, b_k = a_k$ とすれば、定理での近似分数の公式と一致する。

ニュートン法とハレー法

$\sqrt{D}$ の近似値を計算する求根アルゴリズムとしては、割線法は収束が遅く、より速い求根アルゴリズムとして有名なものに次に述べるニュートン法とハレー法がある。

ニュートン法と $\sqrt{D}$ の連分数展開についての考察については、A. Dujella や小松尚夫の先行研究がある。

T. Komatsu, Continued fractions and Newton's approximations, *Math. Communications*, **4** (1999), 167–176.

A. Dujella, Newton's formula and the continued fraction expansion of $\sqrt{d}$, *Experiment. Math.*, **10** (1) (2001), 125-131..

なお $\sqrt{D}$ の連分数展開の周期 n が偶数 $2m$ の場合の近似分数 P_m/Q_m に対するニュートン法が基本単数に対応する事実は、我々の割線法の公式の特別な場合と考えることができるが、多くの研究者によって再発見されて発表されている。

J. Mikusiński, Sur la méthode d'approximation de Newton, *Annales Polonici Mathematici* **1** (1955), 184-194.

M. A. Filaseta, Newton's method and simple continued fractions, *Fibonacci Q.* **24** (1986), 41-46.

ニュートン法

ニュートン法は、方程式の根を数値計算によって解くための反復法による求根アルゴリズムの1つである。収束の速さも2次収束で、名称はアイザック・ニュートンがケプラー方程式の根を求める際に導入したものとして知られている。

まず初めに、予想される真の解に近いと思われる値をひとつとる。次に、そこでグラフの接線を考え、その x 切片を計算する。この x 切片の値は、予想される真の解により近いものとなるのが一般である。以後、この値に対してそこでグラフの接線を考え、同じ操作を繰す求根アルゴリズムである。

すなわち $f(x) = 0$ の根 x を求めるために、 x の付近の適当な初期値 x_0 をとり、次の漸化式によって、根 x に収束する数列 $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ を得る。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = x^2 - D$ の場合は、下記の漸化式で得られる。

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{D}{x_n} \right)$$

ニュートン法は、割線法で2点が近づいて一致する場合なのでニュートン法により $x_n = \frac{p}{q}$ とすると $x_{n+1} = \frac{p^2 + Dq^2}{2pq}$ であり、 $C_0(\mathbb{Q})$ の有理点の乗法群の係数に定式化し直すと、次の通り、ニュートン法は、2乗に対応していることがわかる。すなわち

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) * P(x_n) = P(x_n)^2$$

をみtas.

ハレー法

ハレー法は、ニュートン法より収束の速い（3次収束）求根アルゴリズムである。名称は、ニュートンの友人のエドモンド・ハレーが、やはり惑星や彗星の軌道のケプラー方程式の解を求めるために導入したものとして知られている。

まず $f(x)$ に対して $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}$ を考えると $f'(\alpha) \neq 0$ のもとで

$$f(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) = 0$$

$g(x)$ に対してニュートン法を適用すると $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$ で $g'(x_n) = \frac{2|f'(x_n)|^2 - f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)\sqrt{|f'(x_n)|}}$ なので代入して整理すると

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2|f'(x_n)|^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

$f(x) = x^2 - D$ の場合に計算してみると、下記の漸化式が得られる。

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3Dx_n}{3x_n^2 + D}$$

$x_n = \frac{p}{q}$ とすると $x_{n+1} = \frac{p^3 + Dpq^2}{3p^2q + Dq^3}$ であり、 $C_0(\mathbb{Q})$ の有理点の乗法群の關係に定式化し直すと次の通り。ハレー法は、3乗に対応していることがわかる。すなわち

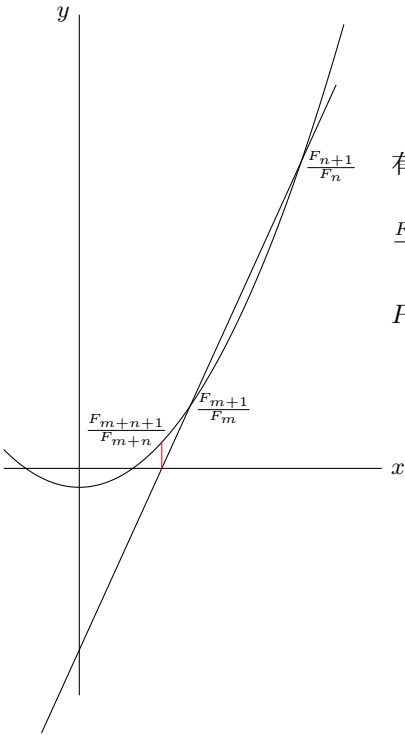
$$P(x_{n+1}) = (P(x_n) * P(x_n)) * P(x_n) = P(x_n)^3$$

をみtas。

実は、上記の群構造は、 $f(x) = ax^2 + bx + c$ で $a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0$ の場合に、一般的に定義できる。すなわち $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と因数分解したときの2次無理数 α をとって 放物線 C_0 の有理点に次のように2次体の同値類を対応させれば良い。

$$(pq, f(p/q) - \alpha) \in C_0(\mathbb{Q}) \rightarrow [p/q - \alpha] = [p - q\alpha] = (p - q\alpha)\mathbb{Q}^\times \in K^\times/\mathbb{Q}^\times$$

例えば $f(x) = x^2 - x - 1$ の場合と $f(x) = x^2 + 1$ の場合では、次のようなことが起きている。
放物線 $y = x^2 - x - 1$ 上の有理点について

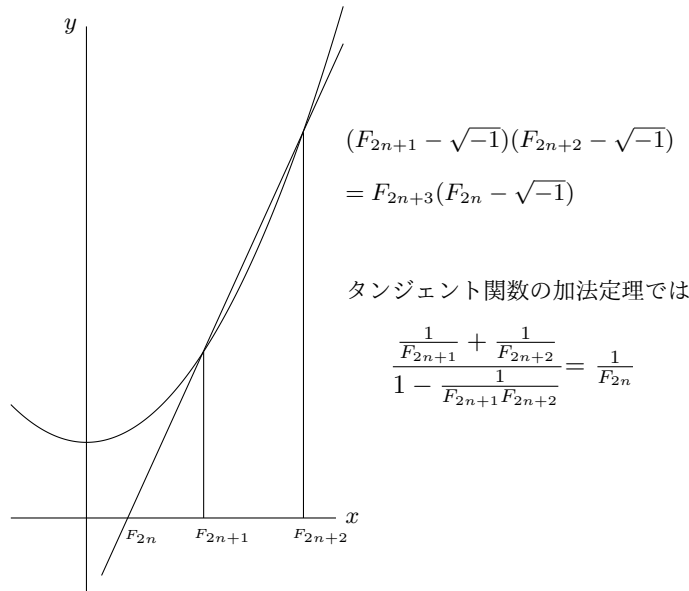


有理点 $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ の割線法での対応は

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow [F_{n+1} - \varphi F_n] = [\bar{\varphi}^n] \text{ により}$$

$$P(\frac{F_{m+1}}{F_m}) * P(\frac{F_{n+1}}{F_n}) = P(\frac{F_{m+n+1}}{F_{m+n}})$$

放物線 $y = x^2 + 1$ の上の有理点について



これにより下記の関係式を得る。

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

$n = 0$ から順番に上の公式を繰り返し用いて、次の良く知られた公式が得られる。

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)$$

4 代数的トーラス

代数的トーラス $K^\times/\mathbb{Q}^\times$ は、実はある代数的トーラスの有理点の集合になる。ここで代数的トーラスの定義、記号を復習しておく。 K/k をガロア群 G の代数体のガロア拡大とする。Weil restriction $R_{K/k}$ により定まる代数的トーラスを $R_{K/k}(G_m)$ とする。 $R_{K/k}(G_m)$ に埋め込まれた G_m の剰余として決まる代数的トーラスを $R_{K/k}(G_m)/G_m$ と表す。

特に $k = \mathbb{Q}$ で K を 2 次拡大とする。トーラス $R_{K/\mathbb{Q}}(G_m)/G_m$ を T_0 と表すと、 T_0 の有理点 $T_0(\mathbb{Q})$ は

$$T_0(\mathbb{Q}) \cong K^\times/\mathbb{Q}^\times$$

したがって次のように放物線 $C_0: y = x^2 - D$ の有理点がトーラス T_0 の有理点の作る群と同型となる

$$\overline{C_0(\mathbb{Q})} \cong K^\times/\mathbb{Q}^\times \cong T_0(\mathbb{Q})$$

一方、Pell Conics $C_1: x^2 - Dy^2 = 1$ (注: Lemmermeyer に倣い $D > 0$ のときは双曲線、 $D < 0$ のときは楕円を総称してこう呼ぶ) の有理点 $C_1(\mathbb{Q})$ についてもある代数的トーラスの有理点の作る群と同型となる。ノルム写像 N ($N: R_{K/k}(G_m) \rightarrow G_m$) の核として定まるノルム 1 トーラスを $R_{K/k}^{(1)}(G_m)$ と表す。 K が 2 次体 $k = \mathbb{Q}$ のときの $R_{K/\mathbb{Q}}(G_m)$ を T_1 と表すと、 $C_1(\mathbb{Q}) = T_1(\mathbb{Q})$ が自然に導かれる。

さらに Hilbert の定理 90 $H^1(G, K^\times) = 1$ を用いれば、 $K^\times/\mathbb{Q}^\times \cong C_1(\mathbb{Q})$ が導かれる。

定理 4.1

$$\overline{C_0(\mathbb{Q})} \cong T_0(\mathbb{Q}) \cong K^\times/\mathbb{Q}^\times \cong T_1(\mathbb{Q}) \cong C_1(\mathbb{Q})$$

注意) 一般に K/k が巡回拡大であれば、character module $\hat{T}_1 \cong \hat{T}_0$ であることを用いても上の同型は導かれる。

F. Lemmermeyer は、論文「Conics - a Poor Man's Elliptic Curves, *Preprint*, arXiv:math/0311306, (2003)」で Pell Conics の場合について、楕円曲線との類似の視点から考察をしている。そのなかで ノルム 1 トーラス T_1 の類数 $h(T_1)$ と 2 次体 K の類数 h_K との比から次のガウスの種の理論の再定式化を得ている。

$$\frac{h_K}{h(T_1)} = \begin{cases} 2^{t_K-1} & D < 0 \text{ or } D > 0 \text{ and } N_{K/\mathbb{Q}} O_K^\times = \{\pm 1\}, \\ 2^{t_K-2} & D > 0 \text{ and } N_{K/\mathbb{Q}} O_K^\times = \{1\}, \end{cases}$$

ここで t_K は K で分岐する相異なる素数の数、 $O_K^\times$ は 2 次体 K の単数群を表す。

代数的トーラスの類数を用いたガウスの種の理論の一般化は、小野孝氏、佐々木隆二氏、森下昌紀氏、V. E. Voskresenskii 氏等および筆者によって 1980 年代から 1990 年代にかけて試みられている。

小野孝氏は、まず次のトーラスの完全列

$$0 \rightarrow R_{K/k}^{(1)}(G_m) \rightarrow R_{K/k}(G_m) \rightarrow G_m \rightarrow 0$$

に伴って得られる 2 つのトーラス $R_{K/k}(G_m)$ と $R_{K/k}^{(1)}(G_m) \times G_m$ の間の isogeny から導かれる次の類数関係 $E(K/k)$ を定義した。

$$E(K/k) = \frac{h(R_{K/k}(G_m))}{h(G_m)h(R_{K/k}^{(1)}(G_m))} = \frac{k_K}{h_k h(K/k)}$$

この $E(K/k)$ を小野氏は、オイラー数と呼んだ。ここで $h(R_{K/k}(G_m))$ は代数体 K の類数 h_K 、 $h(G_m)$ は k の類数 h_k に他ならない。またノルム 1 トーラスの類数 $h(R_{K/k}^{(1)}(G_m))$ を $h(K/k)$ と略記している。 K が 2 次体、 k が有理数体の場合に、Lemmermeyer が得た相対類数関係は小野のオイラー数 $E(K/\mathbb{Q})$ に他ならない。

一方で小野氏に倣い筆者はトーラスの完全列

$$0 \rightarrow G_m \rightarrow R_{K/k}(G_m) \rightarrow R_{K/k}(G_m)/G_m \rightarrow 0$$

に伴って得られるトーラス $R_{K/k}(G_m)$ と $R_{K/k}(G_m)/G_m \times G_m$ の isogeny から導かれる類数関係

$$E'_{K/k} = \frac{h(R_{K/k}(G_m))}{h(G_m)h(R_{K/k}(G_m)/G_m)} = \frac{k_K}{h_k h'(K/k)}$$

を定義してその性質を考察した。今回、放物線 C_0 の有理点とトーラス T_0 の有理点の同型が得られたので、放物線の類数 $h(C_0)$ を $h(T_0) = h'(K/\mathbb{Q})$ とおいた相対類数を考えると

$$\frac{h_K}{h(C_0)} = \frac{h_K}{h_{\mathbb{Q}} h(T_0)} = E'(K/\mathbb{Q})$$

となる。今回得られた放物線の類数 $h(C_0)$ と 2 次体の類数 h_K の相対関係は、ガウスの種の理論を $E'(K/k)$ の特別な場合として幾何的に捉え直したことになる。

5 その他

放物線 $C_0 : y = f(x) = x^2 - D$ の有理点の標準高さ を楕円曲線上の有理点の高さと同様に 2-Descent すなわちニュートン法を用いて定義することができる。この標準高さは、Lemmermeyer が Pell Conics に対して考えた有理点の高さのちょうど半分になっている。また吉田氏が考えた有理点と $\sqrt{D}$ との距離とも関係がある。

参考文献

- [1] A. Dujella, Newton's formula and the continued fraction expansion of $\sqrt{d}$, *Experiment. Math.*, **10** (1) (2001), 125-131..
- [2] S. Katayama, Class number relations of algebraic tori I, *Proc. Japan Acad.*, **62 A** (1986), 216-218.
- [3] S. Katayama, $E(K/k)$ and other arithmetical invariants for finite Galois extensions. *Nagoya Math. J.*, **114** (1989), 135-142.
- [4] S. Katayama, Rational Points on the Parabola and the Arithmetic of Related Algebraic Tori, to appear in *J. Math. Univ. Tokushima*, **58**.
- [5] T. Komatsu, Continued fractions and Newton's approximations, *Math. Communications*, **4** (1999), 167-176.
- [6] F. Lemmermeyer, Conics - a Poor Man's Elliptic Curves, *Preprint*, arXiv:math/0311306, (2003).
- [7] J. Mikusiński, Sur la méthode d'approximation de Newton, *Annales Polonici Mathematici* **1**, 184-194, (1955)
- [8] T. Ono, Arithmetic of algebraic tori, *Ann. Math.*, **74** (1961), 101-139.
- [9] T. Ono, On the Tamagawa number of algebraic tori. *Ann. Math.*, **78** (1963), 47-73.
- [10] T. Ono, On some class number relations for Galois extensions, *Proc. Japan Acad.*, **61 A** (1985), 311-312.
- [11] T. Ono, On some class number relations for Galois extensions, *Nagoya Math. J.*, **107** (1987), 121-133.
- [12] R. Sasaki, Some remarks to Ono's theorem on a generalization of Gauss' genus theory, *Nagoya Math. J.*, **111** (1988), 131-142.
- [13] J. M. Shyr, On some class number relations of algebraic tori. *Michigan Math. J.*, **24** (1977), 365-377.
- [14] 高木貞治, 初等整数論講義 (第 2 版), 共立出版 1971.
- [15] V. E. Voskresenskii, Algebraic Groups and Their Birational Invariants, Translations of Mathematical Monographs 179, American Mathematical Society 1998.
- [16] A. Weil, Adeles and Algebraic Groups, Birkhauser, 1982.
- [17] 吉田知行, 平方根のニュートン近似とその周辺 (1), (2), 数学セミナー, 2020 年 6 月号, 50-56, 7 月号, 44-49.

フィボナッチ数の求め方

日本フィボナッチ協会／第22回研究集会

放送大学教養学部4年
心理と教育コース
久保田 和臣

放送大学教養学部学生で心理と教育コース専攻、千葉学習センター所属の久保田と申します。

本日は、「フィボナッチ数の求め方」というタイトルで発表させていただきます。内容的には小中学生向きかとも存じますが、お気軽にお付き合いいただければと存じます。

それでは、始めさせていただきます。

経緯と目標

- 前回(第21回研究集会)まで..... $\sqrt{5}$ と黄金比の数値計算

1. モンテカルロ法
2. Spigot Algorithm

詳細は添付のCD-R参照願います。

- 今回(第22回研究集会)

- **フィボナッチ数の計算**

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

数セミの記事(2024年1月号[1])を
読んでいて思いつきました。

- 検討内容と目標

- アルゴリズムの検討
- $F_{10000000}$ 程度まで計算
- 目標：計算は数秒以内に完結
- プログラミング言語としてPythonを使用
- Benford(ベンフォード)の法則についても確認
- フリーの開発環境Lazarus(ラザロ、ラザラス)を使い、Windows用のアプリを作成検討

昨年までの研究集会では $\sqrt{5}$ と黄金比の数値計算について、モンテカルロ法とSpigot Algorithmという観点から発表してまいりました。

今回は、原点に返り「フィボナッチ数の計算」についてまとめたいと存じます。数学セミナー(2024年1月号)の記事[1]を読んでいて、このテーマを思いつきました。

検討する内容と目標は、次の通りです。

- 効率のよいアルゴリズムを見つける
- $F_{10000000}$ 程度まで計算する
- 計算が数秒以内に完結することを目標にする
- プログラミング言語にはPythonを用いる
- 応用として、Benfordの法則についても確認する
- Windows用のアプリを開発する

それでは、始めさせていただきます。

プログラミング言語

- プログラミング言語Python
 - 学びやすく利用者数が急増している。
 - 近年AI等で注目を浴びている。
 - 標準で整数と多倍長整数が統合され、数百万桁の数字も自由に扱える。
 - 誰が書いても比較的同じプログラムになるため、可読性が高く、保守性・可搬性が高い。
 - 種々のライブラリが存在し、簡単にインストールできるため、拡張性が高い。anacondaのように、Python本体と種々のライブラリを同時にインストールすることも可能。
 - Google Collaboratoryのようにクラウド上で開発することも増えてきた。
- Python使用時の注意点
 - C言語等と比較して、実行速度が遅い場合もある。
 - インデントは見やすい反面、ずれたりするとエラーが発生する。
 - 変数の型を自分で管理する必要がある。
 - 統計学など、別の特定の言語 (例：R) が強い場合がある。
 - 昔バージョン2と3問題があった。

今回の発表では、プログラミング言語としてPythonを用います。Pythonは、習得が容易であり、近年AI等で注目を浴びており、利用者数が急増している人気のプログラミング言語です。今回注目したのは、Pythonでは整数と多倍長整数が統合されており、 F_n の n が小さくても大きくても、同じプログラムを実行するだけでフィボナッチ数の結果が得られます。ほかにもいくつかの長所があり、記しておきました。ご覧ください。

もちろんPythonにも、プログラム作成に当たり気を付けなければならない点がいくつかあります。Pythonを使用する際の注意点を長所に引き続き列挙いたしました。

ChatGPTに聞いてみた

- 爆速でフィボナッチ数を計算するpythonプログラムを書いて。
 - 定義式通り+メモ化(後述)
 - 行列累乗(こちらは高速。 $F_{10000000}$ を20秒程度)
- 大きなnに対してもフィボナッチ数を計算して。プログラミング言語はpython。プログラム例を出力して。
 - 定義式通り+メモ化(後述)
 - 動的計画法
- 少ない再帰呼び出し回数でフィボナッチ数を計算するpythonプログラムを書いて。
 - 定義式通り+メモ化(後述)
- フィボナッチ数を、加法定理を用いて計算するpythonプログラムを書いて。
 - 最も高速計算できるバージョンを答えてきた。

- 質問の仕方が重要
- ほとんどの回答には微修正が必要 (ある程度のPythonの知識が必要)

4

まず、最近流行のChatGPTに聞いてみました。

「計算速度」、「 F_n のnの大きさ」、「再帰呼び出し回数の少なさ」、「加法定理の利用」の4つの観点から質問したところ、最後の加法定理の質問の時、最も高速計算できるPythonのプログラムを返答してきました。他の質問の場合、満足に計算を完了することができませんでした。具体的なプログラムについては、補足資料(CD-R収載)をご参照ください。

よく言われているように、質問の仕方が重要なことが確認できました。またほとんどの回答に対して微修正が必要であったことから、ある程度のPythonの知識が必要であることも分かりました。

フィボナッチ数を求めるためのアルゴリズム

- 大まかな分類

- **再帰的計算**
- 繰り返し計算

それでは、いよいよ本論に入ります。

フィボナッチ数を計算するためのアルゴリズムは、「再帰的計算」と「繰り返し計算」に大別されます。特に再帰的計算が重要です。

以下順に解説することといたします。

再帰的手続きによるフィボナッチ数計算の例

- プログラム例
 - 最も簡便なフィボナッチ数を求めるプログラム (アルゴリズム f0)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

```
1 def f0(n):
2     if n < 2:
3         return n
4     else:
5         return f0(n-1) + f0(n-2)
6
7 NthTerm = 40
8 print('====_アルゴリズム f0_====')
9 result = f0(NthTerm)
10 print('F(', NthTerm, ') = ', result)
```

- 実行結果

====_アルゴリズム f0_====
F(40) = 102334155

呼び出し回数：331160281 回
計算時間：42.1 秒

日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

6

まず、再帰的手続きによるフィボナッチ数の計算を見てみましょう。中央青色で囲ったPythonのプログラム(アルゴリズム f0)は、定義式通りに計算する場合の例です。

このプログラムを実行して F_{40} を求めたところ、再帰呼び出し回数が331160281回(*)、計算に要した時間が42.1秒でした。計算時間は毎回多少異なるため、目安程度にご覧ください。

この例では、 F_{40} を計算するだけでも40秒以上要し、再帰呼び出し回数は3億回を超えました。より大きなフィボナッチ数を求めたい場合、実用的ではありません。

(*) $331160281 = 2F_{41} - 1$ となることを、補足資料で示しています。

再帰的手続きによるフィボナッチ数計算の例 (続き)

- 高速なプログラムの例 (アルゴリズムf3M)

Listing 1 Algorithm f3M

```

1 import time
2
3 def f3M(n):
4     def func(n, pad={0:0,1:1}):
5         global NCalls
6         NCalls += 1
7         if n in pad:
8             return pad[n]
9         k = (n + 1) // 2
10        s = func(k - 1)
11        t = func(k)
12
13        if n % 2 == 1:
14            pad[n] = s * s + t * t
15        else:
16            pad[n] = (2 * s + t) * t
17        return pad[n]
18    return func(n)
19
20 NthTerm = 100000000
21 NCalls = 0
22 print('==== アルゴリズム f3M (メモ化バージョン) =====')
23 start = time.time()
24 result = f3M(NthTerm)
25 computation_time = time.time() - start
26 print('F(, NthTerm, ) = ', result)
27 print('n, 呼び出し回数 = ', NCalls)
28 print('計算に要した時間 = ', '{computation_time:.3f}', '秒\n')
```

$$\begin{cases} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{2n} &= (F_n + 2F_{n-1}) F_n \\ F_{2n-1} &= F_n^2 + F_{n-1}^2 \end{cases}$$

高速化を目的として、メモ化のテクニックも使用

- 実行結果

```

==== アルゴリズム f3M (メモ化バージョン) =====
F( 100000000 ) = 1129834378 ... (途中省略) ... 6380546875
F( 100000000 )は、10進 2089877 桁
呼び出し回数 = 117
計算に要した時間 = 1.386 秒
```

F_n の n : 40 → 100000000
 呼び出し回数: 3億回 → 117回
 計算時間: 42 秒 → 1.4 秒

ついで、より高速にフィボナッチ数を求めることができるアルゴリズム(アルゴリズムf3M)を実行してみました。漸化式は右上に記載した通りで、参考文献[1]でも示されています。

結果、 $F_{100000000}$ を再帰呼び出し回数117回、計算時間1.4秒で求めることができました。アルゴリズムを工夫することで、より大きい F_n を、より速く計算することが可能となることがわかります。

- 少ない再帰呼び出し回数のプログラム例 (アルゴリズムf5dM)

```

1 import time
2 import sys
3 sys.set_int_max_str_digits(0)
4
5 def f500(n):
6     def f(n):
7         if n < 10:
8             return n
9         else:
10             return f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + f(n-4) + f(n-5) + f(n-6) + f(n-7) + f(n-8) + f(n-9) + f(n-10)
11     return f(n)
12
13 # 計算時間を計測
14 start = time.time()
15 result = f500(100)
16 print('計算結果: {}'.format(result))
17 end = time.time()
18 print('計算時間: {}'.format(end - start))

```

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34 \\ F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233, F_{14} = 377, F_{15} = 610 \\ F_{16} = 987, F_{17} = 1597 \\ F_{4n+1} = [13(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^4 + 24(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^4 - 30(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^4 \\ - 9(F_{n-5} + 2F_{n-4})^4 + 2(F_{n-5} + F_{n-4})^4] / 6 \\ F_{4n} = (3F_{n-5} + 5F_{n-4})(7F_{n-5} + 11F_{n-4}) [5(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 + (7F_{n-5} + 11F_{n-4})^2] / 2 \\ F_{4n-1} = [5(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^4 + 9(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^4 - 12(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^4 \\ - 3(F_{n-5} + 2F_{n-4})^4 + (F_{n-5} + F_{n-4})^4] / 6 \\ F_{4n-2} = [(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 + (2F_{n-5} + 3F_{n-4})^2] \times \\ [3(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 + (2F_{n-5} + 3F_{n-4})^2 - 2(F_{n-5} + 2F_{n-4})] \end{array} \right.$$

高速化を目的として、メモリの最適化のテクニックも使用

- 実行結果

==== アルゴリズム f5dM (Xモ化バージョン)=====

F(10000000) = 1129834378 ... (途中省略) ... 6380546875

F(100000000)は、10進 2089877 桁

呼び出し回数 = 39

計算に要した時間 = 1.711 秒

F_nのn：40 → 10000000
呼び出し回数：3億回 → 39回
計算時間：42 秒 → 1.7 秒

日本フィボナッチ協会／第22回研究集会

8

次に、少ない再帰呼び出し回数でフィボナッチ数を求められるアルゴリズムの例(アルゴリズムf5dM)を示します。漸化式を右上に記しました。先ほどと比較して漸化式はずいぶん複雑になりましたが、 $F_{100000000}$ を計算するのに再帰呼び出し回数が39回で済みます。

ループ1回あたりの計算が複雑になるため、前のアルゴリズム (f3M) の場合よりも若干実行時間は長く、1.7秒要しました。

繰り返し計算によるフィボナッチ数計算の例

- 末尾再帰 (Tail Recursion)

- 再帰呼び出しが、その手続きの末尾に接しているような再帰
- 繰り返し計算と等価

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{if } \dots \text{ then } \dots \\ \text{else } f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

但し、 $\dots, a_i$ のところには f は現れない。

- フィボナッチ数を求める場合、 $\text{fib}(n) = \text{fib3}(n, 0, 1)$ を計算する。

$$\text{fib3}(n, a, b) = \text{if } n = 0 \text{ then } a \\ \text{else } \text{fib3}(n - 1, b, b + a)$$

- 具体的には、

$$\begin{aligned} \text{fib}(3) &= \text{fib3}(3, 0, 1) \\ &= \text{fib3}(2, 1, 1 + 0) \\ &= \text{fib3}(2, 1, 1) \\ &= \text{fib3}(1, 1, 1 + 1) \\ &= \text{fib3}(1, 1, 2) \\ &= \text{fib3}(0, 2, 2 + 1) \\ &= \text{fib3}(0, 2, 3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

繰り返し計算への変換例

```
1 import time
2
3 def fiter(n):
4     a, b = 0, 1
5     while n > 0:
6         a, b = b, a + b
7         n -= 1
8     return a
9
10 NthTerm = 1000
11 print('====アルゴリズム_fiter_====')
12 start = time.time()
13 result = fiter(NthTerm)
14 print('\n', 'F(', NthTerm, ') = ', result)
15 computation_time = time.time() - start
16 print('\n_計算に要した時間_ = ', f'{computation_time:.3f}', '秒\n')
```

フィボナッチ協会 / 第 22 回研究集会

9

引き続き、「繰り返し計算」によりフィボナッチ数を求める基本的なコンセプトを説明いたします。

ここでの最重要なキーワードは、「末尾再帰」です。末尾再帰とは、再帰呼び出しがその手続きの末尾に接しているような再帰で、繰り返し計算と等価であることが知られています。末尾再帰のパターンを最初に示します。

フィボナッチ数を繰り返し計算で求めるためには、次に示した補助関数 $\text{fib3}(n, a, b)$ を定義し、 $\text{fib}(3) = \text{fib3}(3, 0, 1)$ でフィボナッチ数を計算します。典型的なプログラム例を右下に青色で囲って示しました。再帰呼び出しではなく、while ループを用いて計算していることがわかります。

繰り返し計算によるフィボナッチ数計算

- 行列の累乗 [5]

- $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ としたとき $Q^{n-1} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}$ となり、**(1,1)**成分が F_n

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ と初期化し } \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix}$$

で累乗を計算

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a + c) \\ b(a + c) & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

Listing 46 Algorithm fQ2n

```

1 import time
2
3 def fQ2n(n):
4     a, b, c = 1, 1, 0
5     x, y = 1, 0
6     n -= 1
7     while n > 0:
8         if n % 2 == 1:
9             x, y = a * x + b * y, b * x + c * y
10            n //= 2
11            a, b, c = a * a + b * b, b * (a + c), b * b + c * c
12        return x
13
14 NthTerm = 40
15 print('====アルゴリズムfQ2n====')
16 start = time.time()
17 result = fQ2n(NthTerm)
18 computation_time = time.time() - start
19 print('F(1,NthTerm,)=', result)
20 print('\n計算に要した時間={:.3f},f'{computation_time:.3f}', '秒\n')
```

繰り返し計算による方法はほかにもあります。

ここに挙げた 2×2 行列 Q を累乗 ($n-1$ 乗) すると、その要素が F_n 、 F_{n-1} 、 F_{n-2} になることは、よく知られています。この戦略に基づくプログラムを示します。再帰呼び出しを使用していないことに注意してください。

高速化のテクニック

- 再帰計算に対しよく用いられる手法

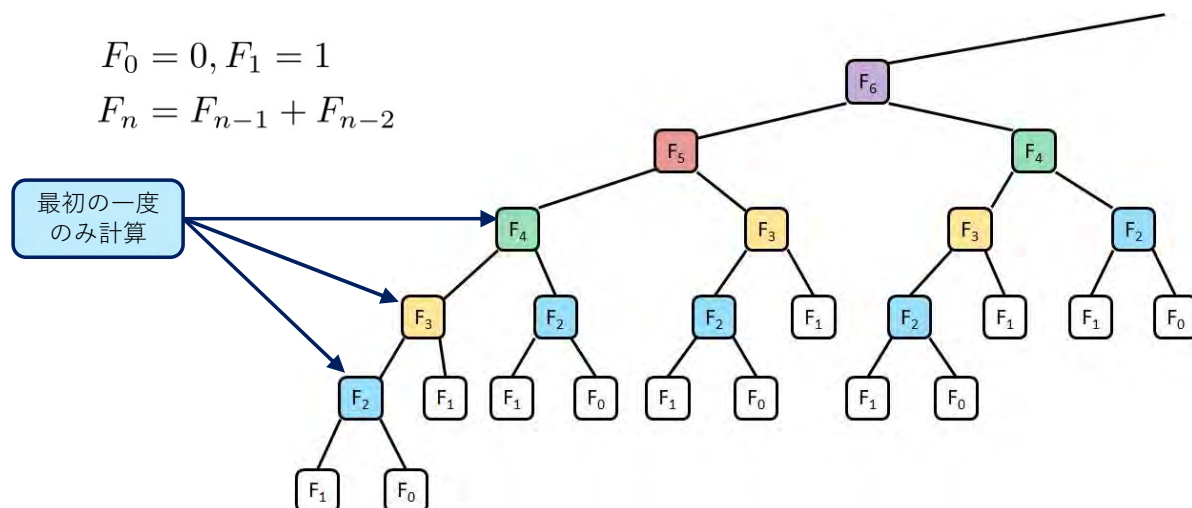
- **メモ化**
- 繰り返し計算

$F_{10000000}$ 程度の大きなフィボナッチ数を計算するためには、高速化を目的としたテクニックを利用することが効果的です。

ここでは、再帰計算時によく利用される「メモ化」のテクニックを紹介いたします。

メモ化

- 再帰を利用した計算で多用される高速化のテクニック
- 一度計算した値はメモに記録、二度目以降は計算せずにメモを写す



日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

12

メモ化のテクニックについて、図を用いて説明いたします。

フィボナッチ数 F_n を定義通りの漸化式で計算するとき、 $F_2, F_3, \dots$ は何度も求めることになります。この時、律儀に漸化式を用いて計算しては、計算に長時間を要してしまいます。そこで $F_2, F_3, \dots$ を一度計算したら、結果をメモにとっておき、2回目以降はそのメモを参照することとします。

メモ化のテクニックでは、このようにして高速化が達成されます。特に再帰呼び出し回数が増える場合に効果を発揮します。

メモ化のコーディング

- アルゴリズム f0 (メモ化なし) と f0M (メモ化あり)

Listing 1 Algorithm f0

```
1 import time
2
3 def f0(n):
4     global NCalls
5     NCalls += 1
6     if n < 2:
7         return n
8     else:
9
10        return f0(n-1) + f0(n-2)
11
12 NthTerm = 40
13 NCalls = 0
14 print('====アルゴリズムf0(メモ化なし)====')
15 start = time.time()
16 result = f0(NthTerm)
17 computation_time = time.time() - start
18 print('F(%, NthTerm, %)' % (NthTerm, result))
19 print('\n呼び出し回数, %' % (NCalls))
20 print('計算に要した時間, %f' % (computation_time), '秒\n')
```

Listing 2 Algorithm f0M

```
1 import time
2
3 def f0M(n):
4     def func(n, pad = {0:0, 1:1}):
5         global NCalls
6         NCalls += 1
7         if n not in pad:
8             pad[n] = func(n-1) + func(n-2)
9         return pad[n]
10    return func(n)
11
12 NthTerm = 900
13 NCalls = 0
14 print('====アルゴリズムf0M(メモ化バージョン)====')
15 start = time.time()
16 result = f0M(NthTerm)
17 computation_time = time.time() - start
18 print('F(%, NthTerm, %)' % (NthTerm, result))
19 print('\n呼び出し回数, %' % (NCalls))
20 print('計算に要した時間, %f' % (computation_time), '秒\n')
```

Pythonでメモ化を実現するのは、それほど難しくなく、プログラムの行数もさほど増えません。

ここに示しましたのは、フィボナッチ数を定義の漸化式に従って求めるとき、メモ化の有り無しを比較したものです。上側のコードがメモ化なしの場合で、下側がメモ化した場合です。コーディング量がほとんど増えていないことが分かります。

繰り返し計算 (再度登場)

- 末尾再帰 (Tail Recursion)

- 再帰呼び出しが、その手続きの末尾に接しているような再帰
- 繰り返し計算と等価

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{if } \dots \text{ then } \dots \\ \text{else } f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

但し、 $\dots, a_i$ のところには f は現れない。

- フィボナッチ数を求める場合、 $\text{fib}(n) = \text{fib3}(n, 0, 1)$ を計算する。

$$\text{fib3}(n, a, b) = \text{if } n = 0 \text{ then } a \\ \text{else } \text{fib3}(n - 1, b, b + a)$$

- 具体的には、

$$\begin{aligned} \text{fib3}(3) &= \text{fib3}(3, 0, 1) \\ &= \text{fib3}(2, 1, 1 + 0) \\ &= \text{fib3}(2, 1, 1) \\ &= \text{fib3}(1, 1, 1 + 1) \\ &= \text{fib3}(1, 1, 2) \\ &= \text{fib3}(0, 2, 2 + 1) \\ &= \text{fib3}(0, 2, 3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

繰り返し計算への変換例

```
1 import time
2
3 def fIter(n):
4     a, b = 0, 1
5     while n > 0:
6         a, b = b, a + b
7         n -= 1
8     return a
9
10 NthTerm = 1000
11 print('====アルゴリズム_fIter_====')
12 start = time.time()
13 result = fIter(NthTerm)
14 print('\n', 'F(', NthTerm, ') = ', result)
15 computation_time = time.time() - start
16 print('\n_計算に要した時間_ = ', f'{computation_time:.3f}', '秒\n')
```

フィボナッチ協会 / 第 22 回研究集会

14

繰り返し計算を、高速化のテクニックの一つとしてとらえることも可能です。

このスライドは、先ほど末尾再帰を説明するときに用いたものです。再掲いたします。ご覧いただきたいのは、右下に青で囲った Python のプログラムの部分です。計算のメインの部分である while ループ回りが簡潔に書かれていることが見て取れます。見た目通り、プログラムが簡潔な分、動作が軽く高速です。

再帰的アルゴリズム

- 漸化式の具体的な構築法

- **行列に基づく方法**
- 再帰呼び出し回数の減少

これまで、いくつかの再帰的アルゴリズムに関し漸化式を示してまいりましたが、これらの漸化式の具体的な構築法を紹介いたします。

話の中心は、行列に基づく方法となります。次のスライド以降で説明いたします。

フィボナッチ数に関する行列と漸化式

- $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

- 漸化式その1

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = Q^n Q^n \\ = \begin{pmatrix} F_{n+1}^2 + F_n^2 & F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) & F_n^2 + F_{n-1}^2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} F_{n+1}^2 + F_n^2 & F_n(F_n + 2F_{n-1}) \\ F_n(2F_{n+1} - F_n) & F_n^2 + F_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

- 漸化式その2

$$\begin{pmatrix} F_{3n+1} & F_{3n} \\ F_{3n} & F_{3n-1} \end{pmatrix} = Q^n Q^n Q^n \\ = \begin{pmatrix} F_{n+1}^3 + F_n^2(2F_{n+1} + F_{n-1}) & F_n(F_{n+1}F_{n-1} + F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n-1}^2) \\ F_n(F_{n+1}F_{n-1} + F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n-1}^2) & F_{n-1}^3 + F_n^2(F_{n+1} + 2F_{n-1}) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (F_n + F_{n-1})^3 + F_n^2(2F_n + 3F_{n-1}) & F_n(2F_n^2 + 3F_nF_{n-1} + 3F_{n-1}^2) \\ F_n(2F_n^2 + 3F_nF_{n-1} + 3F_{n-1}^2) & (F_n + F_{n-1})^3 - 3F_nF_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

16

よく知られたように(参考文献[2][3])、ここに示した 2×2 の正方行列 Q を n 乗するとフィボナッチ数 F_{n+1} 、 F_n 、 F_{n-1} が求められます。

漸化式その1では、 Q の $2n$ 乗を計算しました。これと Q の n 乗を2回かけた行列を比較することで F_{2n+1} と F_{2n} (あるいは F_{2n} と F_{2n-1})を F_{n+1} と F_n (あるいは F_n と F_{n-1})であらわした漸化式を導くことができました。この漸化式は参考文献[1]でも(導出なしで)用いられています。

漸化式その2では、 Q の $3n$ 乗と Q の n 乗を3回かけた行列とから、 F_{3n+1} 、 F_{3n} と F_{3n-1} を F_n と F_{n-1} であらわした漸化式を導くことができました。

フィボナッチ数に関する行列と漸化式

$$\bullet T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-2} & F_0 & F_{-1} \\ F_{-1} & F_1 & F_0 \\ F_0 & F_2 & F_1 \end{pmatrix} \text{ とすると } T^n = \begin{pmatrix} F_{n-3} & F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F_{n-1} - F_n & F_{n-1} & F_n - F_{n-1} \\ F_n - F_{n-1} & F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$$

漸化式その1

$$T^{4n} = \begin{pmatrix} F_{4n-3} & F_{4n-1} & F_{4n-2} \\ F_{4n-2} & F_{4n} & F_{4n-1} \\ F_{4n-1} & F_{4n+1} & F_{4n} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} * & 2F_n^4 + 4F_n^3F_{n-1} + 6F_n^2F_{n-1}^2 + F_{n-1}^4 & F_n^4 + 4F_n^3F_{n-1} + 4F_nF_{n-1}^3 - F_{n-1}^4 \\ * & 3F_n^4 + 8F_n^3F_{n-1} + 6F_n^2F_{n-1}^2 + 4F_nF_{n-1}^3 & * \\ * & 5F_n^4 + 12F_n^3F_{n-1} + 12F_n^2F_{n-1}^2 + 4F_nF_{n-1}^3 + F_{n-1}^4 & * \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} * & (F_n + F_{n-1})^4 + F_n(F_n^3 - 4F_{n-1}^3) & (F_n^2 + F_{n-1}^2)(F_n + 2F_{n-1})^2 - 5F_{n-1}^2 \\ * & F_n(F_n + 2F_{n-1})(3F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + 2F_{n-1}^2) & * \\ * & (F_n + F_{n-1})^4 + 2F_n^2[(F_n + 2F_{n-1})^2 + (F_n + F_{n-1})(F_n - F_{n-1})] & * \end{pmatrix}$$

漸化式その2

$$T^{5n} = \begin{pmatrix} F_{5n-3} & F_{5n-1} & F_{5n-2} \\ F_{5n-2} & F_{5n} & F_{5n-1} \\ F_{5n-1} & F_{5n+1} & F_{5n} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (F_n + F_{n-1})^5 - 10F_nF_{n-1}^2(F_n^2 + F_{n-1}^2) & * & * \\ * & (F_n + F_{n+1})^5 + 5F_n^3(F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + 2F_{n-1}^2) & * \\ * & -F_n^5 - F_{n-1}^5 & * \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (F_n + F_{n-1})^5 + F_{n-1}^5 & (F_n + F_{n+1})^5 + 5F_n^3(F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + 2F_{n-1}^2) & * \\ (F_n + F_{n+1})^5 + F_n^2(F_n^3 - 8F_{n-1}^3) - 2F_{n-1}^3(F_n^2 + F_{n-1}^2) & -F_n^5 - F_{n-1}^5 & * \\ (F_n + F_{n+1})^5 + 2F_n^3 & 3(F_n + F_{n+1})^5 + 5F_n^3(F_n + 2F_{n-1}) & * \\ + 5F_nF_{n-1}(F_n^3 - F_{n-1}^3) & -10F_nF_{n-1}^3(F_n + F_{n-1}) - 2F_{n-1}^5 & * \end{pmatrix}$$

日本フィボナッチ協会／第 22 回研究会

17

さらに、ここに挙げた 3×3 行列 T を n 乗すると F_{n-3} から F_{n+1} までを求めることができますが、行列の9つの要素をすべて F_n と F_{n-1} とで書くこともできます。

漸化式その1として T の $4n$ 乗と T の n 乗を4回かけた行列とから、 T_{4n-2} から T_{4n+1} までを F_n と F_{n-1} とであらわすことができました。

漸化式その2として T の $5n$ 乗と T の n 乗を5回かけた行列とから、 T_{5n-3} から T_{5n+1} までを F_n と F_{n-1} とであらわすことができました。

ここで用いた行列 T は、パドヴァン数(OEIS A000931)を表す 3×3 行列を参考に構成いたしました。詳細はCD-Rに収載の補足資料を参照願います。

同様の発想で、より大きな $n \times n$ 行列が構成できるかどうかは、まだ試しておりません。

再帰呼び出し回数の減少 アルゴリズムf3系

- アルゴリズムf3 (F_n と F_{n-1} で F_{2n} と F_{2n-1} を計算)

$$\begin{cases} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{2n} &= (F_n + 2F_{n-1}) F_n \\ F_{2n-1} &= F_n^2 + F_{n-1}^2 \end{cases}$$

- 再帰呼び出し回数の減少
- 計算コストの増大

- アルゴリズムf3c (F_{n-2} と F_{n-3} で F_{2n} と F_{2n-1} を計算)

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3 \\ F_{2n} = (F_{n-3} + 2F_{n-2})(3F_{n-3} + 4F_{n-2}) \\ F_{2n-1} = (F_{n-3} + 2F_{n-2})^2 + (F_{n-3} + F_{n-2})^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} F_n &= 2F_{n-2} + F_{n-3} \\ F_{n-1} &= F_{n-2} + F_{n-3} \end{aligned}$$

- アルゴリズムf3d (F_{n-4} と F_{n-5} で F_{2n} と F_{2n-1} を計算)

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5 \\ F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21 \\ F_{2n} = (3F_{n-5} + 5F_{n-4})(7F_{n-5} + 11F_{n-4}) \\ F_{2n-1} = (2F_{n-5} + 3F_{n-4})^2 + (3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} F_{n-2} &= 2F_{n-4} + F_{n-5} \\ F_{n-3} &= F_{n-4} + F_{n-5} \end{aligned}$$

再帰呼び出し回数を少しでも減らすことを考えます。

ここに示した3つのアルゴリズム(漸化式)では、 F_{2n} と F_{2n-1} をそれぞれ F_n と F_{n-1} とから、 F_{n-2} と F_{n-3} とから、 F_{n-4} と F_{n-5} とから計算します。変換に使うのは、スライド右側の漸化式を利用します。代入して整理すると、左側の3つのアルゴリズムが得られます。

計算してみた結果

- パフォーマンス(再帰呼び出し回数と計算時間)
- 応用例(Benfordの法則)

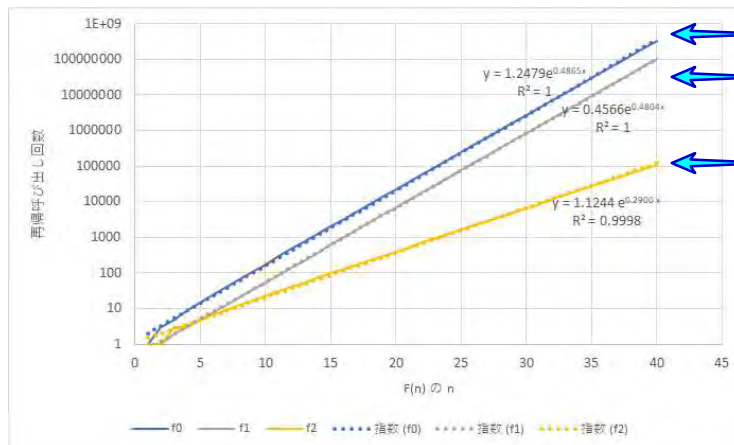
- 再帰呼び出し回数
 - $O(\exp(n))$ アルゴリズム
 - $O(n)$ アルゴリズム
 - $O(\log(n))$ アルゴリズム
- 計算時間
 - アルゴリズム f3系、f4系、f5系、f6系、fAdその他
- Benfordの法則
 - 最高位
 - 最初の3桁
 - 2桁目

ここから、計算結果について述べることにいたします。

まず、フィボナッチ数計算に関して、再帰呼び出し回数と計算時間の観点から、次いで応用問題としてBenford(ベンフォード)の法則について解説します。

再帰呼び出し回数

• $O(\exp(n))$ アルゴリズム [1]



黄金比1.6180に近い

プラスチック定数1.3247に近い

なぜ黄金比とプラスチック定数は、CD-Rに収載の補足資料に記載。

アルゴリズムf0

$$F_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases}$$

アルゴリズムf1

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 1 & (n=2) \\ 1 + \sum_{i=1}^{n-2} F_i & (n > 2) \end{cases}$$

アルゴリズムf2

$$F_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 1 & (n=2) \\ 2F_{n-2} + F_{n-3} & (n \geq 3) \end{cases}$$

日本フィボナッチ協会／第22回研究集会

20

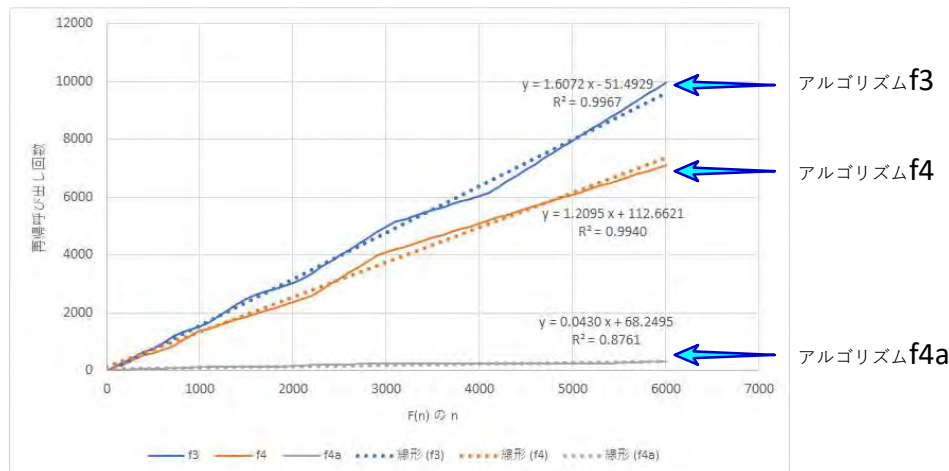
まず、再帰呼び出し回数に関して説明いたします。

ここに挙げましたのは、 n と再帰呼び出し回数との関係が指数関数的なアルゴリズムです。アルゴリズムf0は本来の定義式通り、アルゴリズムf1とf2は、それぞれここに挙げたとおりです。アルゴリズムf1の導出は補足資料に、またアルゴリズムf2については参考文献[1]に記載があります。

グラフより、アルゴリズムf0とf1の傾きは黄金比に近く、アルゴリズムf2の場合はプラスチック定数に近いことが分かります。詳しくは補足資料にまとめてあります。

再帰呼び出し回数

• $O(n)$ アルゴリズム



アルゴリズム f3

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{2n} = (F_n + 2F_{n-1})F_n \\ F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \end{cases}$$

アルゴリズム f4

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{3n+1} = F_{n+1}^3 + F_n^2(2F_{n+1} + F_{n-1}) \\ F_{3n} = F_n(F_{n+1}F_{n-1} + F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n-1}^2) \\ F_{3n-1} = F_{n-1}^3 + F_n^2(F_{n+1} + 2F_{n-1}) \end{cases}$$

アルゴリズム f4a

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{3n+1} = (F_n + F_{n-1})^3 + F_n^2(2F_n + 3F_{n-1}) \\ F_{3n} = F_n(2F_n^2 + 3F_nF_{n-1} + 3F_{n-1}^2) \\ F_{3n-1} = (F_n + F_{n-1})^3 - 3F_nF_{n-1}^2 \end{cases}$$

日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

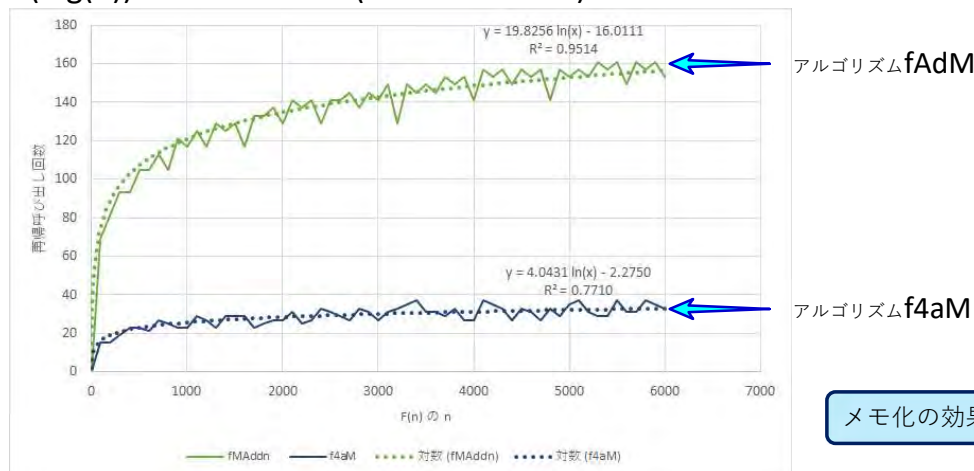
21

n と再帰呼び出し回数との関係が線形関数的なアルゴリズムです。アルゴリズム f3、f4、f4aの漸化式は、それぞれここに記載した通りです。これらの漸化式の導出に関しては、補足資料を参照願います。

結果は、グラフからわかるようにアルゴリズム f4aの再帰呼び出し回数が特に少なくなっています。アルゴリズム f4aの漸化式の計算量はアルゴリズム f4のそれとさほど変わらないにも拘らず、右辺の F_{n+1} の有無で再帰呼び出し回数に大きな差が出ています。

再帰呼び出し回数

- $O(\log(n))$ アルゴリズム (メモ化の利用)



アルゴリズム fAdM

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, F_1 = 1 \\ x &= n // 2 \quad (= \lfloor n/2 \rfloor) \\ F_n &= F_x F_{n-x} + F_{x-1} F_{n-x-1} \end{aligned}$$

アルゴリズム f4aM

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{3n+1} = (F_n + F_{n-1})^3 + F_n^2(2F_n + 3F_{n-1}) \\ F_{3n} = F_n(2F_n^2 + 3F_n F_{n-1} + 3F_{n-1}^2) \\ F_{3n-1} = (F_n + F_{n-1})^3 - 3F_n F_{n-1}^2 \end{cases}$$

日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

22

nと再帰呼び出し回数との関係が対数関数的なアルゴリズムです。アルゴリズム fAdM、f4aMの漸化式は、それぞれここに記載した通りです。これらの漸化式の導出に関しては、補足資料を参照願います。

結果は、グラフからわかるようにフィボナッチ数の加法定理に基づくアルゴリズム fAdMよりアルゴリズム f4aMのほうが再帰呼び出し回数は少なく、 F_{6000} 程度で40回弱です。

以上みてきたように、再帰呼び出し回数は、アルゴリズムによって大きく異なる。アルゴリズム f0のように F_{40} で1億回を超えるものがある一方、アルゴリズム f4aMのように F_{6000} 程度で40回弱の場合もあることが分かりました。

計算時間

- $F_{10000000}$ までの計算ができるアルゴリズムについて、計算時間を測定
- 測定は1回のみなので計算時間は誤差を含む
- 測定したアルゴリズムは、f3系、f4系、f5系、f6系並びにその他のアルゴリズム
- 結果はグラフにして示す

再帰呼び出し回数に引き続き、計算に要する時間について申し述べます。

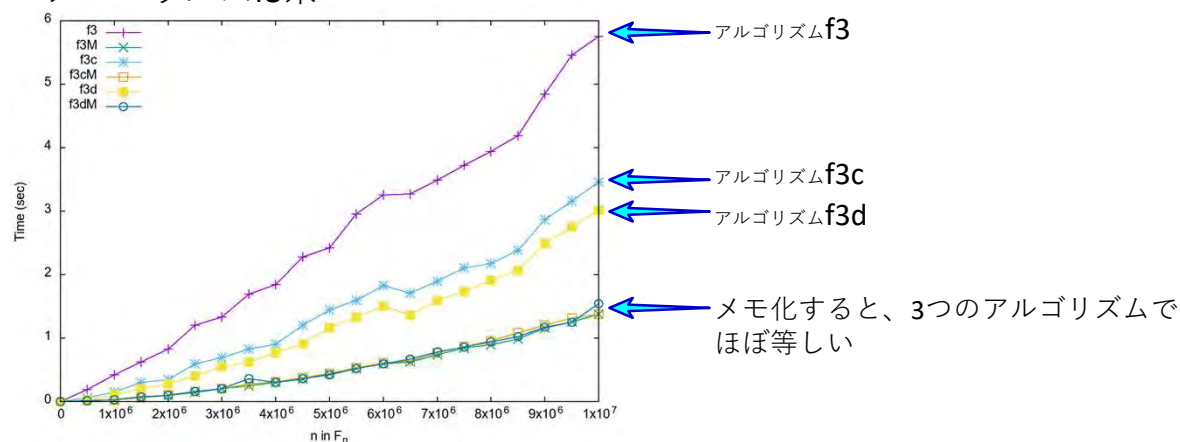
測定は1回行い、繰り返して平均は取りませんでした。そのため誤差を含みます。

選定したアルゴリズムは、 $F_{10000000}$ の計算がおおむね10秒以内に計算を終えるアルゴリズムです。f3系、f4系、f5系、f6系のアルゴリズム並びにその他のアルゴリズム(フィボナッチ数の加法定理を利用したアルゴリズム等)です。

次のスライド以降で、結果をグラフにして示します。

計算時間

• アルゴリズムf3系



アルゴリズムf3

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{2n} = (F_n + 2F_{n-1})F_n \\ F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \end{cases}$$

アルゴリズムf3c

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3 \\ F_{2n} = (F_{n-3} + 2F_{n-2})(3F_{n-3} + 4F_{n-2}) \\ F_{2n-1} = (F_{n-3} + 2F_{n-2})^2 + (F_{n-3} + F_{n-2})^2 \end{cases}$$

アルゴリズムf3d

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5 \\ F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21 \\ F_{2n} = (3F_{n-5} + 5F_{n-4})(7F_{n-5} + 11F_{n-4}) \\ F_{2n-1} = (2F_{n-5} + 3F_{n-4})^2 + (3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 \end{cases}$$

日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

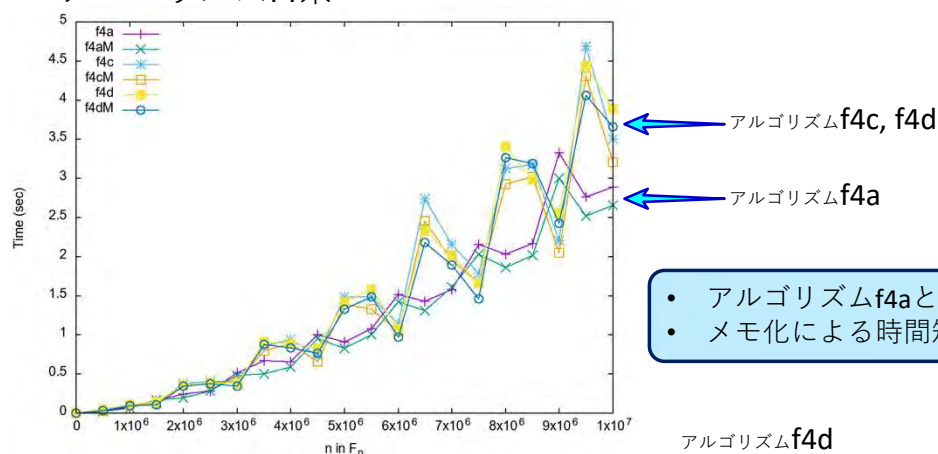
24

アルゴリズムf3系の結果について示します。アルゴリズムf3、f3cとf3dの3種類で、漸化式はスライドに挙げたとおりです。

計算時間はf3>f3c>f3dの順でした。しかし、メモ化をすると3つのアルゴリズムの実行時間はほぼ等しくなりました。

計算時間

• アルゴリズムf4系



アルゴリズムf4a

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{3n+1} = (F_n + F_{n-1})^3 + F_n^2(2F_n + 3F_{n-1}) \\ F_{3n} = F_n(2F_n^2 + 3F_nF_{n-1} + 3F_{n-1}^2) \\ F_{3n-1} = (F_n + F_{n-1})^3 - 3F_nF_{n-1} \end{cases}$$

アルゴリズムf4c

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13 \\ F_{3n+1} = [(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^3 - 2(F_{n-3} + 2F_{n-2})^3 + (F_{n-3} + F_{n-2})^3] / 2 \\ F_{3n} = (F_{n-3} + 2F_{n-2}) [3(F_{n-3} + F_{n-2})^2 + (F_{n-3} + 2F_{n-2})^2 + 3(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^2] / 2 \\ F_{3n-1} = [(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^3 - 2(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^3 - 4(F_{n-3} + 2F_{n-2})^3 + 3(F_{n-3} + F_{n-2})^3] / 2 \end{cases}$$

アルゴリズムf4d

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34 \\ F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233 \\ F_{3n+1} = [(8F_{n-5} + 13F_{n-4})^3 - 2(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^3 + (2F_{n-5} + 3F_{n-4})^3] / 2 \\ F_{3n} = (3F_{n-5} + 5F_{n-4}) [3(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^2 + (3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 + 3(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^2] / 2 \\ F_{3n-1} = [(8F_{n-5} + 13F_{n-4})^3 - 2(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^3 - 4(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^3 + 3(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^3] / 2 \end{cases}$$

日本フィボナッチ協会／第22回研究集会

25

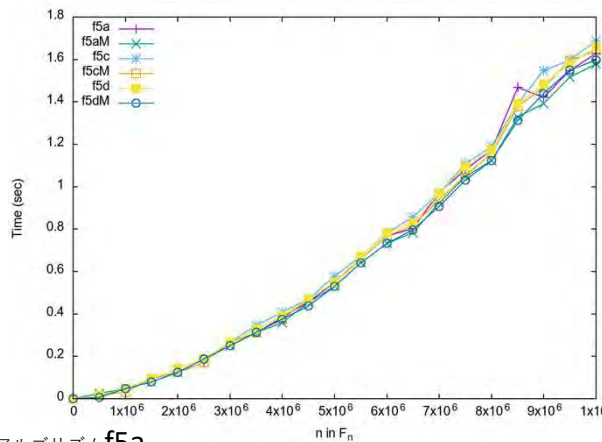
アルゴリズムf4系の結果について示します。アルゴリズムf4a、f4cとf4dの3種類で、漸化式はスライドに挙げたとおりです。

計算時間はアルゴリズムf4aとアルゴリズムf4c、f4dで互い違いになりました。この現象の原因はまだわかっておりません。

またメモ化の有無で、計算時間に大きな影響はありませんでした。これは、アルゴリズムf4系では再帰呼び出し回数が少ないためだと考えられます。

計算時間

• アルゴリズムf5系



アルゴリズム f5a, f5c, f5d

- アルゴリズムによる違いはほぼない
- メモ化による時間短縮の効果もほぼない

アルゴリズムf5a

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2 \\ F_{4n+1} = (F_n + F_{n-1})^4 + 2F_n^2[(F_n + 2F_{n-1})^2 + (F_n + F_{n-1})(F_n - F_{n-1})] \\ F_{4n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})[2(F_n + F_{n-1})^2 + F_n(F_n - 2F_{n-1})] \\ F_{4n-1} = (F_n + F_{n-1})^4 + F_n(F_n^3 - 4F_{n-1}^3) \\ F_{4n-2} = (F_n^2 + F_{n-1}^2)[(F_n + 2F_{n-1})^2 - 5F_{n-1}^2] \end{cases}$$

アルゴリズムf5c

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34 \\ F_{4n+1} = [(5F_{n-3} + 8F_{n-2})^4 - 3(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^4 - 12(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^4 \\ \quad + 9(F_{n-3} + 2F_{n-2})^4 + 5(F_{n-3} + F_{n-2})^4] / 6 \\ F_{4n} = (F_{n-3} + 2F_{n-2})(3F_{n-3} + 4F_{n-2})[5(F_{n-3} + 2F_{n-2})^2 + (3F_{n-3} + 4F_{n-2})^2] / 2 \\ F_{4n-1} = [2(5F_{n-3} + 8F_{n-2})^4 - 9(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^4 - 30(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^4 \\ \quad + 24(F_{n-3} + 2F_{n-2})^4 + 13(F_{n-3} + F_{n-2})^4] / 6 \\ F_{4n-2} = [(F_{n-3} + 2F_{n-2})^2 + (F_{n-3} + F_{n-2})^2] \times [2(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^2 - (F_{n-3} + 2F_{n-2})^2 - 3(F_{n-3} + F_{n-2})^2] \end{cases}$$

アルゴリズムf5d

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34 \\ F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233, F_{14} = 377, F_{15} = 610 \\ F_{16} = 987, F_{17} = 1597 \\ F_{4n+1} = [13(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^4 + 24(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^4 - 30(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^4 \\ \quad - 9(F_{n-5} + 2F_{n-4})^4 + 2(F_{n-5} + F_{n-4})^4] / 6 \\ F_{4n} = (3F_{n-5} + 5F_{n-4})(7F_{n-5} + 11F_{n-4})[5(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 + (7F_{n-5} + 11F_{n-4})^2] / 2 \\ F_{4n-1} = [5(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^4 + 9(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^4 - 12(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^4 \\ \quad - 3(F_{n-5} + 2F_{n-4})^4 + (F_{n-5} + F_{n-4})^4] / 6 \\ F_{4n-2} = [(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 + (2F_{n-5} + 3F_{n-4})^2] \times [3(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^2 + (2F_{n-5} + 3F_{n-4})^2 - 2(F_{n-5} + 2F_{n-4})^2] \end{cases}$$

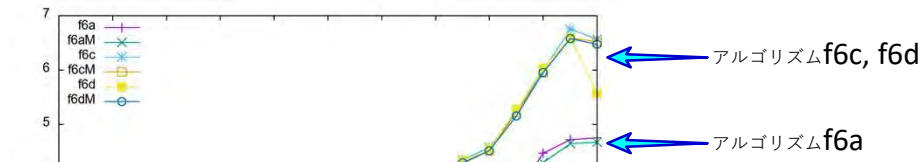
アルゴリズムf5系の結果について示します。アルゴリズムf5a、f5cとf5dの3種類で、漸化式はスライドに挙げたとおりです。

計算時間は、3つのアルゴリズムでほとんど違いはありませんでした。

またメモ化の有無で、計算時間に大きな影響はありませんでした。これはアルゴリズムf5系でも、f4系同様再帰呼び出し回数が少ないためだと考えられます。

計算時間

• アルゴリズムf6系



- f6c, f6dは式変形がうまく働いていない
- メモ化による時間短縮の効果はない

アルゴリズムf6a

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3 \\ F_{3n+1} &= 3(F_n + F_{n-1})^5 + 5F_n^4(F_n + 2F_{n-1}) - 10F_nF_{n-1}^4(F_n + F_{n-1}) - 2F_{n-1}^5 \\ F_{3n} &= (F_n + F_{n-1})^5 + 5F_n^4(F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + 2F_{n-1}^2) - F_n^5 - F_{n-1}^5 \\ F_{3n-1} &= (F_n + F_{n-1})^5 + 2F_n^4 + 5F_nF_{n-1}(F_n^3 - F_{n-1}^3) \\ F_{3n-2} &= (F_n + F_{n-1})^5 + F_n^4(F_n^3 - 8F_{n-1}^3) - 2F_{n-1}^4(F_n^2 + F_{n-1}^2) \\ F_{3n-3} &= (F_n + F_{n-1})^5 - 10F_nF_{n-1}^4(F_n^2 + F_{n-1}^2) + F_{n-1}^5 \end{aligned}$$

アルゴリズムf6c

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34 \\ F_{10} &= 55, F_{11} = 89 \\ F_{3n+1} &= [-3(8F_{n-3} + 13F_{n-2})^5 + 25(5F_{n-3} + 8F_{n-2})^5 + 120(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^5 \\ &\quad - 195(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^5 - 105(F_{n-3} + 2F_{n-2})^5 + 34(F_{n-3} + F_{n-2})^5] / 30 \\ F_{3n} &= [(8F_{n-3} + 13F_{n-2})^5 - 8(5F_{n-3} + 8F_{n-2})^5 - 39(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^5 \\ &\quad + 63(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^5 + 34(F_{n-3} + 2F_{n-2})^5 - 11(F_{n-3} + F_{n-2})^5] / 6 \\ F_{3n-1} &= [-8(8F_{n-3} + 13F_{n-2})^5 + 65(5F_{n-3} + 8F_{n-2})^5 + 315(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^5 \\ &\quad - 510(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^5 - 275(F_{n-3} + 2F_{n-2})^5 + 89(F_{n-3} + F_{n-2})^5] / 30 \\ F_{3n-2} &= [13(8F_{n-3} + 13F_{n-2})^5 - 105(5F_{n-3} + 8F_{n-2})^5 - 510(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^5 \\ &\quad + 825(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^5 + 145(F_{n-3} + 2F_{n-2})^5 + 144(F_{n-3} + F_{n-2})^5] / 30 \\ F_{3n-3} &= [-21(8F_{n-3} + 13F_{n-2})^5 + 170(5F_{n-3} + 8F_{n-2})^5 + 825(3F_{n-3} + 5F_{n-2})^5 \\ &\quad - 1335(2F_{n-3} + 3F_{n-2})^5 - 720(F_{n-3} + 2F_{n-2})^5 + 233(F_{n-3} + F_{n-2})^5] / 30 \end{aligned}$$

アルゴリズムf6d

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34 \\ F_{10} &= 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233, F_{14} = 377, F_{15} = 610, F_{16} = 987 \\ F_{17} &= 1597, F_{18} = 2584, F_{19} = 4181, F_{20} = 6765, F_{21} = 10946 \\ F_{3n+1} &= [8(8F_{n-5} + 13F_{n-4})^5 + 25(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^5 - 45(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^5 \\ &\quad - 30(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^5 + 5(F_{n-5} + 2F_{n-4})^5 + (F_{n-5} + F_{n-4})^5] / 30 \\ F_{3n} &= [(8F_{n-5} + 13F_{n-4})^5 + 3(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^5 - 6(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^5 \\ &\quad - 3(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^5 + (F_{n-5} + 2F_{n-4})^5 + 0(F_{n-5} + F_{n-4})^5] / 6 \\ F_{3n-1} &= [3(8F_{n-5} + 13F_{n-4})^5 + 10(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^5 - 15(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^5 \\ &\quad - 15(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^5 + 0(F_{n-5} + 2F_{n-4})^5 + (F_{n-5} + F_{n-4})^5] / 30 \\ F_{3n-2} &= [2(8F_{n-5} + 13F_{n-4})^5 + 5(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^5 - 15(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^5 \\ &\quad + 0(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^5 + 5(F_{n-5} + 2F_{n-4})^5 - 1(F_{n-5} + F_{n-4})^5] / 30 \\ F_{3n-3} &= [(8F_{n-5} + 13F_{n-4})^5 + 5(5F_{n-5} + 8F_{n-4})^5 + 0(3F_{n-5} + 5F_{n-4})^5 \\ &\quad - 15(2F_{n-5} + 3F_{n-4})^5 - 5(F_{n-5} + 2F_{n-4})^5 + 2(F_{n-5} + F_{n-4})^5] / 30 \end{aligned}$$

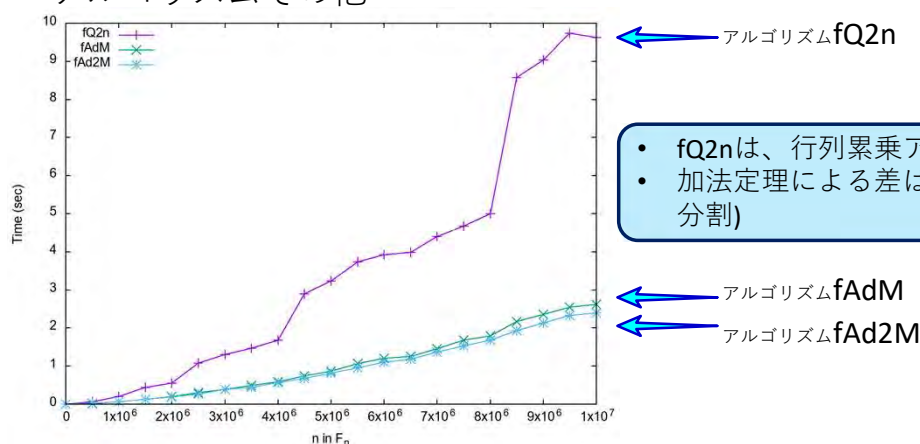
アルゴリズムf6系の結果について示します。アルゴリズムf6a、f6cとf6dの3種類で、漸化式はスライドに挙げたとおりです。

計算時間は、アルゴリズムf6aと比較して、アルゴリズムf6cとf6dでは若干計算時間がかかってしまいました。これは漸化式のまとめ方が悪く1ステップ当たりの四則演算の回数が増えてしまったからだと考えられます。どなたか式変形の効率をよくなる方法をご存じではないでしょうか。

またメモ化の有無で、計算時間に大きな影響はありませんでした。これはアルゴリズムf6系でも、f4系同様再帰呼び出し回数が少ないためだと考えられます。

計算時間

• アルゴリズムその他



- fQ2nは、行列累乗アルゴリズム
- 加法定理による差は小(両者ほぼ半々に分割)

アルゴリズム fQ2n

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q^{n-1} の(1, 1)成分

アルゴリズム fAdM

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$x = n // 2 (= \lfloor n/2 \rfloor)$$

$$F_n = F_x F_{n-x} + F_{x-1} F_{n-x-1}$$

アルゴリズム fAd2M

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$$

$$x = n // 2 (= \lfloor n/2 \rfloor)$$

$$F_n = F_{x+1} F_{n-x} - F_{x-1} F_{n-x-2}$$

実際のプログラムは、CD-R参照

日本フィボナッチ協会／第22回研究集会

28

このスライドでは、行列 Q の累乗に基づくアルゴリズムfQ2nと、フィボナッチ数の加法定理に基づくアルゴリズムfAdMとfAd2Mについての結果を示します。

2種類の加法定理に基づくアルゴリズム間には、大きな差は見られませんでした。一方行列累乗に基づくfQ2nの方はより長い時間を要しました。

アルゴリズムfQ2nの場合、グラフに凹凸が見られますが、これがバラツキかどうかはさらなる検討を要します。

計算時間についてのまとめ

- アルゴリズムによりパフォーマンスに差
 - 「計算の複雑さ」と「再帰呼び出し回数」のトレードオフ
- アルゴリズムf4系、f5系、f6系ではメモ化の効果は小
 - 再帰呼び出し回数が少ないため
- 最速なアルゴリズム
 - f3系+メモ化。例えばアルゴリズムf3M
 - 次いでf5系。例えばアルゴリズムf5aやf5aM
- その他コメント
 - アルゴリズムf6系は式変形に問題があり、f6a系よりf6c系、f6d系が遅い
 - 高速に計算させるためには、加減乗除の演算回数をいかに減らすかが課題

計算時間についてまとめます。

アルゴリズムが複雑になるほど再帰呼び出し回数は減りますが、逆に計算の複雑化による計算コストは増加し、トレードオフの関係にあります。

アルゴリズムf4系、f5系、f6系ではメモ化の効果は少なくなります。再帰呼び出し回数が少なくなるためです。

結局、速いアルゴリズムはf3M、次いでf5系のf5aやf5aMです。

複雑なアルゴリズムの場合、いかに四則演算を効率化するかが課題になります。

Benford's Law (ベンフォードの法則)

- 数字の最高位

- 多くの場合1の出現頻度が最も高く、次いで2,3,...,9の順に低くなる*)
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181,

最高位 (d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	計19
頻度	5	4	3	1	2	1	0	2	1	
確率	0.26	0.21	0.16	0.05	0.11	0.05	0.00	0.11	0.05	
計算値	0.30	0.18	0.13	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.05	

- Benfordの法則

多くの場合、整数や実数を指数形式 $x = D_1.D_2D_3 \cdots D_m \times 10^n$ にした時の仮数部の最初の桁(最高位)に現れる数(D_1)は一樣に分布しない。具体的には D_1 が d となる確率は

$$P(D_1 = d) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right) \quad (d = 1, 2, \dots, 9)$$

に近いことが多い。

- 上位 m 桁目までの確率 (最高位の場合 $m=1$)の和は1 (確率なので)

$$\sum_{d=10^{m-1}}^{10^m-1} \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right) = 1$$

*) 日本人の身長(殆ど1で始まる)等は該当しない。

日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

30

フィボナッチ数の計算ができるようになったので、ここでBenfordの法則についてみてみます。今年の京都大学の入試問題(理系)で、関連する問題が出題されていたので、やってみることにしました。Benfordの法則は、数字の最高位に関して、多くの場合1の出現頻度が最も高く、次いで2,3,...,9の順に低くなることに関する法則です。

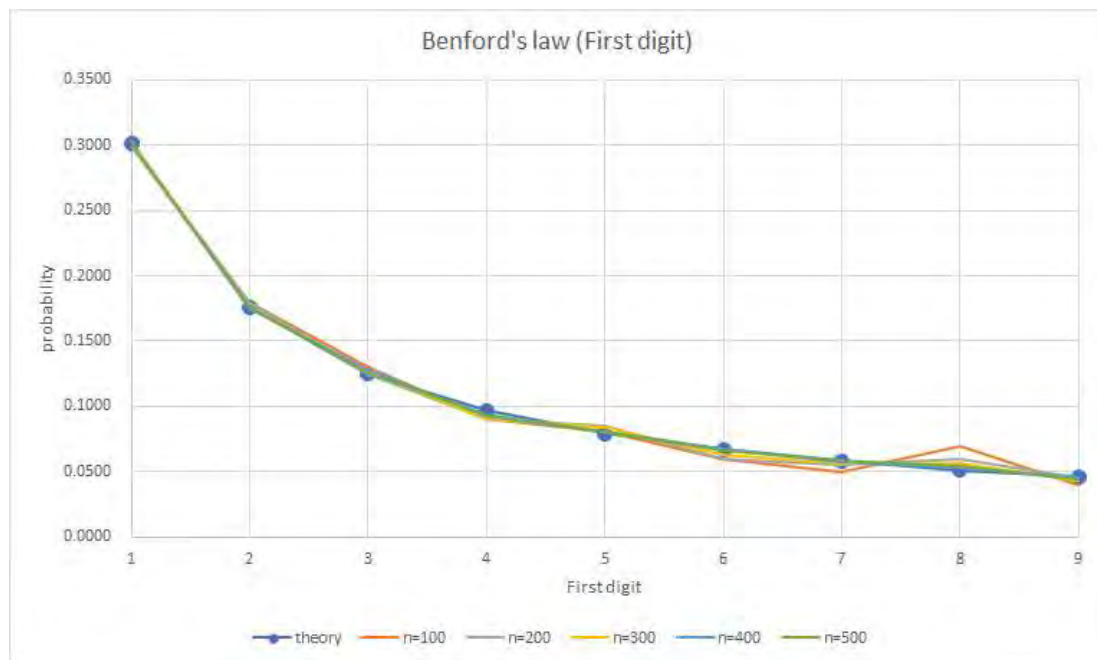
フィボナッチ数の1,1,2,3,...,4181についての最高位の頻度とその確率を計算地と比較した表を挙げてみます。この19個の数字でも傾向はみられるので、数字を増やして確認してみます。

今日、Benfordの法則は、スライド中央の青い四角で囲ったところに記載したようにまとめられています。

Benfordの法則はすべての場合に当てはまるわけではありません。例えば日本人の身長は、ほとんど1で始まる(最高位が1)ため、法則通りの分布にはなりません。

Benfordの法則の計算結果 その1

- 最高位 (First Digit, 1 ~ 9)



日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

31

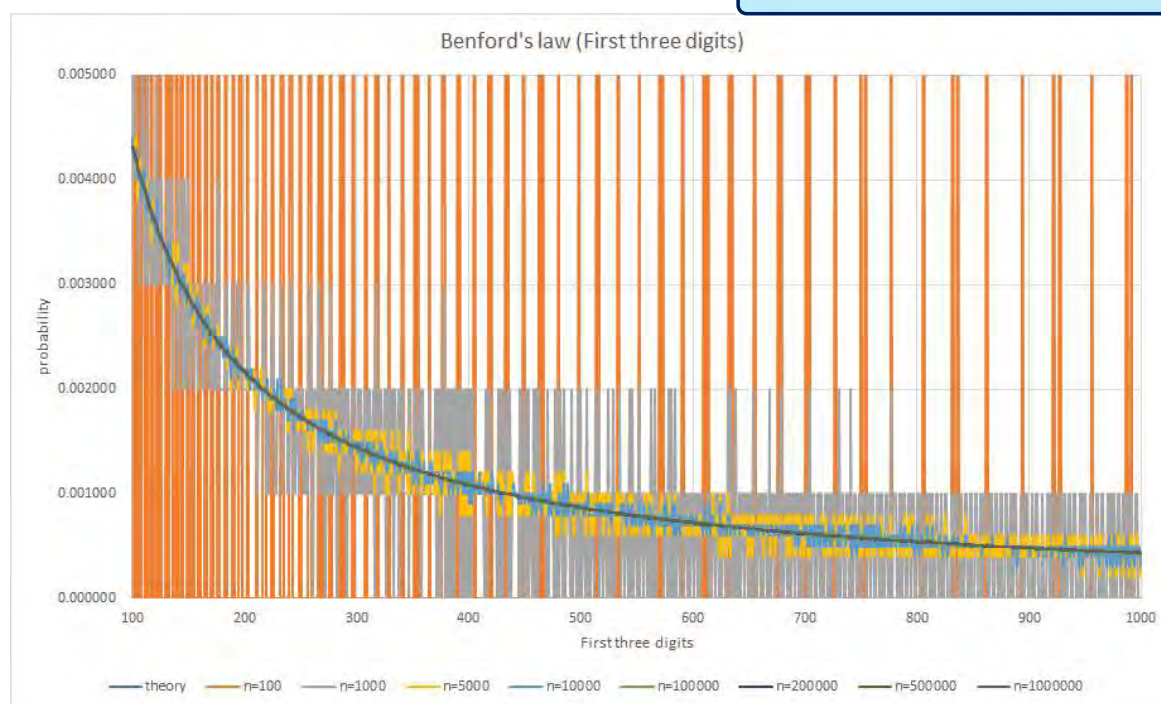
フィボナッチ数の最高位(First Digit)についてデータをとってみました。
最初の500個ほどのデータでほぼ理論値通りの分布になりました。
収束は速いといえそうです。

ここでの計算はPythonでフィボナッチ数を計算し、Excelで集計・グラフ化しました。

Benfordの法則の計算結果 その2

- 最初の3桁 (First Three Digits , 100 ～ 999)

最高桁の場合と比較して収束が遅い。



日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

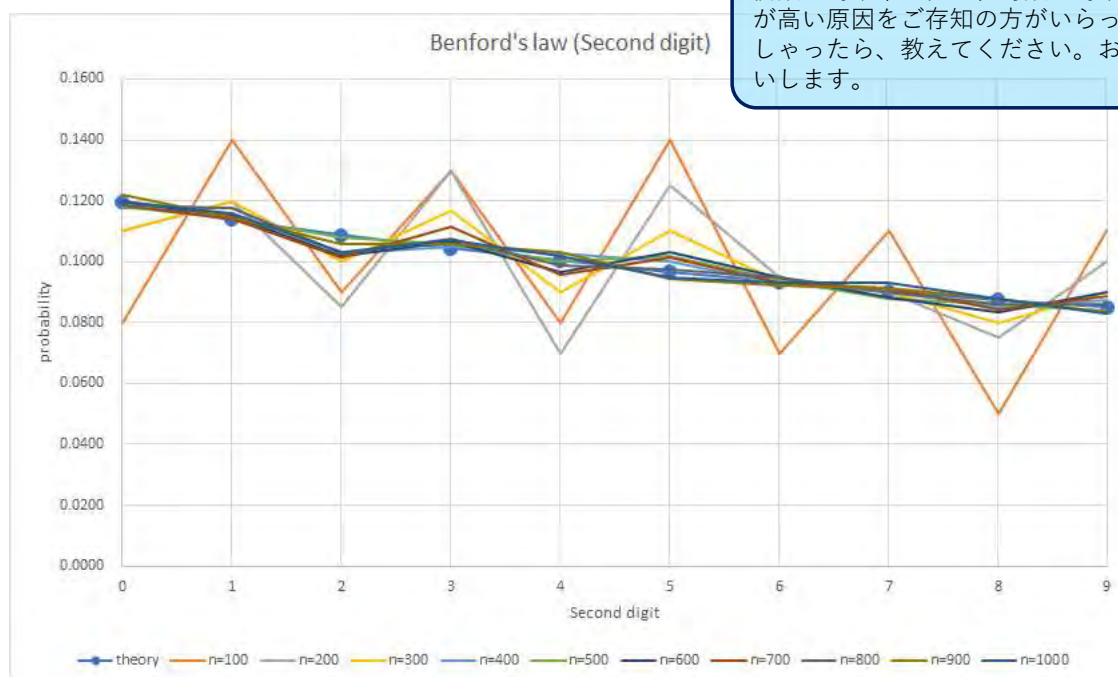
32

フィボナッチ数の最初の3桁(First Three Digits)についてデータをとってみました。
最初の200000個ほどのデータでほぼ理論値通りの分布になりました。
先ほどと比較して、収束は遅いといえそうです。

ここでの計算はPythonでフィボナッチ数を計算し、Excelで集計・グラフ化しました。

Benfordの法則の計算結果 その3

- 2桁目 (Second Digit, 0 ~ 9)



日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

33

フィボナッチ数の最初の2桁目(Second Digit)についてデータをとってみました。

最初の500個ほどのデータでほぼ理論値通りの分布になりました。先ほどと比較して、収束は速いといえそうです。

ここでの計算はPythonでフィボナッチ数を計算し、Excelで集計・グラフ化しました。

スライド中のグラフに関して、2桁目が偶数の時確率が低く、奇数の時確率が高い傾向がみられている。この現象の原因については、不明である。さらなる検討を要する。

アプリの作成

- Pythonのプログラムを実行し、結果を得るwindowsアプリを作成
 - フリーの開発環境であるLazarus (ラザロ、ラザラス) を用いて作成



日本フィボナッチ協会／第 22 回研究集会

34

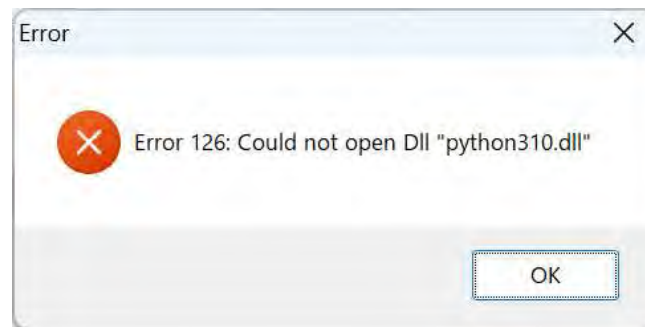
パソコンでPythonが実行できない方のためにWindows用のアプリを作成しました。スクリーンショットを示します。開発は無料の開発環境である64ビット版Lazarus [11]にて行いました。

簡略化したアプリなので本格的な開発は難しいのですが、フィボナッチ数を求める程度であれば十分実行可能です。

計算が重すぎてフリーズした場合には、画面右上の×をクリックしてください。

アプリの不具合発覚

- Lazarusが搭載されていないパソコンでの起動時
 - 下記メッセージが表示
 - python310.dllとvcruntime140.dllをいくつかの場所に置いてみたが解決せず
 - 付属CD-Rにpython310.dllとvcruntime140.dllを同梱しておく。解決策をご存じの方、教えてください。



素直にPythonの開発環境を整えるのが、最も近道かもしれない。

今回作成したアプリですが、発表3日前になって不具合が発覚しました。

Pythonがインストールされていないパソコンでは、スライドに示したエラーが発生します。エラーメッセージに従い、python310.dllとvcruntime140.dllをいくつかの場所に置いてみたが解決しませんでした。

どなたか当方より詳しい方、解決策をいろいろ教えてください。素直にPythonの環境をインストールした方が手っ取り早いのもかもしれません。

まとめ

- まとめ
 - フィボナッチ数を $F_{10000000}$ 程度まで、効率よく計算
 - プログラミングにはPython言語を使用
 - 割と多くのアルゴリズムを比較
- 今後
 - リュカ数等他の定数への展開。パドヴァン数 (OEIS [A000931](#)) については一部計算 (添付の補足資料に漸化式の解説とPythonのソースコード記載)
 - 算数教育、数学教育への応用
 - JITコンパイラ (実行時コンパイラ) を利用した高速化
 - Numba (JITコンパイラの一つ) は多倍長整数に未対応
 - Benfordの法則以外への応用
 - 作成したアプリを、正常に動作させること

以上、発表をまとめます。

- フィボナッチ数を $F_{10000000}$ 程度まで、効率よく計算できました。
- プログラミングにはPython言語を採用しました。
- 割と多くのアルゴリズムを比較しました。

今後は、

- リュカ数等、他の定数の計算。
 - 算数教育、数学教育への応用。
 - さらなる高速化。
 - Benfordの法則以外への応用。
 - 作成したアプリの正常な動作。
- を目指したいと考えております。

参考文献

1. 岡本吉央、アルゴリズムを勉強する前に読む 12 章 連載第 10 回 再帰、数学セミナー、2024 年 1 月号、pp.60-65
2. Th. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications Second Edition, Vol.1, Wiley, 2018, ISBN 978-1-118-74212-9
3. 中村滋、改訂版フィボナッチ数の小宇宙(マイクロコスモス)、日本評論社、2008, ISBN 978-4-535-78492-5
4. Rosetta code のフィボナッチ数
https://rosettacode.org/wiki/Fibonacci_sequence
5. 奥村晴彦、改訂新版 C 言語による標準アルゴリズム事典、技術評論社、2018, ISBN 978-4-7741-9690-9
6. 中川幸一、プラスチック定数の有理数乗の辺の長さを持つ三角形、第 17 回日本フィボナッチ協会研究集会報告書、2019 年 8 月 23 日
7. Christian Hill、大窪貴洋、松本洋介、飯島隆広、堀田英之訳、Python 科学技術計算 物理・化学を中心に第 2 版、東京化学同人、2023, ISBN 978-4-8079-2057-0
8. A.Berger, Th.P.Hill, an Introduction to Benford's Law, Princeton University Press, 2015, ISBN 978-0-691-16306-2
9. エドワード・シャイナーマン、水谷淳訳、数学の傑作を味わう 驚異の 23 のエッセンス、SBクリエイティブ、2019, ISBN 978-4-7973-9928-8
10. 大学への数学 2024 年 4 月号、特集 2024 年大学入試問題
11. 中村州男、無料の Lazarus で簡単！プログラミング 第 2 版、パプファンセルフ、2024, ISBNなし、アマゾンにて購入

参考文献を挙げておきます。

参考文献[1]は、今回フィボナッチ数についてまとめるきっかけとなった記事です。

参考文献[2][3]は、フィボナッチ数に関する基本的な書籍です。

参考文献[4]には、いろいろなプログラムがあります。

参考文献[5][6]のプログラムを参考にしました。

参考文献[7][8][9][10]には、Benfordの法則について記載されています。

参考文献[11]は、アプリ作成の参考書です。腕に覚えのある方は、アプリを完成させてみてください。(出来たら当方にも教えてください。)

最後に

ご清聴ありがとうございました。

いくつかの未解決な点に関しては、今も
考え続けております。

CD-Rに同梱の全てのPythonのソースコー
ドは、ご自由に改変してご使用いただい
ても構いません。

腕に覚えのある方は、アルゴリズムの改
良に挑戦してみてもいかがでしょうか。

CD-Rや補足資料にご興味を持たれた方は、
下記アドレスまでご連絡を。

kk62526[ここに@マーク]gmail.com

発表当日添付しましたCD-Rに、より詳細な補足資料とすべてのPythonのプログラムが収載されております。また応用問題として、パドヴァン数を求める漸化式とそのPythonプログラムについても記しております。

すべてのPythonのプログラムは、ご自由に改変してご使用いただいても構いません。

発表は以上となります。
ご清聴ありがとうございました。

フィボナッチ二項係数を用いた F_{kn} に関する表現

A certain sum formula derived from Fibonomial coefficient

吉田 佑恭

1. 紹介

はじめに、フィボナッチ階乗とフィボナッチ二項係数について説明しておく。

$$n!_F = \prod_{i=1}^n F_i \quad 1$$

$$\binom{n}{r}_F = \frac{n!_F}{r!_F (n-r)!_F} \quad 2$$

このフィボナッチ二項係数を用いた式として(3)が知られている¹。

$$\sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{t-k} \binom{n}{r}_F F_{n-k}^r = 0 \quad 3$$

この発表では、この式と形が似ている(が異なる)関係について考察したので紹介したい；

#自然数 k において、

$$(n-1)!_F F_{kn} = \sum_{m=1}^k (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \binom{k-1}{k-m}_F F_{n-m+\frac{k+1}{2}}^k \quad 4$$

#特に k が偶数のとき、

$$(n-1)!_F F_{kn+1} = \sum_{m=1}^k (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \binom{k-1}{k-m}_F F_{n-m+\frac{k+3}{2}}^k \quad 5$$

2. 式の内容

まずは、 k が奇数の場合において式(4)が表す意味について説明すると、

$$\begin{aligned} (F_n &= F_n^1) && \cdots k=1 \text{ の場合} \\ F_{3n} &= F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 && \cdots k=3 \text{ の場合}^2 \\ 6F_{5n} &= F_{n+2}^5 + 3F_{n+1}^5 - 6F_n^5 - 3F_{n-1}^5 + F_{n-2}^5 && \cdots k=5 \text{ の場合} \\ 240F_{7n} &= F_{n+3}^7 + 8F_{n+2}^7 - 40F_{n+1}^7 - 60F_n^7 + 40F_{n-1}^7 + 8F_{n-2}^7 - F_{n-3}^7 && \cdots k=7 \text{ の場合} \end{aligned}$$

¹ [Dov Jarden, 1966]

² 既出：オンライン整数列大辞典 <https://oeis.org/A014445>

以上のように右辺の係数は“Fibonomial Triangle³”に一致していることがわかる。

続いて k が偶数の場合を考えるが、便宜的に F_{kn+1} の形にしておく (F_{kn} と同質)。

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad 6$$

$$2F_{4n+1} = F_{n+2}^4 + 2F_{n+1}^4 - 2F_n^4 - F_{n-1}^4 \quad 7$$

係数に着目すると、右辺にフィボナッチ二項係数が現れるという状況は変わっていないことが窺える。

一方の左辺の係数であるが、 k の値との関係を示すと以下のようなになる⁴；

$$k=1 \quad 1$$

$$k=2 \quad 1$$

$$k=3 \quad 1$$

$$k=4 \quad 2$$

$$k=5 \quad 6$$

$$k=6 \quad 30$$

$$k=7 \quad 240$$

ここから、左辺の係数は $k-1$ のフィボナッチ階乗であることが推測される。

なお、式(4)の k に偶数を代入した場合に

$$F_{2n} = F_{n+\frac{1}{2}}^2 + F_{n-\frac{1}{2}}^2 \quad 8$$

$$2F_{4n} = F_{n+\frac{3}{2}}^4 + 2F_{n+\frac{1}{2}}^4 - 2F_{n-\frac{1}{2}}^4 - F_{n-\frac{3}{2}}^4 \quad 9$$

というような式が出てきてしまうが、これは(6),(7)に $n = \frac{2n+1}{2}$ を代入したものと見ることができる。この場合、 n の定義域は整数ではなく $Z + \frac{1}{2}$ の形で表される数 (0.5, 1.5, 2.5...) であると考えたい。(5)は n を整数とした場合である。

3. リュカ数への拡張

次に、以上の内容(4),(5)をリュカ数に対して適用してみる。リュカ数 L_n とは初項を変えたフィボナッチ数列の一種である。

$$\begin{cases} L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \\ L_0 = 2, \quad L_1 = 1 \end{cases}$$

このような L_{kn} において(4)のような式を立てたところ、 k が奇数を代入した場合には左辺の係数が異なるものの成立することが確かめられた。

³ 「パスカルの三角形」のように、フィボナッチ二項係数を三角形状に並べたもの

(6) 既出：オンライン整数列大辞典 <https://oeis.org/A001906>

⁴ ここでは敢えて k を奇数と偶数に分けずに並べた。

$$150L_{5n} = L_{n+2}^5 + 3L_{n+1}^5 - 6L_n^5 - 3L_{n-1}^5 + L_{n-2}^5 \quad \cdots k=5 \text{ の場合}$$

一方で、k が偶数の場合では左辺 (L_{kn}) と右辺との比が一定にならず、したがって(4)のような式で表すことができない。そこで偶数の場合では左辺に対する右辺の比の極限を求め、「左辺の係数の近似値」とすることにした。k との対応は以下の通り；

$$\begin{aligned} k=1 & 1 \\ k=2 & \sqrt{5} \\ k=3 & 5 \\ k=4 & 10\sqrt{5} \\ k=5 & 150 \end{aligned}$$

したがって左辺の係数（および近似値）は、 $(\sqrt{5})^{k-1} (k-1)!_F$ と表されることが考えられる。

4. 予想

これは 3.を踏まえてさらに拡張した予想であるが、大まかに説明すると、 $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$ である数列において

$$t^{n-1} (n-1)!_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^k (-1)^{\frac{m+1}{2}} \binom{k-1}{k-m}_F G_{n-m+\frac{k+1}{2}}^k}{G_{kn}} \quad 10?$$

という関係が成り立つのではないかというものである。

5. 展望

今後の課題としては、m の幅や符号の組み合わせのバリエーションを変えてみることを考えている。また、“Pellonomial coefficients”への適用についても試してみたい。

1					
1	1				
1	2	1			
1	5	5	1		
1	12	30	12	1	
1	29	174	174	29	1

↑ Pellonomial coefficients

黄金比に収束する数列

第22回フィボナッチ協会研究集会

芝高校 3 年 塩野 彰悟

拡張

フィボナッチ数列について

$F_{n+1}=F_n+f_n$ ($F_1=1, f_1=0$) のように捉える事が出来て、これを数列 $X(t,n)$ で拡張したい。
 $f_{n+1}=F_n$

自然数 m に対して $X(t,2)=1$ かつ $X(t,n+1)=\sum_{k=1}^{m-t+1} X(k,n)$ (t は $1 \leq t \leq m$ を満たす全ての整数)を満たす。

先述の数列は $m=2$ の時

$$X(1,n+1)=X(1,n)+X(2,n)$$

$$X(2,n+1)=X(1,n)$$

$$(X(1,2)=X(2,2)=1)$$

(F_n に $X(1,n)$ 、 f_n に $X(2,n)$ が対応する)

また、例えば $m=3$ の時

$$X(1,n+1)=X(1,n)+X(2,n)+X(3,n)$$

$$X(2,n+1)=X(1,n)+X(2,n)$$

$$X(3,n+1)=X(1,n)$$

$$(X(1,2)=X(2,2)=X(3,2)=1)$$

となる。

収束

フィボナッチ数列($m=2$)では $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} X(1,n+1)/X(1,n) = \phi$ が有名だが、 m を変えた場合の $\lim_{n \rightarrow \infty} X(1,n+1)/X(1,n)$ を求めたい。

十分に n が大きいとき、明らかに全ての t で $X(t-1,n-1) > X(t,n-1)$ より $\frac{1}{m-t+1} X(t,n) > \frac{1}{m} X(1,n)$ である。

つまり $X(1,n+1) = \sum_{t=1}^m X(t,n) > \sum_{t=1}^m \frac{m-t+1}{m} X(1,n) = \frac{m+1}{2} X(1,n)$ が成立する。

また $mX(1,n) > X(1,n+1)$ でもあるため、つまり $\frac{m+1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} X(1,n+1)/X(1,n) \leq m$ に収束する。

それぞれの収束値について $\lim_{n \rightarrow \infty} X(1,n+1)/X(1,n) = x$ とする。
 $\lim_{n \rightarrow \infty} X(t,n)/X(1,n) = A_t \quad (1 \leq t \leq m \text{ の整数})$

$X(t,n+1) = \sum_{k=1}^{m-t+1} X(k,n)$ を考えると $\sum_{k=1}^{m-t+1} A_k = x A_t$ である。

連立方程式化

$$xA_t = \sum_{k=1}^{m-t+1} A_k \quad \text{と} \quad xA_{t+1} = \sum_{k=1}^{m-t} A_k$$

の両辺の差を取ると

$$A_{m-t+1} = x(A_t - A_{t+1}) \text{となり、}$$

$x, A_1, A_2, \dots, A_m$ に関する連立方程式

$$A_1 = 1$$

$$x(A_1 - A_2) = A_m$$

$$x(A_2 - A_3) = A_{m-1}$$

...

$$x(A_{m-1} - A_m) = A_2$$

$$xA_m = A_1$$

が得られる。

例えば $m=2$ の時

$$A_1 = 1$$

$$x(A_1 - A_2) = A_2$$

$$xA_2 = A_1$$

$$A_2 = 1/x \Rightarrow x\{1 - (1/x)\} = 1/x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \text{ より } x = 1.618 \dots (\phi)$$

例えば $m=3$ の時

$$A_1 = 1$$

$$x(A_1 - A_2) = A_3$$

$$x(A_2 - A_3) = A_2$$

$$xA_3 = A_1$$

$$A_3 = 1/x, A_2 = (x^2 - 1)/x^2$$

$$\Rightarrow x\{(x^2 - 1)/x^2 - 1/x\} = (x^2 - 1)/x^2$$

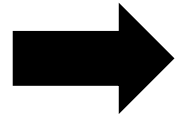
$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2.879 \dots$$

連立方程式の解法

A_t を x の関数のように表していくと $A_m \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_{m-1} \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots$ と決まっていく。

$m=2s$ の時 $t < s$ で

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t - (A_{m-t+1}/x) \\ A_{m-t} &= A_{m-t+1} + (A_{t+1}/x) \\ (A_1 &= 1) \end{aligned}$$

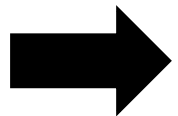


$$\begin{aligned} x(A_s - A_{s+1}) &= A_{s+1} \Rightarrow (x+1)A_{s+1} = xA_s \text{で} \\ x(A_{s+1} - A_{s+2}) &= A_s \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x^2 - x - 1)A_s = x(x+1)A_{s+2}$ を x の関数として解く

$m=2s+1$ の時 $t \leq s$ で

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t - (A_{m-t+1}/x) \\ A_{m-t} &= A_{m-t+1} + (A_{t+1}/x) \\ (A_1 &= 1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x(A_{s+1} - A_{s+2}) &= A_{s+1} \Rightarrow (x-1)A_{s+1} = xA_{s+2} \text{で} \\ x(A_s - A_{s+1}) &= A_{s+2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x(x-1)A_s = (x^2 + x - 1)A_{s+2}$ を x の関数として解く

A_tの一般項

α, β を $\alpha\beta=1$ かつ $\alpha+\beta=1/x$ を満たす数、 $C_n=(\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta)$ と定義する。
ここで $C_n(\alpha^r+\beta^r)=C_{n+r}+C_{n-r}$ ($r\leq n$) が成立している。…☆

$$A_t = (-1)^{t+1} \cdot C_{2t-1}$$

$$A_{m-t+1} = (-1)^{t+1} \cdot C_{2t} \quad \text{と表されると予想した。}(t \leq s, s+2 \leq m+t+1 \text{の時})$$

$$(A_1=1=(-1)^2 \cdot C_1 \text{ かつ } A_m=1/x = \alpha + \beta = (-1)^2 \cdot C_2 \text{ は成立している。}) \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \star \text{の } r=1 \text{ から } A_{t+1} &= A_t - (A_{m-t+1}/x) = \{(-1)^{t+1} \cdot C_{2t-1}\} - \{(-1)^{t+1} \cdot C_{2t} \cdot (\alpha + \beta)\} \\ &= (-1)^{t+2} \cdot C_{2t+1} \text{ より } A_t, A_{m-t-1} \text{ で成立} \Rightarrow A_{t+1} \text{ で成立} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star \text{の } r=1 \text{ から } A_{m-t} &= A_{m-t+1} + (A_{t+1}/x) = \{(-1)^{t+1} \cdot C_{2t}\} + \{(-1)^{t+2} \cdot C_{2t+1} \cdot (\alpha + \beta)\} \\ &= (-1)^{t+2} \cdot C_{2t+2} \text{ より } A_t, A_{m-t} \text{ で成立} \Rightarrow A_{m-t-1} \text{ で成立} \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

①、②、③より A_t, A_{m-t+1} で成立 $\Rightarrow A_{t+1}, A_{m-t}$ で成立 かつ A_1, A_m で成立。
 $\Rightarrow$ 数学的帰納法により A_{s+1} を除いて成立する事が分かる。

xの値の候補

$m=2s$ なら $(x^2-x-1)A_s=x(x+1)A_{s+2} \Rightarrow x^2$ で割って $(\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta+1)C_{2s-1}-(\alpha+\beta+1)C_{2s-2}=0$

☆の $r=1$ 、 $r=2$ より $C_{2s+1}+C_{2s-3}+C_{2s}+C_{2s-2}+C_{2s-1}-C_{2s-1}-C_{2s-3}-C_{2s-2}=0$

$\Rightarrow C_{2s+1}+C_{2s}=0 \Rightarrow \alpha-\beta$ をかけて $\alpha^{(2s+1)}-\beta^{(2s+1)}+\alpha^{(2s)}-\beta^{(2s)}=0$

$\Rightarrow \alpha\beta=1$ より $(1+\alpha)\{\alpha^{(2s)}-\alpha^{-(2s+1)}\}=0 \Rightarrow \alpha^{(4s+1)}=1$

α は大きさ1、偏角 $\{2k/(4s+1)\}\pi$ で表される複素数のどれかである。(kは整数)

β は α の共役な複素数であるため

$$x=1/(\alpha+\beta)=\frac{1}{2\cos\{2k/(4s+1)\}\pi}=\frac{1}{2\sin\{(4s-4k+1)/(8s+2)\}\pi}=\frac{1}{2\sin\{(4s-4k+1)/(4m+2)\}\pi}$$

$m=2s+1$ の時は $x(x-1)A_s=(x^2+x-1)A_{s+2}$ に同一の操作をすると $C_{2s+2}-C_{2s+1}=0$ が得られ、

α は大きさ1、偏角 $\{(2k+1)/(4s+3)\}\pi$ の複素数と分かるため

$$x=1/(\alpha+\beta)=\frac{1}{2\cos\{(2k+1)/(4s+3)\}\pi}=\frac{1}{2\sin\{(4s-4k+1)/(8s+6)\}\pi}=\frac{1}{2\sin\{(4s-4k+1)/(4m+2)\}\pi}$$

結果

既に $\frac{m+1}{2} \leq x$ を示した。

$\frac{1}{2\sin\{(4s-4k+1)/(4m+2)\}\pi}$ は最も大きくて $\frac{1}{2\sin\{1/(4m+2)\}\pi}$ 、次に $\frac{1}{2\sin\{3/(4m+2)\}\pi}$ 。

m が 2 以上で $\frac{1}{2\sin\{3/(4m+2)\}\pi} < \frac{m+1}{2} < \frac{1}{2\sin\{1/(4m+2)\}\pi}$ が成立する。つまり $k=s$ 。

また $m=1$ では明らかに $x=1=\frac{1}{2\sin\{\pi/(4+2)\}}$ である。

よって自然数 m に対して $x=\frac{1}{2\sin\{\pi/(4m+2)\}}$ となる。実際に $m=2$ で $x=\phi=\frac{1}{2\sin\{\pi/(8+2)\}}$ 。

(これを x_m と表すとする $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_{m+1} - x_m) = \frac{2}{\pi}$)

また上記の x の結果から考えて $A_k = \frac{\cos\{(2k-1)/(4m+2)\}\pi}{\cos\{\pi/(4m+2)\}}$ で表される。(代入すると A_{s+1} でも成立。)

$X(1,n)$ の漸化式

x を表す方程式について考察するためにこの数列を F_n のように一つの文字で漸化式化したい。 $X(1,n)=X_n$ とする。

$m=3$ の時

n	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
$X(1,n)$	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n
$X(2,n)$			$X_{n-1}-X_{n-3}$	
$X(3,n)$		X_{n-3}	X_{n-2}	

$$\Rightarrow X_n = 2X_{n-1} + X_{n-2} - X_{n-3} \quad (\Rightarrow \text{収束値が満たす } x^3 = 2x^2 + x - 1 \text{ と同じ})$$

$m=4$ の時

n	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
$X(1,n)$	X_{n-4}	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n
$X(2,n)$			$X_{n-2}-X_{n-4}$	$X_{n-1}-X_{n-3}$	
$X(3,n)$				$2X_{n-2}-X_{n-4}$	
$X(4,n)$		X_{n-4}	X_{n-3}	X_{n-2}	

$$\Rightarrow X_n = 2X_{n-1} + 3X_{n-2} - X_{n-3} - X_{n-4} \quad (\Rightarrow \text{収束値が満たす } x^4 = 2x^3 + 3x^2 - x - 1 \text{ と同じ})$$

パスカルの三角形との関係

$$m=2\text{の時} \quad x^2 = x + 1$$

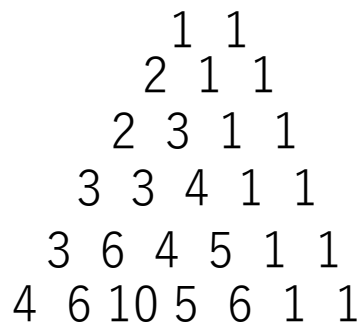
$$m=3\text{の時} \quad x^3 = 2x^2 + x - 1$$

$$m=4\text{の時} \quad x^4 = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$$

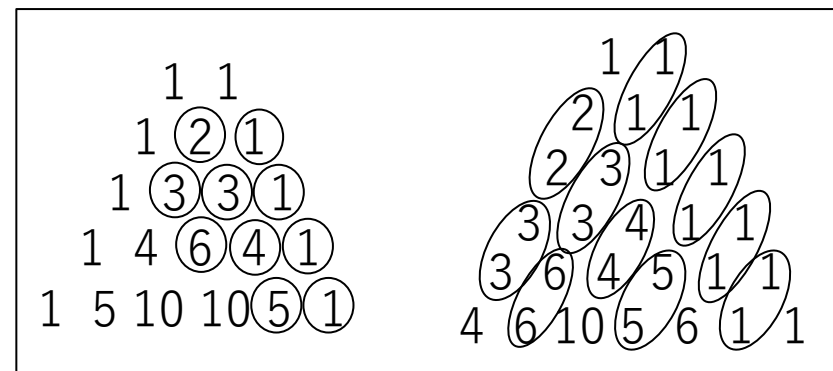
$$m=5\text{の時} \quad x^5 = 3x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 1$$

$$m=6\text{の時} \quad x^6 = 3x^5 + 6x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1$$

$$m=7\text{の時} \quad x^7 = 4x^6 + 6x^5 - 10x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 1$$



のように係数の絶対値を並べると、パスカルの三角形と関係がある。



パスカルの三角形のa段目の右からb番目の数をP(a,b)として

$$m=2k\text{で} x^m = P(k,2)x^{(m-1)} + (-1)^{(k+1)} + \sum_{t=1}^{k-1} (-1)^{(t+1)} \{P(k+t,2t+1)x^{(m-2t)} - P(k+t,2t+2)x^{(m-2t-1)}\}$$

$$m=2k-1\text{で} x^m = (-1)^{(k+1)} + \sum_{t=1}^{k-1} (-1)^{(t+1)} \{P(k+t-1,2t)x^{(m-2t+1)} + P(k+t-1,2t+1)x^{(m-2t)}\}$$

(kは2以上の自然数。mの時を $x^m = f_m(x)$ と表した時の漸化式を先述の図の様式で求め、数学的帰納法 略)

前項の和と積を取る数列と発散の条件

また、フィボナッチ数列によく似た次の数列についても考えた。

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \quad (n \text{ は自然数で } a_1 > 0, b_1 > 0)$$

a_n, b_n が発散する場合は b_n が a_n より十分に小さくなるため、 b_n は a_{n-1} に近似され、 $a_{n+1} = a_n a_{n-1}$ の積型フィボナッチ数列に近づく。

発散および収束の条件に付いて調べたい。
まず $b_{n+1} > b_n$ より自然数 t について $a_{n+t} = a_n \prod_{k=0}^{t-1} b_{n+k} \geq a_n \cdot (b_n)^t \cdots \textcircled{1}$ が成立するはずである。

つまり $b_n \geq 1$ となる n が存在した時点で a_n および b_n は発散する。収束する際は $a_n \rightarrow 0$ 、 $b_n \rightarrow \beta < 1$

$b_n < 1$ の時、 $\textcircled{1}$ から $b_{n+t} = b_n + \sum_{k=0}^{t-1} a_{n+k} \geq b_n + a_n \sum_{k=0}^{t-1} (b_n)^k \Rightarrow b_{n+t} \geq b_n + a_n / (1 - b_n) \geq \beta$ が成り立つ。

よって $b_{n+t} \geq 1$ 、つまり $a_n \geq (1 - b_n)^2$ の時には
 $1 \leq b_{n+t} \leq \beta$ となり、 a_n および b_n は**発散する**と分かる。

収束の条件

次に $\left(\begin{array}{l} a_n \leq r^m \\ b_n \leq r - \frac{r^m}{1-r} \end{array} \right)$ ($0 < r < 1, m$ は正の数) の時を考えると

$\left(\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n b_n \leq r^{m+1} \\ b_{n+1} = a_n + b_n \leq r - \frac{r^m}{1-r} + r^m \leq r - \frac{r^{m+1}}{1-r} \end{array} \right)$ が成立している。数学的帰納法より $\beta \leq r < 1$

つまりこのような r が存在するなら a_n, b_n は収束する。

m はどんな値でもいいので、 $b_n \leq r - \frac{r^m}{1-r} \leq r - \frac{a_n}{1-r}$ を満たすように設定できる。

つまり $b_n \leq r - \frac{a_n}{1-r} \Rightarrow r^2 - (1+b_n)r + a_n + b_n \leq 0 \Rightarrow$ 左辺を $f(r)$ として $f(r)=0$ を満たす r が存在すればいい。

($f(0)=a_n+b_n > 0$ かつ $f(1)=a_n > 0$ 、軸は $0 < \frac{1+b_n}{2} < 1$ より r が解を持つなら $0 < r < 1$ を満たす。)

$f(r)=0$ の判別式を D として $D=(1+b_n)^2 - 4(a_n+b_n) = (1-b_n)^2 - 4a_n$
 $\Rightarrow (1-b_n)^2 \geq 4a_n$ の時には r が存在し、 a_n および b_n は**収束する**。

例

n	1	2	3
a _n	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$
b _n	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$

a₁=b₁=1/3の時、先述の発散条件から

$$(1-b_3)^2 = \frac{4}{81} \leq a_3 = \frac{2}{27}$$

よりa_nおよびb_nは発散する。

n	1	2	3
a _n	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{30}{28^2}$
b _n	$\frac{2}{7}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{17}{28}$

a₁=1/4、b₁=2/7の時、先述の収束条件から

$$(1-b_3)^2 = \frac{121}{28^2} \geq 4a_3 = \frac{120}{28^2}$$

よりa_nおよびb_nは収束する。

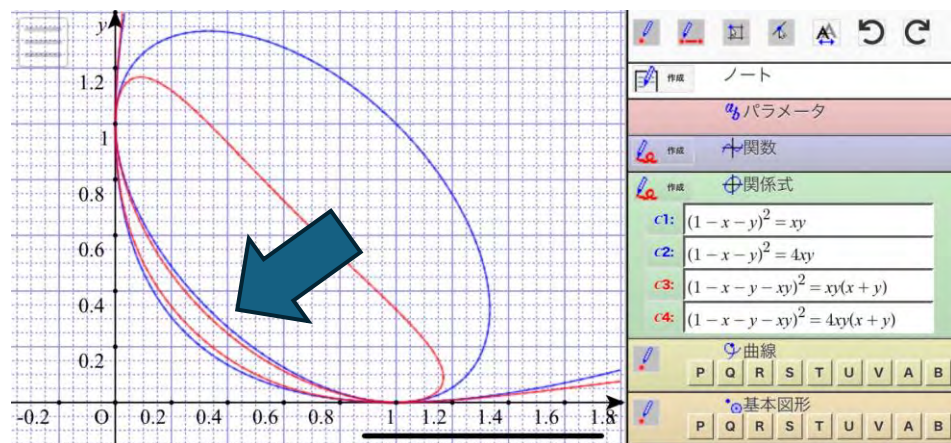
展望

研究を進めるなら a_n, b_n が収束する a_1, b_1 を平面上に表した時の部分の面積 S を求めたい。

$n=2$ の時を考え、 $(1-x-y)^2 \leq xy$ 部分では必ず発散。⇒積分より $\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi = 0.2636\cdots$

$(1-x-y)^2 \geq 4xy$ 部分では必ず収束。⇒積分より $1/6 = 0.1666\cdots$

$0.1666 < S < 0.2637$ である。しかし $n=3$ 以降の積分は難しい。グラフ上では次のようである。



矢印で指された囲まれた部分に収束発散の境界が存在する。
青… $n=2$ を先述の式に代入して出来る条件
赤… $n=3$ を先述の式に代入して出来る条件

(GRAPESより)

2024.8.23

コラッツ予想の操作における数列の法則

海城中学校3年 金山 知樹

1. 概要

コラッツ予想といえば証明は注目されがちだが、僕は今回、1になるまでの操作回数に視点を置いて研究を進めた。先行研究を調べたところ、各自然数についての操作回数をまとめたサイト(A)や、金山和樹さんの研究(B)が見つかった。

この金山和樹さんは、近い(3つや5つ連続する自然数もある)初期値の間では、1になるまでの操作回数が一致しやすいことを書いていて、その理由を調べることを今後の課題としていた。僕はこの内容に非常に興味を持ったので、(A)のサイトで実際に調べ、今回は操作回数が38回の自然数15個に注目することにした。

2. 操作回数が同じになる理由と条件

調べた自然数：610,611,612,613,614,624,628,629,630,631,632,634,647,683,687

5個連続しているのが2つある。

特徴：・610~687までの78個の数の中に15個も集まっている。(19%)

・他のところには38回数は見られない。この部分だけ。

操作回数が一致することを式で表し一般化する

例として612(aとする)と613(a+1とする)を取る。(3回操作後460で一緒になる)

612→306→153→460 460は、 $\frac{a}{4} \times 3 + 1$ と表せる。

613→1840→920→460 460は、 $\frac{3(a+1)+1}{4}$ と表せる。

確かに両者が一致していて、これで一般化ができた。

この例は、連続する2つの自然数をそれぞれ3回操作すると同じ数になるパターン。
これはどのような条件で成り立つのかを考える。

まず、この場合aは4の倍数であり8の倍数では無い。aを1以上の自然数nを使って表すと、 $8n+4=4(2n+1)$ となる。また、a+1の方の操作の条件を調べるが、nを使うと $a+1=8n+5$ と表すことができ、3倍して1を足すと $24n+16$ となり、この後に4で割れるのは必然である。

ここから定理(法則?)が導き出される。

※ 以下、 N (任意の自然数)を p 回操作した後の数を N_p と表すことにする。

新定理 1 コラッツ予想の計算において、 N_0 が $4(2n+1)$ と表せるとき、 $N_3=(N+1)_3$ が成り立つ。※ n は 1 以上の整数。

また、229 と 230 について、それぞれを 3 回操作すると 172 と 173 になり、差が 1 のままであるのが面白い。これについても考えてみる。(229 を b とする)

一般化

229→688→344→172 172 は、 $\frac{3b+1}{4}$ と表せる。

230→115→346→173 173 は、 $(\frac{b+1}{2} \times 3 + 1) \div 2 = \frac{3b+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3b+5}{4}$ と表せる。

以上より、3 回操作後の差が 1 であることが一般化できた。

条件

まず $b+1$ について見ると、2 の倍数であり 4 の倍数では無いと分かる。つまり、1 以上の整数 n を使って $b+1=4n+2$ と表すことができる。よって b は $4n+1$ となる。 b について見ても、1 回操作後の 688 は $3(4n+1)+1=12n+4$ と表せるので、この後に 4 で割れるのは必然である。

これにより次の定理が成り立つ。

新定理 2 コラッツ予想の計算において、 N_0 が $4n+1$ と表せるとき、 $(N+1)_3 - N_3 = 1$ が成り立つ。※ n は 1 以上の整数。

さらに新定理 1 については、172 と 173 についても使える。3 回の操作後に 130 で一致している理由がこれで分かる。また、305 と 306 については新定理 2 を使えると思うので、この辺りのつながりを考えてみるのも面白いと思う。

同じようにして次のことも分かった。

新定理 3 コラッツ予想の計算において、 N_0 が $2(2n+1)$ と表せるとき、 $(N+1)_2 - N_2 = 1$ が成り立つ。※ n は 1 以上の整数。

このように小さい定理はたくさん見つかるのだが、これを組み合わせてもう少し大きい規則性を見つけたいと思い、調べてみた。

$16n+1$ $48n+4$ $24n+2$ $12n+1$ $36n+4$ $18n+2$ $9n+1$

$16n+2$ $8n+1$ $24n+4$ $12n+2$ $6n+1$ $18n+4$ $9n+2$

例えば上は、続けて定理 2 が使えるような場合である。

しかしここで問題なのは、 n の係数が奇数になってしまうと、その数に対して次に行われる操作が $\times 3+1$ なのか $\div 2$ なのかが分からなくなってしまうので、 n によって場合分けを行うことが必要になりそう。ここまで来ると一般化の意味があまり無くなってしまう。具体的な値を使うことにもなりかねない。

()で括って $16n+1$ を $16(n+1)-15$ と表したりもしてみたが、ここから研究を進めるのは難しかった。

3. 終わりに

近い初期値の間で操作回数が一致しやすい理由は分かってきた。しかし操作回数 38 回の方が密集していて、他の部分には見られない理由というのは調べるのが難しい。

また、できれば証明につなげたいと思っていたが、この方向から証明するのは難しそうである。ただ、証明に関係無く、このような規則性がコラッツ数列の中から見つかったのは面白いと思った。

最後に、研究をするにあたって多大なご協力を頂いた本校数学科、川崎真澄先生に深くお礼を申し上げます。

4. 参考にした先行研究やサイト

A 「コラッツの予想・ステップ数一覧」

<https://www20.big.or.jp/~morm-e/talk/0118.html>

B 「コラッツの予想における最大数と操作回数について」 東邦大学 金山和樹

<https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/shirayanagi/lab/dl/2018/kaneyama-slides.pdf>

調べた 15 個のうち一部を下の表にまとめた。

初期値											
610	305	916	458	229	688	344	172	86	43	130	65
611	1834	917	2752	1376	688					↑	
612	306	153	460	230	115	346	173	520	260	130	
613	1840	920	460			↑					
614	307	922	461	1384	692	346					
624	312	156	78	39	118	59	178	89	268	134	67
628	314	157	472	236	118						
629	1888	944	472								

新世代完全数について

飯高 茂 (放送大学 東京多摩学習センター)

2024年9月6日

1 はじめに

完全数の起源は数学原論にあると言われ 2000 年以上の歴史がある.

偶数の完全数はオイラーが偶数の場合を解決し, $a = 2^e Q$, ($Q = 2^{e+1} - 1$: 素数), と書けることを示した.

奇数の場合の解は存在するかどうか現代でも分からない.

ここでは約数の和 $\sigma(a)$ の代わりに オイラー関数を用いて 完全数に似た数を定義しこれらを詳しく研究する. ここでも偶数の場合は解明できるが奇数の場合は解がいろいろありこれらを詳しく研究する. とくに オイラー関数を重ねてダブルオイラー関数を導入しこれを用いた完全数の類似品を研究する. 新世代完全数と呼ぶ所以である.

これらの研究には小学生, 中学生, 高校生が関心をもち自分たちで新しい研究を行っていることを報告したい.

2 オイラー超完全数

自然数 a より小さく a と互いに素な自然数の個数を $\varphi(a)$ と書きオイラー関数という.

ただし, $\varphi(1) = 1$ と定義する.

p が素数なら $\varphi(p) = p - 1$. p, q が異なる素数なら $\varphi(pq) = (p - 1)(q - 1)$.

$\text{co}\varphi(a) = a - \varphi(a)$ とおきこれをオイラー余関数という.

最初に次の結果に注目.

命題 1 $2\varphi(a) = a$ と $a = 2^e$ は同値.

Proof

$a = 2^e$ について, $\varphi(a) = 2^{e-1}$ により $2\varphi(a) = 2^{e-1} = 2^e = a$. これは容易.

逆は自明ではない.

$2\varphi(a) = a$ と仮定すると, a 偶数なので, $a = 2^e L$, (L : 奇数) と書ける.

$2\varphi(a) = 2^e \varphi(L)$. 仮定より $2\varphi(a) = a = 2^e L$.

$L = \varphi(L)$ になり $L = 1$; $a = 2^e$.

q.e.d.

$A = 2^e - 1 + m$ は素数と仮定する.

$a = 2^e$ なら $2\varphi(a) = 2^e$ なので $A = 2\varphi(a) - 1 + m$ は素数.

$\varphi(A) = 2\varphi(a) - 2 + m = a + m - 2$.

定義 1 $A = 2\varphi(a) - 1 + m$, $\varphi(A) = a + m - 2$ を満たす a を オイラー超完全数 (*Euler hyper perfect number*) と呼ぶ.

¹ 準備した原稿は不十分な点が多くあり宇都宮潔さんによって修正された. 特記して感謝申し上げる

注意 1 ユークリッド完全数では, $A = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数と仮定したので少し違う. このような定義を採用すると結果が簡単になり分かりやすい.

表 1: Euler hyper perfect number $m = 2\mu$ A_1 パートナー

a		$A = Q = 2^e - 5$	
$m = -4$			
a	2^e	$A = 2^e - 5$	
8	2^3	3	3
16	2^4	11	11
64	2^6	59	59
256	2^8	251	251
1024	2^{10}	1019	1019
4096	2^{12}	4091	4091
$m = -2$			
a	2^e	$A = 2^e - 3$	$2^e - 3$
8	2^3	5	5
16	2^4	13	13
32	2^5	29	29
64	2^6	61	61
512	2^9	509	509
1024	2^{10}	1021	1021
$m = 0$		$A = Q = 2^e - 1$ メルセンヌ素数	
a	2^e	$A = 2^e - 1$	$2^e - 1$
8	2^3	7	7
32	2^5	31	31
128	2^7	127	127
8192	2^{13}	8191	8191

事実 1 $m = 0$ のとき $k = aA/2$ はユークリッドの完全数.

次に乗数 h を入れた場合を扱う.

$h > 2$ を奇素数とし乗数という.

定義 2 $A = 2h\varphi(a) - 1 + m$, $\varphi(A) = ah + m - 2$ を満たす a を *Euler hyper perfect number with multiplier h , transition parameter m* (平行移動 m , 乗数 h のオイラー超完全数) と呼ぶ.

以前乗数の無い場合には

$A = 2\varphi(a) - 1 + m$, $\varphi(A) = a + m - 2$ を満たす a を オイラー超完全数 と呼ぶ.

という用語を用いたが便宜上この場合を $h = 1$ の場合として取り扱う.

3 m : 偶数の場合

定理 1 $m = 2\mu$ (偶数) $\rightarrow h = 2\mu$ $A = Q_1, \dots, Q_{2\mu}, a = 2^e (2$
 μ 奇) となる

$a = 2^e$ となるがこれは定義の式. (したがって先祖返りの場合という.)

古典完全数論では偶数の完全数は ユークリッド完全数になるというオイラーの結果があるが上記の結果はオイラーの定理の類似と見ることができる.

4 m が奇数の場合

古典完全数論では奇数の完全数は存在しないと思われている。オイラー超完全数では奇数解が多くありしかも興味深い性質を持っていてこれらの研究は十分に意味のあるやりがいのある仕事ということができる。

4.1 $m = -1$ の場合

$m = -1$ によって, $2^e + 2 = 4, e = 1$.

$a = p$: 素数, $A = 2Q$, (Q : 素数).

$A = 2Q = 2\varphi(a) - 2 = 2(p - 1) - 2 = 2p - 4$, $Q = p - 2$. (Q, p) : 双子素数.

表 2: Euler hyper perfect number $h = 1, m = -1$; A : パートナー

a		A	
4	2^2	2	2
$a = p$		$A = 2Q, Q = p - 2$	
5	5	6	$2 * 3$
7	7	10	$2 * 5$
13	13	22	$2 * 11$
19	19	34	$2 * 17$
31	31	58	$2 * 29$
43	43	82	$2 * 41$
61	61	118	$2 * 59$
73	73	142	$2 * 71$
103	103	202	$2 * 101$
109	109	214	$2 * 107$
139	139	274	$2 * 137$
151	151	298	$2 * 149$

$m = -1$ の場合, $A = 2\varphi(a) - 2$, $\varphi(A) = a - 3$ なので, $\varphi(2\varphi(a) - 2) = a - 3$ とまとめられる。

この場合に双子素数がでて来ることに注意しかつ厳密な証明を与えたのは当時小学生の高橋洋翔君であった。

5 $h = 1, m = -3$ のとき

表 3: Euler hyper perfect number $h = 1, m = -3$ A_1 パートナー

a		A	
$m = -3$			
9	3^2	8	2^3
$a = p$		$A = 4Q, p = 2Q + 3$	
13	13	20	$2^2 * 5$
17	17	28	$2^2 * 7$
29	29	52	$2^2 * 13$
37	37	68	$2^2 * 17$
41	41	76	$2^2 * 19$
61	61	116	$2^2 * 29$
89	89	172	$2^2 * 43$
97	97	188	$2^2 * 47$
109	109	212	$2^2 * 53$

$m = 1 + 2\mu = -3$ とする.

基本等式より

$$2^e \text{co}\varphi(L) + 2\text{co}\varphi(a) = 3 - m = 6$$

$$2^{e-1} \text{co}\varphi(L) + \text{co}\varphi(a) = 3.$$

$L = 1$ とすると $\text{co}\varphi(a) = 3$ により数表より, $a = 9$.

$L > 1$ とすると, $2^{e-1} \text{co}\varphi(L) \geq 2^{e-1} \geq 1$.

$e = 2, \text{co}\varphi(a) = 1$. $a = p$ 素数, $A = 4Q$, Q 素数.

定義式 $A = 2\varphi(a) - 4 = 2(\varphi(a) + \mu)$

$m = -3 = 1 + 2\mu$ によって, $\mu = -2$.

$e = 2, A = 4Q$.

$p = 2^{e-1}Q + 1 - \mu = 2Q + 3$

二つの素数 p, Q が 1 次の関係式 $p = 2Q + 3$ で結ばれているのでスーパー双子素数という.

一般には $p = aQ + b$ と自然数 a, b によって, (互いに素で $a + b$ が奇数) という関係式で結ばれているとき p, Q が素数であるならこれをスーパー双子素数という.(高橋洋翔)

オイラー超完全数の解としてスーパー双子素数がでてきてこれらは無限の解をもっていると思われる.

6 ダブルオイラー関数

オイラー関数の合成 $\varphi(\varphi(a))$ を $\varphi^2(a)$ と書き ダブルオイラー関数という.
次の結果は 岩瀬さんによる予想である.

定理 2 $4\varphi^2(a) = a$ なら $a = 2^e$

Proof a は 偶数なので, $a = 2^e L, (2 \nmid L)$ と書ける.

$\varphi(a) = 2^{e-1}(\varphi(L)), \varphi(L) = 2^f K, (f \geq 0, 2 \nmid K)$ と奇数 K で書く.

$\varphi(a) = 2^{e-1+f} K$ によって $\varphi^2(a) = 2^{e-2+f} \varphi(K)$.

仮定によって $4\varphi^2(a) = 2^{e+f} \varphi(K) = a = 2^e L$.

ゆえに $2^f \varphi(K) = L$. L は 奇数なので, $f = 0$.

$\varphi(L) = K$ 奇数によって $L = 1$. $a = 2^e$

q.e.d.

$8\varphi^3(a) = a$ なら $a = 2^e$ も同様に正しい.

一般の場合は 梶田さんによると思います.

7 ダブルオイラー 超完全数

$4\varphi^2(a) = a$ と $a = 2^e$ は同値.

$A = 4h\varphi^2(a) - 1 + m$ は素数と仮定すると $\varphi(A) = 4h\varphi^2(a) - 2 + m = ah + m - 2$.

定義 3 $A = 4h\varphi^2(a) - 1 + m, \varphi(A) = ah + m - 2$ を満たす a を ダブルオイラー 超完全数 (*double Euler hyper perfect number*) と呼ぶ.

パソコンで数値例をいくつかあげる.

表 4: Double Euler hyper perfect $h = 1$; A_1 パートナー

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -2$			
8	2^3	5	5
16	2^4	13	13
32	2^5	29	29
64	2^6	61	61
512	2^9	509	509
1024	2^{10}	1021	1021
4096	2^{12}	4093	4093
$m = -1$			
4	2^2	2	2
5	5	6	$2 * 3$

表 5: Double Euler hyper perfect $h = 1$; A パートナー

a	素因数分解	A	素因数分解	$aA/2$:完全数
m= 0				
4	2^2	3	3	6 :完全数
8	2^3	7	7	28
32	2^5	31	31	496
128	2^7	127	127	8128
m= 1				
3	3	4	2^2	6
5	5	8	2^3	20
17	17	32	2^5	272
257	257	512	2^9	65792
m= 2				
4	2^2	5	5(Fermat 素数)	
16	2^4	17	17	
256	2^8	257	257	
m= 4				
4	2^2	7	7	
8	2^3	11	11	
16	2^4	19	19	
64	2^6	67	67	
128	2^7	131	131	
4096	2^{12}	4099	4099	

8 偶数解の場合

a :偶数解の場合, m :偶数. 逆も正しい.

命題 2 a :偶数解の場合, $a = 2^e, A = p$ は素数, $p = h2^e - 1 + m$:素数.(先祖返り)

例えば $h = 1, m = -2(p = 2^e - 3), m = -4(p = 2^e - 5), m = 2(p = 2^e + 1), m = 4(p = 2^e + 3),$
 $p = h2^e - 1 + m.$

9 奇数解の場合

$A = 4h\varphi^2(a) - 1 + m, \varphi(A) = ah + m - 2$ において, a が奇数解なら m も奇数. $m = 1 + 2\mu$ と書く.

よって $A = 4h\varphi^2(a) + 2\mu, \varphi(A) = ah + 2\mu - 1$ を得る.

A :偶数なので, $A = 2^e L, (L$: 奇数) と書く.

$$2^e L = 4h\varphi^2(a) + 2\mu, 2^{e-1}\varphi(L) = ah + 2\mu - 1.$$

第1式を2で割って $2^{e-1}L = 2h\varphi^2(a) + \mu,$

上式から第2式を引くと

$$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = h(2\varphi^2(a) - a) - \mu + 1.$$

$\varphi^2(a)$ を計算するため $\varphi(a) = 2^f X, (f \geq 0, X$: 奇数) とおくとき, $\varphi^2(a) = 2^{f-1}\varphi(X).$

$W_0 = 2^f X - \varphi(a) = 0$ とおく.

さらに $Z = 2\varphi^2(a) - a$ とおくと $2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = hZ - \mu + 1.$

$\varphi^2(a) = 2^{f-1}\varphi(X)$ によって

$$Z = Z - W_0 = 2^f \varphi(X) - a - 2^f X + \varphi(a) = -2^f \text{co}\varphi(X) - \text{co}\varphi(a).$$

よって

$$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = h(-2^f \text{co}\varphi(X) - \text{co}\varphi(a)) - \mu + 1$$

.

$$1 - \mu = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + h(2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a)).$$

2倍して

$$2(1 - \mu) = 2^e \text{co}\varphi(L) + 2h(2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a)).$$

$m = 3 - 2(1 - \mu)$ によると

$$m = 2\mu + 1 = 3 - 2h(2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a)) - 2^e \text{co}\varphi(L).$$

これを基本等式という.

少し先回りして, 定義 3 の第 2 式 $\varphi(A) = ah + m - 2$ に戻る.

$A = 2^e Q, a = p, \varphi(a) = p - 1 = 2^f X, X = r$ 素数 とすると

$2^{e-1}Q = hp + 2^{e-1} + m - 2, p = 1 + 2^f r$ が成り立ち, m, e, f が定数で, 3 素数 Q, p, r が 2 つの 1 次式で結ばれているのでこれらはウルトラ三つ子素数になる.

ウルトラ三つ子素数は解が 2 つ以上あるとき解は無限にあるという高橋予想がある.

ウルトラ三つ子素数が限りなく存在するような方程式がごく自然な解として出るところにダブルオイラー関数を用いた超完全数に意義があると思われる.

注意 2 $Z = 2\varphi^2(a) - a$ が出ているが, 梶田光 (高校 1 年) は新しく ダブルオイラ余関数 $a - 2\varphi^2(a)$ を導入し詳しく研究を行っている. 私は彼の研究に触発されてダブルオイラー 超完全数を定義した.

10 $h = 1, m = -3$ のとき

命題 3 $h = 1, m = -3$ のときダブルオイラー 超完全数 は次の通り.

- 1) $a = 7, A = 2^2$;
- 2) $a = 17, A = 28 = 2^2 * 7$;
- 3) $a = 257, A = 508 = 2^2 * 127$.

Proof

$m = -3, \mu = -2$ のとき, 基本等式により,

$$3 = 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) + 2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a).$$

よって,

1) $L > 1, e = 2, \text{co}\varphi(L) = 1, \text{co}\varphi(X) = 0, \text{co}\varphi(a) = 1, X = 1, a = p, L = Q$: 素数.
 $\varphi(a) = p - 1 = 2^f$. $p = 2^f + 1$: Fermat 素数. よって $t > 0$ があり $f = 2^t$.
 $A = 4Q = 4\varphi^2(a) - 4$, $\varphi(A) = 2(Q - 1) = p - 5$.
 $\varphi^2(a) = \varphi(p - 1) = \varphi(2^f) = 2^{f-1}$. ゆえに $A = 4Q = 2^{f+1} - 4$, $Q = 2^{f-1} - 1$: Mersenne 素数.
 $f - 1 = \rho = 2^t - 1$: 素数.
 $p = 2^f + 1 = 3, 5, 17, 257, 65537$ しかないので, $2^f = 2, 4, 16, 256, 65536$.
 $2^{f-1} - 1 = 7, 127, (65536/2 - 1 = 32767 = 7 * 31 * 151)$. よって,
 $a = 17, A = 28 = 2^2 * 7$, および $a = 257, A = 508 = 2^2 * 127$.

2) $L = 1$ のとき $3 = 2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a)$; $2 = 2^f \text{co}\varphi(X), 1 = \text{co}\varphi(a)$. さらに $A = 2^e, f = 1, X = r, a = p, r, p$: 素数.

$$\varphi(a) = p - 1 = 2r \text{ によって, } \varphi^2(a) = r - 1.$$

定義式に戻る.

$$A = 2^e = 4\varphi^2(a) - 4. 2^{e-2} = \varphi^2(a) - 1 = r - 2.$$

よって, $r = 2^{e-2} + 2$: 素数によって, $e = 2, r = 3. A = 4, a = p = 1 + 2r = 7$.

q.e.d.

私は上の結果は十分面白いものと思っている. 完全数を元にして種々の類似の概念を導入し完全数類似の数が得られている.

パソコンによる数値解は次の通り.

表 6: Double Euler hyper perfect numbers $h = 1, A$ パートナー

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -3$			
7	7	4	2^2
17	17	28	$2^2 * 7$
257	257	508	$2^2 * 127$

11 $m = -5$ のとき

$h = 1, m = -5$ と仮定する. $\mu = -3$ により基本等式

$\varphi(a) = 2^f X, (f \geq 0, X: \text{奇数})$ とおいた.

$$m = 2\mu + 1 = -6 + 1 = -5 = 2(2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a)) + 2^e \text{co}\varphi(L).$$

$$-8 = 2(2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a)) + 2^e \text{co}\varphi(L).$$

2 で割ると

$$4 = 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) + 2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a).$$

1) $\text{co}\varphi(L) = \text{co}\varphi(X) = \text{co}\varphi(a) = 1, f = 1$ の場合は, $\varphi(a) = 2^f X, L = Q, a = p, X = r$ はみな素になり, $e = 1$.

$$A = 2Q, \varphi(p) = p - 1 = 2r,$$

定義式に戻ると $\varphi(A) = Q - 1 = ah + m - 2 = p - 7, Q = p - 6$. (p, Q) は, はとこ素数という. $p = 2r + 1, Q = p - 6$ の関係がありこれらは素数なので (p, r, Q) は ウルトラ三つ子素数という.

2) $\text{co}\varphi(L) = \text{co}\varphi(X) = 0, \text{co}\varphi(a) = 4$ のとき, $a = 8, L = X = 1, A = 2^e$ 定義式に戻ると $\varphi(A) = 2^{e-1} = ah + m - 2 = 8 - 7 = 1$. よって $e = 1, A = 2$.

数表は次の通り.

表 7: Double Euler hyper perfect numbers $h = 1, m = -5$; A : パートナー

a	$\varphi(a)$	A	2
8 2^3	2^2	2	2
p	$\varphi(p) = 2r$	A	$2Q, p = Q + 6$
11 11	$2 * 5$	10	$2 * 5$
23 23	$2 * 11$	34	$2 * 17$
47 47	$2 * 23$	82	$2 * 41$
59 59	$2 * 29$	106	$2 * 53$
107 107	$2 * 53$	202	$2 * 101$
179 179	$2 * 89$	346	$2 * 173$
263 263	$2 * 131$	514	$2 * 257$
359 359	$2 * 179$	706	$2 * 353$
467 467	$2 * 233$	922	$2 * 461$
563 563	$2 * 281$	1114	$2 * 557$

12 $m = -9$ のとき

$h = 1, m = -9$ と仮定する. $\mu = -5$ により

$$6 = 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) + (2^f \text{co}\varphi(X) + \text{co}\varphi(a)).$$

$\text{co}\varphi(L) = \text{co}\varphi(X) = \text{co}\varphi(a) = 1$ の場合

$6 = 2^{e-1} + (2^f + 1)$ これは $e = 1, f = 2$. $L = Q, a = p, X = r$ はみな素になり, $e = 1, f = 2$.

$A = 2Q, a - 1 = 2^2 r$, $\varphi(a) = p - 1 = 4r, \varphi^2(a) = 2(r - 1)$.

定義式に戻ると $A = 2Q = 4\varphi^2(a) - 10, \varphi(A) = a - 11$.

これより $Q = 8(r - 1) - 5, Q - 1 = 4r - 10$

表 8: Double Euler hyper perfect numbers $h = 1, m = -9$; A : パートナー

$a = p$		$\varphi(a) = 4r$	$A = 2Q$ ($Q = 4r - 9$)	2
13	13	$2^2 * 3$	6	$2 * 3$
29	29	$2^2 * 7$	38	$2 * 19$
53	53	$2^2 * 13$	86	$2 * 43$
149	149	$2^2 * 37$	278	$2 * 139$
173	173	$2^2 * 43$	326	$2 * 163$
293	293	$2^2 * 73$	566	$2 * 283$
317	317	$2^2 * 79$	614	$2 * 307$
389	389	$2^2 * 97$	758	$2 * 379$
509	509	$2^2 * 127$	998	$2 * 499$
557	557	$2^2 * 139$	1094	$2 * 547$

乗数3付きの Miyamoto-Euler の方程式のダブル B 型解について（特殊解の考察を含む）

宮本憲一

2024 年 8 月 19 日

乗数 h を奇素数とする。

まず、 $a = h * 2^e + m + 1$ を素数と仮定する。

$\varphi(a) = h * 2^e + m, A = \varphi(a) - m = h * 2^e$ とおき、

$\varphi(A) = (h - 1)2^{e-1} = 2k * 2^{e-1} = k * 2^e$ (ただし $2k = h - 1$)

$h\varphi(A) = k * h * 2^e = k(a - m - 1)$ とする。

以上の事を忘れて次の定義をする。

$A = \varphi(a) - m, h\varphi(A) = k(a - m - 1)$

を満たす a を m だけ平行移動した乗数 h 付きのオイラー型メルセンヌ超完全数
といい、

A をそのパートナーといい、 a, A の連立方程式を Miyamoto-Euler の方程式と
いう。

ここでダブル B 型解とは α, β が互いに素な定数で

$a = \alpha * p, A = \beta * q$ (p, q は素数)

が複数個あるものをいう。

$h = 3$ のとき Miyamoto-Euler の方程式は

$$A = \varphi(a) - m, 3\varphi(A) = a - m - 1$$

となる。

このとき $m = -7, -9, -10, -13, -16, -19$ の場合を考察する。

表 1: $h = 3, m = -7$

a	素因数分解	A	素因数分解
54	$2 * 3^3$	25	5^2
60	$2^2 * 3 * 5$	23	23
84	$2^2 * 3 * 7$	31	31
132	$2^2 * 3 * 11$	47	47
204	$2^2 * 3 * 17$	71	71
228	$2^2 * 3 * 19$	79	79
372	$2^2 * 3 * 31$	127	127
444	$2^2 * 3 * 37$	151	151
492	$2^2 * 3 * 41$	167	167
564	$2^2 * 3 * 47$	191	191
708	$2^2 * 3 * 59$	239	239
804	$2^2 * 3 * 67$	271	271
1068	$2^2 * 3 * 89$	359	359
1284	$2^2 * 3 * 107$	431	431
1308	$2^2 * 3 * 109$	439	439
1788	$2^2 * 3 * 149$	599	599
1812	$2^2 * 3 * 151$	607	607
1884	$2^2 * 3 * 157$	631	631

定義式から $m = -7$ の場合

定理

$A = \varphi(a) + 7, 3\varphi(A) = a + 6$ のとき

ダブル B 型解は $a = 2^2 * 3p, A = q$ で $q = 4p + 3$

証明

$\varphi(A)$ は偶数で a は 3 の倍数より $a = 2^e * 3^f M$ (M は 2, 3 の倍数でない) とかける。

上の式に代入して

$A = 2^e * 3^{f-1} \varphi(M) + 7$ とかける。 $3\varphi(A) = 2^e * 3^f M + 6$ より

$\varphi(A) = 2^e * 3^{f-1} M + 2$ であるから

$co\varphi(A) + 2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 5$

$co\varphi(A) = 0$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 5 \dots (1)$

$co\varphi(A) = 1$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 4 \dots (2)$

$co\varphi(A) = 2$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 3 \dots (3)$

$co\varphi(A) = 3$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 2 \dots (4)$

$co\varphi(A) = 4$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 1 \dots (5)$

$co\varphi(A) = 5$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 0 \dots (6)$

(1), (3), (5) は矛盾。(4) の場合 $A = 9$ で $9 = 2^e * 3^{f-1} \varphi(M) = 7$ より $e = 1, f = 1, \varphi(M) = 1$

$M = 1$ または $M = 2$, M は 2 の倍数でないから $M = 1$ よって $co\varphi(M) = 0$ 矛盾
(2), (6) について考察する。

(2) の場合

$co\varphi(A) = 1$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 4$ の場合

A は素数、 $e = 2, f = 1, M$ は素数よって $a = 2^2 * 3p$ で $A = q$

ダブル B 型解は $a = 12p, A = q$

$A = \varphi(a) + 7, 3\varphi(A) = a + 6$ に代入すると、

$q = 4p + 3$ よって p, q はスーパー双子素数。

(6) の場合

$co\varphi(A) = 5$ かつ $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 0$ の場合

$A = 25, co\varphi(M) = 0, M = 1$

$a = 2^e * 3^f$ より定義式に代入すると

$25 = 2^e * 3^{f-1} + 7$ より $2^e * 3^{f-1} = 18$ より $e = 1, f = 3$ よって $a = 2 * 3^3, A = 25$

表 2: $h = 3, m = -9$

a	素因数分解	A	素因数分解
28	$2^2 * 7$	21	$3 * 7$
52	$2^2 * 13$	33	$3 * 11$
124	$2^2 * 31$	69	$3 * 23$
172	$2^2 * 43$	93	$3 * 31$
244	$2^2 * 61$	129	$3 * 43$
268	$2^2 * 67$	141	$3 * 47$
388	$2^2 * 97$	201	$3 * 67$
412	$2^2 * 103$	213	$3 * 71$
604	$2^2 * 151$	309	$3 * 103$
628	$2^2 * 157$	321	$3 * 107$
772	$2^2 * 193$	393	$3 * 131$
820	$2^2 * 5 * 41$	329	$7 * 47$
892	$2^2 * 223$	453	$3 * 151$
964	$2^2 * 241$	489	$3 * 163$
1132	$2^2 * 283$	573	$3 * 191$
1252	$2^2 * 313$	633	$3 * 211$
1324	$2^2 * 331$	669	$3 * 223$
1348	$2^2 * 337$	681	$3 * 227$
1492	$2^2 * 373$	753	$3 * 251$
1684	$2^2 * 421$	849	$3 * 283$
1828	$2^2 * 457$	921	$3 * 307$
1852	$2^2 * 463$	933	$3 * 311$

(定義式)

$$A = \varphi(a) + 9, 3\varphi(A) = a + 8$$

ダブル B 型解は $a = 2^2 p, A = 3q$

(証明)

$$A = \varphi(a) + 9, 3\varphi(A) = a + 8,$$

$a = 2^e M$ (M は奇数) $A = 3^f L$ (L は 2, 3 で割れない) と仮定する。

$$3^f L = 2^{e-1} \varphi(M) + 9, 2 * 3^f \varphi(L) = 2^e M + 8 \text{ つまり } 3^f \varphi(L) = 2^{e-1} M + 4$$

$$3^f \text{co}\varphi(L) + 2^{e-1} \text{co}\varphi(M) = 5$$

$$\text{co}\varphi(L) = \text{co}\varphi(M) = 1 \text{ とすると } f = 1, e = 2, M = p, L = q$$

$a = 2^2 p, A = 3q$ が通常解

これを定義式に代入して $3q = 2p + 7$ (素数共鳴)

特殊解 $a = 2^2 * 5 * 41, A = 7 * 47$ については定義式 $7 * 47 = \varphi(2^2 * 5 * 41) + 9 =$

$2 * 4 * 41 + 9 = 329$ を満たす。

表 3: $h = 3, m = -10$

a	素因数分解	A	素因数分解
3	3	12	$2^2 * 3$
21	$3 * 7$	22	$2 * 11$
27	3^3	28	$2^2 * 7$
39	$3 * 13$	34	$2 * 17$
57	$3 * 19$	46	$2 * 23$
111	$3 * 37$	82	$2 * 41$
129	$3 * 43$	94	$2 * 47$
201	$3 * 67$	142	$2 * 71$
237	$3 * 79$	166	$2 * 83$
243	3^5	172	$2^2 * 43$
291	$3 * 97$	202	$2 * 101$
309	$3 * 103$	214	$2 * 107$
327	$3 * 109$	226	$2 * 113$
381	$3 * 127$	262	$2 * 131$
489	$3 * 163$	334	$2 * 167$
579	$3 * 193$	394	$2 * 197$
669	$3 * 223$	454	$2 * 227$
687	$3 * 229$	466	$2 * 233$
831	$3 * 277$	562	$2 * 281$
921	$3 * 307$	622	$2 * 311$
939	$3 * 313$	634	$2 * 317$
1047	$3 * 349$	706	$2 * 353$
1137	$3 * 379$	766	$2 * 383$
1191	$3 * 397$	802	$2 * 401$
1317	$3 * 439$	886	$2 * 443$
1371	$3 * 457$	922	$2 * 461$
1389	$3 * 463$	934	$2 * 467$
1461	$3 * 487$	982	$2 * 491$
1497	$3 * 499$	1006	$2 * 503$
1839	$3 * 613$	1234	$2 * 617$
1929	$3 * 643$	1294	$2 * 647$

定理

$A = \varphi(a) + 10, 3\varphi(A) = a + 9$ のとき

ダブル B 型解は $a = 3p, A = 2q, q = p + 4$ で i と o 素数。

(証明)

$$A = \varphi(a) + 10, 3\varphi(A) = a + 9$$

a は 3 の倍数だから $a = 3^e L$ (L は 3 の倍数でない) とすると

$$3\varphi(A) = 3^e L + 9 \text{ より } \varphi(A) = 3^{e-1} L + 3$$

A は偶数より $A = 2^f M$ (M は奇数) より

$$2^f M = \varphi(3^e L) + 10, 2^{f-1} M = 3^{e-1} \varphi(L) + 5$$

$$2^{f-1} \varphi(M) = 3^{e-1} L + 3$$

式を整理して

$$2^{f-1} M = 3^{e-1} \varphi(L) + 5, 2^{f-1} \varphi(M) = 3^{e-1} L + 3,$$

$$2^{f-1} \text{co}\varphi(M) + 3^{e-1} \text{co}\varphi(L) = 2$$

$$\text{co}\varphi(M) = \text{co}\varphi(L) = 1 \text{ で } e = f = 1$$

$$a = 3p, A = 2q$$

これを定義式に代入して

$q = p + 4$ よって p, q はいとこ素数。

$\text{co}\varphi(L) = 0$ のとき $L = 1$ よって $a = 3^e$.

$2^{f-1} \text{co}\varphi(M) = 2$ より $f = 2$ で $\text{co}\varphi(M) = 1$ より $M = Q, A = 2^2 Q$.

定義式に代入すると $2^2 Q = 2 * 3^{e-1} + 10, 2Q = 3^{e-1} + 5$

$e = 1$ のとき $Q = 3$ よって $a = 3, A = 2^2 * 3$.

$e = 3$ のとき $Q = 7$ よって $a = 3^3, A = 2^2 * 7$.

$e = 5$ のとき $Q = 43$ よって $a = 3^5, A = 2^2 * 43$

など

表 4: $h = 3, m = -13$

a	素因数分解	A	素因数分解
24	$2^3 * 3$	21	$3 * 7$
114	$2 * 3 * 19$	49	7^2
168	$2^3 * 3 * 7$	61	61
312	$2^3 * 3 * 13$	109	109
456	$2^3 * 3 * 19$	157	157
1032	$2^3 * 3 * 43$	349	349
1608	$2^3 * 3 * 67$	541	541
2472	$2^3 * 3 * 103$	829	829
2616	$2^3 * 3 * 109$	877	877
3048	$2^3 * 3 * 127$	1021	1021
3336	$2^3 * 3 * 139$	1117	1117
3624	$2^3 * 3 * 151$	1213	1213
4344	$2^3 * 3 * 181$	1453	1453
4632	$2^3 * 3 * 193$	1549	1549
4776	$2^3 * 3 * 199$	1597	1597
5064	$2^3 * 3 * 211$	1693	1693
5352	$2^3 * 3 * 223$	1789	1789
5784	$2^3 * 3 * 241$	1933	1933
6648	$2^3 * 3 * 277$	2221	2221
6792	$2^3 * 3 * 283$	2269	2269
8376	$2^3 * 3 * 349$	2797	2797
9096	$2^3 * 3 * 379$	3037	3037
9528	$2^3 * 3 * 397$	3181	3181
10104	$2^3 * 3 * 421$	3373	3373
10392	$2^3 * 3 * 433$	3469	3469

定義式から

$$A = \varphi(a) + 13, 3\varphi(A) = a + 12$$

になり $a = 2^3 * 3p, A = q, q = 8p + 5$ でスーパー双子素数よりダブル B 型解が出てくる。

(証明)

a は偶数かつ 3 の倍数より

$$a = 2^e * 3^f M \text{ とおくと}$$

$$A = 2^e * 3^{f-1} \varphi(M) + 13, 3\varphi(A) = 2^e * 3^f M + 12 \text{ つまり } \varphi(A) = 2^e * 3^{f-1} M + 4$$

$$\text{co}\varphi(A) + 2^e * 3^{f-1} \text{co}\varphi(M) = 9$$

$co\varphi(A) = co\varphi(M) = 1$ とすると $2^e * 3^{f-1} = 8$ より $e = 3, f = 1$

よってダブル B 型解は $a = 2^3 * 3p, A = q$ で $q = 8p + 5$ でスーパー双子素数。

例外である下線部の上を考察する。

$co\varphi(M) = 0$ なら $co\varphi(A) = 9$ このとき $A = 21 = 3 * 7$

定義式に代入して $21 = \varphi(2^e * 3^f) + 13 = 2^e * 3^{f-1} + 13, f = 1, e = 3: a = 2^3 * 3$

$e = 1, f = 1: co\varphi(M) = 1, M = p$, このとき $co\varphi(A) = 7$ より $A = 49, a = 2 * 3p$

定義式に代入して $3\varphi(7^2) = 2 * 3p + 12, 3 * 42 = 6p + 12: p = 19$ よって $a = 2 * 3 * 19, A = 49 = 7^2$.

表 5: $h = 3, m = -16$

a	素因数分解	A	素因数分解
3	3	18	$2 * 3^2$
21	$3 * 7$	28	$2^2 * 7$
57	$3 * 19$	52	$2^2 * 13$
93	$3 * 31$	76	$2^2 * 19$
201	$3 * 67$	148	$2^2 * 37$
237	$3 * 79$	172	$2^2 * 43$
369	$3^2 * 41$	256	2^8
381	$3 * 127$	268	$2^2 * 67$
417	$3 * 139$	292	$2^2 * 73$
453	$3 * 151$	316	$2^2 * 79$
597	$3 * 199$	412	$2^2 * 103$
633	$3 * 211$	436	$2^2 * 109$
813	$3 * 271$	556	$2^2 * 139$
921	$3 * 307$	628	$2^2 * 157$
1137	$3 * 379$	772	$2^2 * 193$
1317	$3 * 439$	892	$2^2 * 223$
1641	$3 * 547$	1108	$2^2 * 277$
1821	$3 * 607$	1228	$2^2 * 307$
1857	$3 * 619$	1252	$2^2 * 313$

定理

$$A = \varphi(a) + 16, 3\varphi(A) = a + 15,$$

ダブル B 型解は $a = 3p, A = 4q = 2^2q, p = 2q - 7$ よりスーパー双子素数。

(証明)

$$A = \varphi(a) + 16, 3\varphi(A) = a + 15,$$

$a = 3^e L$ (L は 3 の倍数でない), $A = 2^f M$ (M は奇数) とおくと、

$$2^f M = 2 * 3^{e-1} \varphi(L) + 16, 2^{f-1} M = 3^{e-1} \varphi(L) + 8$$

$$3 * 2^{f-1} \varphi(M) = 3^e L + 15, 2^{f-1} \varphi(M) = 3^{e-1} L + 5 \text{ より}$$

$$2^{f-1} \text{co}\varphi(M) + 3^{e-1} \text{co}\varphi(L) = 3$$

$$\text{co}\varphi(M) = \text{co}\varphi(L) = 1, 2^{f-1} = 2, 3^{e-1} = 1 \text{ よって}$$

$$M = q, L = p, f = 2, e = 1 \text{ より ダブル B 型解は } a = 3p, A = 2^2q$$

上式に代入して $p = 2q - 7$ よりスーパー双子素数。

特殊解については

$$\text{co}\varphi(L) = 0 \text{ のとき } L = 1 \text{ より } a = 3^e.$$

$$2^{f-1} \text{co}\varphi(M) = 3, f = 1, \text{co}\varphi(M) = 3 \text{ より } M = 9 = 3^2$$

$$\begin{aligned}
&A = 2 * 3^2, \text{ 定義式に代入して } 18 = 2 * 3^{e-1} + 16, 9 = 3^{e-1} + 8, e = 1 \\
&a = 3, A = 2 * 3^2. \\
&co\varphi(M) = 0, M = 1, A = 2^f, e = 2, L = p \\
&3 * 2^{f-1} = 3^2 p + 15, 2^{f-1} = 3p + 5 = 128 = 2^7 (\text{ただし } p = 41) \quad f = 8 \\
&a = 3^2 * 41, A = 2^8
\end{aligned}$$

表 6: $h = 3, m = -19$

a	素因数分解	A	素因数分解
180	$2^2 * 3^2 * 5$	67	67
396	$2^2 * 3^2 * 11$	139	139
468	$2^2 * 3^2 * 13$	163	163
612	$2^2 * 3^2 * 17$	211	211
828	$2^2 * 3^2 * 23$	283	283
1116	$2^2 * 3^2 * 31$	379	379
1476	$2^2 * 3^2 * 41$	499	499
1548	$2^2 * 3^2 * 43$	523	523
1692	$2^2 * 3^2 * 47$	571	571
1908	$2^2 * 3^2 * 53$	643	643

$$A = \varphi(a) + 19, 3\varphi(A) = a + 18$$

ダブル B 型解は $a = 36p = 2^2 * 3^2 p, A = q,$

$q = 12p + 7$ よりスーパー双子素数

(証明)

$$A = \varphi(a) + 19, 3\varphi(A) = a + 18$$

$a = 2^e * 3^f M$ (M は 2, 3 の倍数でない) とおく。

$$A = 2^e * 3^{f-1} \varphi(M) + 19,$$

$$3\varphi(A) = 2^e * 3^f M + 18, \varphi(A) = 2^e * 3^{f-1} M + 6$$

$$co\varphi(A) + 2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 13$$

$$co\varphi(A) = co\varphi(M) = 1 \text{ から } 2^e * 3^{f-1} = 12$$

$$M = p, A = q, e = 2, f = 2 \text{ より } a = 2^2 * 3^2 p, A = q$$

上式に代入して $q = 12p + 7$ よりスーパー双子素数。

【付録】ディリクレ積を使った概完全数方程式の一般化

清水 真先

2024/08/23

目次

1	記法について	2
2	乗法的関数のディリクレ積	3
2.1	乗法的関数と完全乗法的関数	3
2.2	ディリクレ積の定義	4
2.3	ディリクレ積の基本的な性質	4
3	ベル級数と完全乗法的関数 ε_α のディリクレ積実数乗	5
3.1	ベル級数	5
3.2	ベル級数を使って完全乗法的関数 ε_α のディリクレ積べき乗 ε_α^β を計算する	7
4	概完全数方程式の異底間の解の転写	10
4.1	$\uparrow \sigma$ 版概完全数の異底間の解の転写	10

1 記法について

ここでは以下の記法を使う。

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{P}$: 素数全体の集合.
- $m \perp n \iff m$ と n とは互いに素.
- $\varepsilon(a) = a$ (ε は恒等関数であり完全乗法的関数.)
- $\mathbb{1}(a) = 1$. ($\mathbb{1}$ は常に 1 を返す定常関数であり完全乗法的関数.)
- $\varepsilon_k(a) = a^k$ (ε_k は完全乗法的関数. 特に $\varepsilon_1 = \varepsilon$ は恒等関数, $\varepsilon_0 = \mathbb{1}$ は定常関数.)
- $(f * g)(a) = \sum_{d|a} f(d) \cdot g(a/d)$ ($f * g$ は関数 f と関数 g のディリクレ積).
- $\mu(a)$ (μ はメビウス関数. $\mu = \mathbb{1}^{-1}$.)
- $\uparrow f = f * \mathbb{1}$.
- $\downarrow f = f * \mathbb{1}^{-1} = f * \mu$.
- $\mathbf{F}$ ((数論的) 乗法的関数全体の集合).
- $(\mathbf{F}, *)$ ((数論的) 乗法的関数全体の集合 $(\mathbf{F})$ でディリクレ積 $(*)$ がつくる可換群).
- $\mathbf{K}$ (完全乗法的関数全体の集合).
- $\mathfrak{e}(a)$ ($\mathfrak{e}$ は群 $(\mathbf{F}, *)$ の単位元となる完全乗法的関数.) $\mathfrak{e}(1) = 1, a > 1$ のとき $\mathfrak{e}(a) = 0$.
- $B_{f,p}(x) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) x^n \right)$ (乗法的関数 f と素数 p に関するベル級数.)
- 素数べきリスト表記
乗法的関数 f について, 素数べきに対する関数値を列挙して $f = [f(p^0), f(p^1), \dots, f(p^k), \dots]$ のように書くことにする. この表記を素数べきリスト表記と呼ぶことにする.
 - [例 1]: $\varphi = [1, p-1, p^2-p, \dots, p^k-p^{k-1}, \dots]$.
 - [例 2]: $\sigma = [1, p+1, p^2+p+1, \dots, \frac{p^{k+1}-1}{p-1}, \dots]$.
 - [例 3]: $\varepsilon = [1, p, p^2, \dots, p^k, \dots]$.
 - [例 4]: $\mathbb{1} = [1, 1, 1, \dots, 1, \dots]$.
 - [例 5]: $\mathfrak{e} = [1, 0, 0, \dots, 0, \dots]$.
 - [例 6]: $\mu = \mathbb{1}^{-1} = [1, -1, 0, \dots, 0, \dots]$.

2 乗法的関数のディリクレ積

2.1 乗法的関数と完全乗法的関数

定義 2.1.1: 乗法的関数

数論的関数 $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ が下記のすべてを満たすとき, 関数 f は乗法的関数であるという.

- $f(1) = 1$.
- $a, b \in \mathbb{N}^+, a \perp b \implies f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

定義 2.1.2: 乗法的関数全体の集合 $\mathbf{F}$

乗法的関数全体の集合を $\mathbf{F}$ とする.

定義 2.1.3: 完全乗法的関数

乗法的関数 f が下記を満たすとき, 関数 f は完全乗法的関数であるという.

$$a, k \in \mathbb{N}^+, \implies f(a^k) = (f(a))^k.$$

定義 2.1.4: 完全乗法的関数全体の集合 $\mathbf{K}$

完全乗法的関数全体の集合を $\mathbf{K}$ とする. $\mathbf{K} \subset \mathbf{F}$ である.

命題 2.1.5: 乗法的関数の同一条件

$f, g \in \mathbf{F}$ について下記がなりたつ.

$$(\forall p \in \mathbb{P}) \forall k \in \mathbb{N} (f(p^k) = g(p^k)) \iff f = g.$$

ただし, $f = g$ とは $\forall a \in \mathbb{N}^+ (f(a) = g(a))$ を意味する.

証明. $f, g \in \mathbf{F}$ とし, 任意の $p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}$ について $f(p^k) = g(p^k)$ とする.

$a \in \mathbb{N}^+$ とすると, $a = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$ ($p_i \in \mathbb{P}, k_i \in \mathbb{N}$) とかける. よって,

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\prod_{i=1}^n p_i^{k_i}\right) = \prod_{i=1}^n f(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^n g(p_i^{k_i}) = g\left(\prod_{i=1}^n p_i^{k_i}\right) = g(a). \\ \therefore f &= g. \end{aligned}$$

$$\therefore (\forall p \in \mathbb{P}) \forall k \in \mathbb{N} (f(p^k) = g(p^k)) \implies f = g$$

また逆は明らか.

□

2.2 ディリクレ積の定義

定義 2.2.1: ディリクレ積: $(f * g)$

$f, g \in \mathbf{F}$ について, ディリクレ積 $(f * g)$ を下記をみたす関数として定義する.

$$(f * g)(a) = \sum_{d|a} f(d)g\left(\frac{a}{d}\right).$$

このとき $(f * g) \in \mathbf{F}$ である.

例 2.2.2: ディリクレ積の例

ディリクレ積 $\mathbb{1} * \varphi, \mathbb{1} * \varepsilon$ に引数 6 を与えた場合の計算は下記の通り.

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} * \varphi)(6) &= \underbrace{\mathbb{1}(1)}_{=1} \cdot \underbrace{\varphi(6)}_{=\varphi(2)\varphi(3)=1 \cdot 2=2} + \underbrace{\mathbb{1}(2)}_{=1} \cdot \underbrace{\varphi(3)}_{=2} + \underbrace{\mathbb{1}(3)}_{=1} \cdot \underbrace{\varphi(2)}_{=1} + \underbrace{\mathbb{1}(6)}_{=1} \cdot \underbrace{\varphi(1)}_{=1} \\ &= 1 \cdot 2 + 2 + 1 + 1 \\ &= 6 = \varepsilon(6). \\ (\mathbb{1} * \varepsilon)(6) &= \mathbb{1}(1) \cdot \varepsilon(6) + \mathbb{1}(2) \cdot \varepsilon(3) + \mathbb{1}(3) \cdot \varepsilon(2) + \mathbb{1}(6) \cdot \varepsilon(1) \\ &= 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 12 = \sigma(6). \end{aligned}$$

乗法的関数全体 $\mathbf{F}$ はディリクレ積 $*$ について可換群をなす.

この群の単位元は $\mathfrak{e} = [1, 0, 0, \dots, 0, \dots]$ ($\mathfrak{e}(1) = 1, a > 1 \implies \mathfrak{e}(a) = 0$) である.

2.3 ディリクレ積の基本的な性質

命題 2.3.1: ディリクレ積に素数を与えた場合の値

$$f, g \in \mathbf{F}, p \in \mathbb{P} \implies (f * g)(p) = f(p) + g(p).$$

証明.

$$\begin{aligned} (f * g)(p) &= f(p) \cdot \underbrace{g(1)}_{=1} + \underbrace{f(1)}_{=1} \cdot g(p) \\ &= f(p) + g(p). \end{aligned}$$

□

命題 2.3.2: ディリクレ積逆元に素数を与えた場合の値

$$f \in \mathbf{F}, p \in \mathbf{P} \implies f^{-1}(p) = -f(p).$$

証明.

$$\begin{aligned}
 f(p) + f^{-1}(p) &= (f * f^{-1})(p) \quad (\because \text{命題 2.3.1.}) \\
 &= \mathfrak{e}(p) \quad (\because \mathfrak{e} \text{ はディリクレ積の単位元.}) \\
 &= 0. \quad (\because p > 1 \text{ より } \mathfrak{e}(p) = 0.)
 \end{aligned}$$

□

3 ベル級数と完全乗法的関数 ε_α のディリクレ積実数乗

乗法的関数のディリクレ積の計算に有用な概念としてベル級数を導入する. ベル級数を使って, 完全乗法的関数 $\varepsilon_\alpha(a) = a^\alpha$ のディリクレ積ベキ乗 ε_α^β を求める.

3.1 ベル級数

定義 3.1.1: ベル級数: $B_{f,p}(x)$

乗法的関数 $f(\in \mathbf{F})$ と素数 $p(\in \mathbb{P})$ について, 次の形式ベキ級数をベル級数と呼ぶ.

$$B_{f,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) x^n.$$

定理 3.1.2: ディリクレ積のベル級数はベル級数の積に等しい.

$f, g(\in \mathbf{F})$ について下記が成り立つ.

$$B_{f*g,p}(x) = B_{f,p}(x) \cdot B_{g,p}(x).$$

証明. $f, g(\in \mathbf{F})$ とする.

$$\begin{aligned}
 B_{f,p}(x) \cdot B_{g,p}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g(p^n) x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j+k=n \\ 0 \leq j,k}} f(p^j) g(p^k) \right) x^n \quad (\because \text{掛け合わせて } x^n \text{ となる項をまとめた.}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (f * g)(p^n) x^n \quad (\because \text{ディリクレ積の定義.}) \\
 &= B_{f*g,p}(x). \quad (\because \text{ベル級数の定義.})
 \end{aligned}$$

□

形式べき級数全体の集合 $\mathbf{S}$ について, 形式べき級数全体とその積がなす群を $(\mathbf{S}, \cdot)$ とし, 乗法的関数とディリクレ積がなす群を $(\mathbf{F}, *)$ とする.

乗法的関数 f からベル級数 $B_{f,p}(x)$ への写像は群 $(\mathbf{F}, *)$ から群 $(\mathbf{S}, \cdot)$ への準同型写像である.

準同型であるから, ディリクレ積単位元 $\mathbf{e}(\in \mathbf{F})$ は形式べき級数の単位元 $1(\in \mathbf{S})$ へ写り, ディリクレ積逆元 $f^{-1}(\in \mathbf{F})$ は形式べき級数の逆元 $\frac{1}{B_{f,p}(x)}(\in \mathbf{S})$ へ写る.

例 3.1.3: $\mathbb{1}$ 関数のベル級数: $B_{\mathbb{1},p}(x)$.

$$B_{\mathbb{1},p}(x) = \sum_{n=0}^n 1 \cdot x^n = \frac{1}{1-x}.$$

例 3.1.4: メビウス関数 $\mu(= \mathbb{1}^{-1})$ のベル級数: $B_{\mu,p}(x)$.

$\mu = [1, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots]$ より下記のとおり計算できる.

$$\begin{aligned} B_{\mu,p}(x) &= \sum_{n=0}^n \mu(p^n) \cdot x^n \\ &= \mu(1) \cdot x^0 + \mu(p) \cdot x^1 + \sum_{n=2}^n \mu(p^n) \cdot x^n \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot x + \sum_{n=2}^n 0 \cdot x^n \\ &= 1 - x. \end{aligned}$$

これは $B_{\mathbb{1},p}(x) = (1-x)^{-1}$ の逆数に等しい. つまりディリクレ積逆元のベル級数が元の関数のベル級数の逆数となる例である.

例 3.1.5: $\mathbb{1}^2$ のベル級数: $B_{\mathbb{1}^2,p}(x)$.

$$B_{\mathbb{1}^2,p}(x) = B_{\mathbb{1},p}(x) \cdot B_{\mathbb{1},p}(x) = \left(B_{\mathbb{1},p}(x)\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

例 3.1.6: ε のベル級数: $B_{\varepsilon,p}(x)$.

$$B_{\varepsilon,p}(x) = \sum_{n=0}^n \varepsilon(p^n) \cdot x^n = \sum_{n=0}^n (px)^n = \frac{1}{1-px}.$$

3.2 ベル級数を使って完全乗法的関数 ε_α のディリクレ積ベキ乗 ε_α^β を計算する

以下で示す通り, 完全乗法的関数 $\varepsilon_\alpha(a) = a^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) のディリクレ積有理数乗 ε_α^t ($t \in \mathbb{Q}$) をベル級数を使って求めることができる.

そして $\varepsilon_\alpha^t(p^k)$ が t の関数として連続であることから, ε_α のディリクレ積実数乗 ε_α^β ($\beta \in \mathbb{R}$) を定義できる.

命題 3.2.1: ε_α のベル級数 $B_{\varepsilon_\alpha, p}(x)$

$$\alpha \in \mathbb{C} \implies B_{\varepsilon_\alpha, p}(x) = (1 - p^\alpha x^\alpha)^{-1}.$$

証明. $\alpha \in \mathbb{C}$ について, 完全乗法的関数 $\varepsilon_\alpha(a) = a^\alpha$ をとる.

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_\alpha, p}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_\alpha(p^n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p^{\alpha n} x^n \\ &= (1 - p^\alpha x)^\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

ε_α のディリクレ積実数乗を定義するためにまず有理数乗が計算できることを示す. 準備として一般化二項定理と二項係数の関係式とを示す.(ただし, 実数 r について $(x^r)' = r x^{r-1}$ を前提する.)

補題 3.2.2: 一般化二項定理

$$\alpha, x \in \mathbb{C} \implies (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} {}_\alpha C_n x^n.$$

証明. $f(x) = (1+x)^\alpha$ とする.

$$f(0) = 1.$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \text{ より } f'(0) = \alpha.$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \text{ より } f''(0) = \alpha(\alpha-1).$$

$$\text{同様に } f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1).$$

よって $f(x)$ をマクローリン展開すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_\alpha C_n x^n. \end{aligned}$$

$$\text{つまり, } (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} {}_\alpha C_n x^n. \quad \square$$

補題 3.2.3: 二項係数の関係式: $(-1)^k {}_{-\beta}C_k = {}_{\beta+k-1}C_k$

$$\beta \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N} \implies (-1)^k {}_{-\beta}C_k = {}_{\beta+k-1}C_k.$$

証明.

$$\begin{aligned} (-1)^k {}_{-\beta}C_k &= (-1)^k \frac{(-\beta) \cdot (-\beta-1) \cdots (-\beta-k+1)}{k!} \\ &= \frac{((-1)(-\beta)) \cdot ((-1)(-\beta-1)) \cdots ((-1)(-\beta-k+1))}{k!} \\ &= \frac{\beta \cdot (\beta+1) \cdots (\beta+k-1)}{k!}. \\ \therefore (-1)^k {}_{-\beta}C_k &= {}_{\beta+k-1}C_k. \quad \square \end{aligned}$$

補題 3.2.4: ε_α のディリクレ積 $1/m$ 乗

$$\alpha \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}^+ \implies \varepsilon_\alpha^{\frac{1}{m}}(p^k) = \frac{1}{m} + k - 1 C_k p^{\alpha k}.$$

証明. $\alpha \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}^+$ とし, f を $f(p^k) = \frac{1}{m} + k - 1 C_k p^{\alpha k}$ で定義される乗法的関数とする.

$$\begin{aligned} (1 - p^\alpha x)^{-\frac{1}{m}} &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{-\frac{1}{m}}C_k (-p^\alpha x)^k \quad (\because \text{補題 3.2.2}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} + k - 1 C_k p^{\alpha k} x^k \quad (\because \text{補題 3.2.3}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) x^k \\ &= B_{f,p}(x). \\ \therefore (B_{f,p}(x))^m &= (1 - p^\alpha x)^{-1} \quad (\text{両辺を } m \text{ 乗した.}) \\ &= B_{\varepsilon_\alpha,p}(x). \quad (\because \text{命題 3.2.1.}) \\ \therefore B_{f^m,p}(x) &= B_{\varepsilon_\alpha,p}(x). \\ \therefore f^m &= \varepsilon_\alpha. \\ \therefore \varepsilon_\alpha^{1/m} &= f. \\ \text{つまり, } \varepsilon_\alpha^{1/m}(p^k) &= f(p^k) \\ &= \frac{1}{m} + k - 1 C_k p^{\alpha k}. \quad \square \end{aligned}$$

$1/m$ 乗が計算できたので次に一般の有理数乗を求める.

定理 3.2.5: ε_α のディリクレ積有理数乗

$$\alpha \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{Q} \implies \varepsilon_\alpha^t(p^k) = {}_{t+k-1}C_k p^{\alpha k}.$$

証明. $t \in \mathbb{Q}$ とすると, $t = \frac{n}{m}$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^+$) と表せる.

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_\alpha^t, p}(x) &= B_{\varepsilon_\alpha^{n/m}, p}(x) \\ &= (B_{\varepsilon_\alpha^{1/m}, p}(x))^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} + k - 1 C_k \cdot p^{\alpha k} \cdot x^k \right)^n \quad (\because \text{補題 3.2.4}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k {}_{-1/m}C_k \cdot p^{\alpha k} \cdot x^k \right)^n \quad (\because \text{補題 3.2.3}) \\ &= \left((1 - p^\alpha x)^{-1/m} \right)^n \quad (\because \text{補題 3.2.2}) \\ &= (1 - p^\alpha x)^{-n/m} \\ &= (1 - p^\alpha x)^{-t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{-t}C_k (-p^\alpha x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{t+k-1}C_k p^{\alpha k} x^k. \\ \therefore \varepsilon_\alpha^t(p^k) &= {}_{t+k-1}C_k p^{\alpha k}. \end{aligned}$$

□

$\varepsilon_\alpha^t(p^k) = {}_{t+k-1}C_k p^{\alpha k} = \frac{(t+k-1) \cdot (t+k-2) \cdots t}{k!} \cdot p^{\alpha k}$ は t の多項式である.

多項式関数は連続なので, $\beta (\in \mathbb{R})$ に収束する有理数列 $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ をとると, $\varepsilon_\alpha^{t_n}(p^k)$ は収束し, 収束値は ${}_{\beta+k-1}C_k p^{\alpha k}$ である.

そこで $\varepsilon_\alpha^\beta(p^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_\alpha^{t_n}(p^k) = {}_{\beta+k-1}C_k p^{\alpha k}$ という形で ε_α の実数乗を定義することができる.

定義 3.2.6: ε_α のディリクレ積実数乗

$\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$ について乗法的関数 ε_α^β を下記のように定義する.

$$k \in \mathbb{N} \implies \varepsilon_\alpha^\beta(p^k) = {}_{\beta+k-1}C_k p^{\alpha k}.$$

以上で, ε_α のディリクレ積実数乗を $\varepsilon_\alpha^\beta = [1, {}_\beta C_1 p^\alpha, {}_{\beta+1}C_2 p^{2\alpha}, {}_{\beta+2}C_3 p^{3\alpha}, \dots, {}_{\beta+k-1}C_k p^{k\alpha}, \dots]$ と定義できた.

$\varepsilon_\alpha^\beta(p^k)$ は $\beta (\in \mathbb{R})$ の関数として連続である.

4 概完全数方程式の異底間の解の転写

4.1 $\uparrow \sigma$ 版概完全数の異底間の解の転写

定理 4.1.1: $\uparrow \sigma$ 版概完全数における $p = \sigma(p_2^{p_2-1})$ の解から $p = p_2$ の解への $p_2^{p_2-1}$ 倍転写

$p_1, p_2 (\in \mathbb{P})$ が $p_1 = \sigma(p_2^{p_2-1})$ を満たすとする.
 α が $p = p_1$ を底とする $\uparrow \sigma$ 版概完全数であり, かつ $p_2 \nmid \alpha$ を満たす
 $\implies \alpha' (= p_2^{p_2-1} \cdot \alpha)$ は $p = p_2$ を底とする $\uparrow \sigma$ 版概完全数である.

証明.

$$\begin{cases} p_1, p_2 \in \mathbb{P}. \\ p_1 = \sigma(p_2^{p_2-1}). \\ (p_1 - 1) \uparrow \sigma(\alpha) = p_1 \sigma(\alpha) - \mathbb{1}^2(\alpha). \quad (\alpha \text{ は } p = p_1 \text{ を底とする } \uparrow \sigma \text{ 版概完全数方程式を満たす.}) \\ \alpha' = p_2^{p_2-1} \cdot \alpha. \end{cases}$$

とする. このとき $\underline{(p_2 - 1) \uparrow \sigma(\alpha') = p_2 \sigma(\alpha') - \mathbb{1}^2(\alpha')}$ を示せば良い.

$$\begin{aligned} \uparrow \sigma(p_2^{p_2-1}) &= (p_2 - 1)^{-1} (p_2 \cdot \underbrace{\sigma(p_2^{p_2-1})}_{=p_1} - \underbrace{\mathbb{1}^2(p_2^{p_2-1})}_{=(p_2-1)+1=p_2}) \quad (\because \uparrow \sigma(p^e) = (p-1)^{-1} (p\sigma(p^e) - \mathbb{1}^2(p^e)) \cdot) \\ &= (p_2 - 1)^{-1} (p_2 \cdot p_1 - p_2) \\ &= (p_2 - 1)^{-1} \cdot p_2 \cdot (p_1 - 1). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} (p_2 - 1) \uparrow \sigma(\alpha') &= (p_2 - 1) \cdot \uparrow \sigma(p_2^{p_2-1} \cdot \alpha) \\ &= (p_2 - 1) \cdot \uparrow \sigma(p_2^{p_2-1}) \cdot \uparrow \sigma(\alpha) \quad (\because \alpha \perp p_2 \text{ および } \uparrow \sigma \text{ の乗法性.}) \\ &= \cancel{(p_2 - 1)} \cdot (\cancel{(p_2 - 1)}^{-1} \cdot p_2 \cdot (p_1 - 1)) \cdot \uparrow \sigma(\alpha) \quad (\because \uparrow \sigma(p_2^{p_2-1}) = (p_2 - 1)^{-1} \cdot p_2 \cdot (p_1 - 1).) \\ &= p_2 \cdot (p_1 - 1) \uparrow \sigma(\alpha) \\ &= p_2 \cdot \left(\underbrace{p_1}_{=\sigma(p_2^{p_2-1})} \cdot \sigma(\alpha) - \mathbb{1}^2(\alpha) \right) \quad (\because (p_1 - 1) \uparrow \sigma(\alpha) = p_1 \sigma(\alpha) - \mathbb{1}^2(\alpha).) \\ &= p_2 \cdot \left(\underbrace{\sigma(p_2^{p_2-1}) \cdot \sigma(\alpha)}_{=\sigma(p_2^{p_2-1} \cdot \alpha) = \sigma(\alpha')} - \mathbb{1}^2(\alpha) \right) \\ &= p_2 \sigma(\alpha') - \underbrace{p_2 \cdot \mathbb{1}^2(\alpha)}_{=\mathbb{1}^2(p_2^{p_2-1}) \cdot \mathbb{1}^2(\alpha) = \mathbb{1}^2(\alpha')} \\ &= p_2 \sigma(\alpha') - \mathbb{1}^2(\alpha'). \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{(p_2 - 1) \uparrow \sigma(\alpha') = p_2 \sigma(\alpha') - \mathbb{1}^2(\alpha')}.$$

□

フィボナッチの放射と螺旋

Fibonacci Radial and Spiral

岩淵 勇樹

Yuuki IWABUCHI

2024-08-23

Abstract

極座標の動径と偏角をそれぞれ対数スケールに変換した極座標として、両対数極座標を定義します。そのうえで、両対数極座標離散プロットと呼ぶことにします。両対数極座標離散プロットにおいて、底として2を置くことによって螺旋状に広がる並びと同時に放射状に広がる並びも見受けられます。さらに、底として黄金比を置くことによって放射部分にフィボナッチ数が現れ、プロット間隔をフィボナッチ列に合わせることで放射部分が直線状に現れます。それぞれの放射はフィボナッチ数やリュカ数などのワイソフ配列上に現れる行が全て現れます。

1 両対数極座標

1.1 定義

極座標 (r, θ) は直交座標系においては以下のように定義されます。

$$x = r \cos(\theta) \quad (1)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (2)$$

両対数極座標を以下のように定義します。

$$x = \log_b(r) \cos(\log_b(\theta)) \quad (3)$$

$$y = \log_b(r) \sin(\log_b(\theta)) \quad (4)$$

底を2としたときに自然数の間隔でインデックスを両対数極座標プロットをすると図1のよう

になります。

底を黄金比 $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ としたときに自然数の間隔でインデックスを両対数極座標プロットをすると図 2 のようになります。

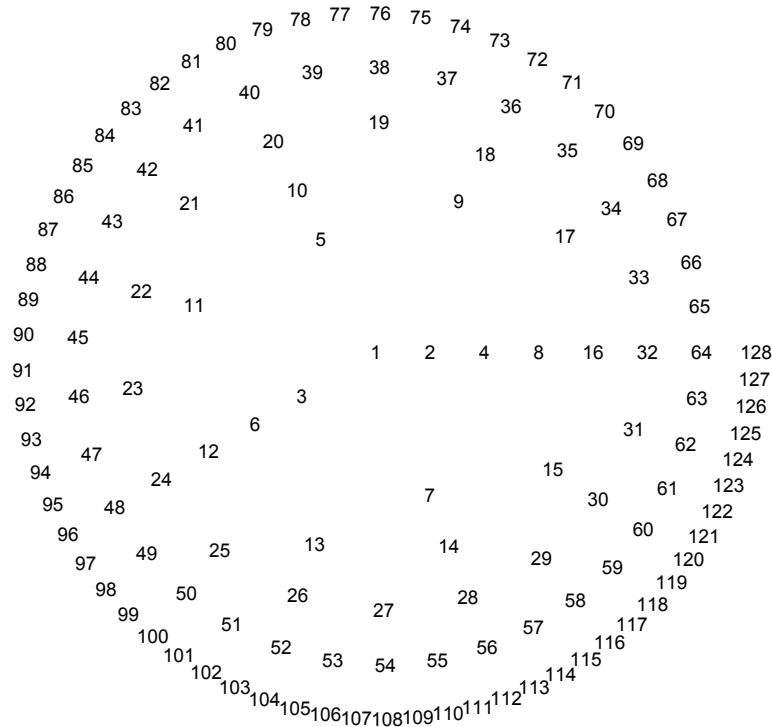


図 1 2 を底とした等間隔の両対数極座標離散プロット

プロット方法はアルキメデスの螺旋や対数螺旋と類似しているため、基本的には螺旋構造が現れます。その一方で、底に対して等比となる数の集まりが放射構造として現れる場合があります。

2 準備

2.1 フィボナッチ列

2.1.1 フィボナッチ列の定義

$S_{(a,b),0}$ を a 、 $S_{(a,b),1}$ を a, b と定めます。そして $S_{(a,b),n} = S_{(a,b),n-1}S_{(a,b),n-2}$ (1 つ前の有限列と 2 つ前の有限列の連結) とします。この極限 $S_{(a,b),\infty}$ を $S_{(a,b)}$ と定めます。

以下に $S_{a,b,n}$ の例を挙げます。

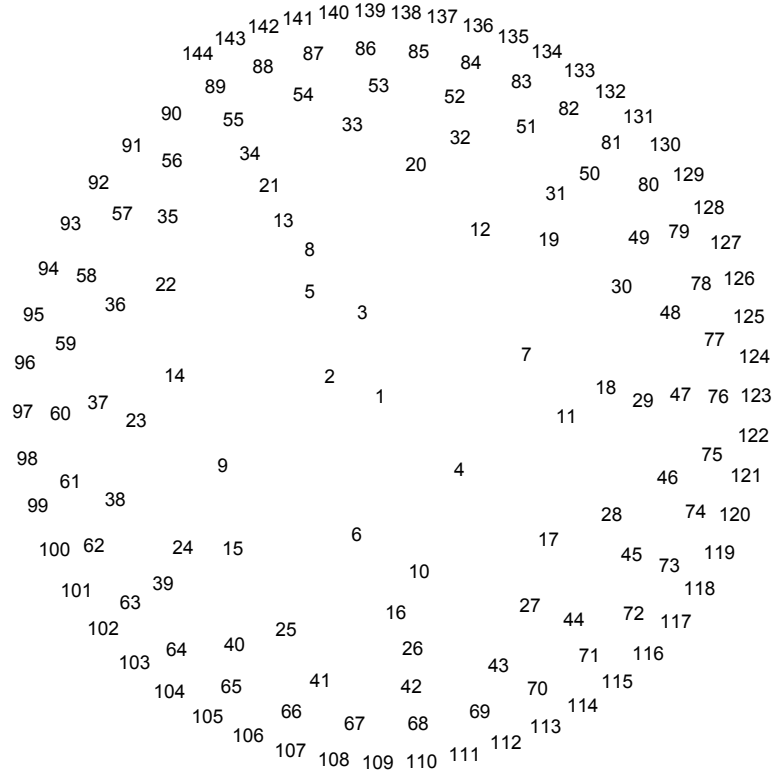


図 2 黄金比を底とした等間隔の両対数極座標離散プロット

$$S_{(a,b),0} = a$$

$$S_{(a,b),1} = a, b$$

$$S_{(a,b),2} = a, b, a$$

$$S_{(a,b),3} = a, b, a, a, b$$

$$S_{(a,b),4} = a, b, a, a, b, a, b, a$$

$$S_{(a,b),5} = a, b, a, a, b, a, b, a, a, b, a, a, b$$

具体的に a, b に $1, 0$ を代入した片側無限列 $S_{(1,0)} = 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ は、一般にフィボナッチ列と呼ばれています [2]。

2.2 物智の倍音配列

最も簡単なインタースパージョン [3] の例として物智の倍音配列を挙げます [1]。列が 1 から始まる奇数列となっており、行は右に行くに連れて 2 倍ずつされます。

ただし、実際は行列ともに無限に続きますが、表示は 8 行 8 列に限っています。

1	2	4	8	16	32	64	128
3	6	12	24	48	96	192	384
5	10	20	40	80	160	320	640
7	14	28	56	112	224	448	896
9	18	36	72	144	288	576	1152
11	22	44	88	176	352	704	1408
13	26	52	104	208	416	832	1664
15	30	60	120	240	480	960	1920

このような配列を**物智の倍音配列**と呼びます。

物智の倍音配列には以下のような特徴があります。

- 自然数と 1 対 1 対応
- 1 行目は 2 のべき乗
- 1 列目は奇数の列
- 縦は等差数列（線形的）
- 横は公比 2 の等比数列（指数関数的）

2.3 ワイソフ配列

インタースパージョンの代表的な例としてワイソフ配列 $W_{m,n}$ は以下のように定義されます [1] [5] [6]。

ただし、 $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とします。

$$W_{m,1} = \lfloor [m\varphi]\varphi \rfloor \quad (5)$$

$$W_{m,2} = \lfloor [m\varphi]\varphi^2 \rfloor \quad (6)$$

$$W_{m,n} = W_{m,n-2} + W_{m,n-1} (n > 2) \quad (7)$$

以下に、ワイソフ配列の一部を示します。

1	2	3	5	8	13	21	34
4	7	11	18	29	47	76	123
6	10	16	26	42	68	110	178
9	15	24	39	63	102	165	267
12	20	32	52	84	136	220	356
14	23	37	60	97	157	254	411
17	28	45	73	118	191	309	500
19	31	50	81	131	212	343	555

以下はワイソフ配列の特徴です。

- 自然数と 1 対 1 対応
- 1 行目はフィボナッチ数
- 2 行目はリュカ数
- 横に隣り合う数比は黄金比 Φ に漸近（指数関数的）
- 縦の差の値はフィボナッチ列（線形的）

3 インタースパージョンと両対数極座標

3.1 物智の倍音配列の放射と螺旋

図 1 では、物智の倍音配列の各行が放射として現れます。一周するごとに新しい放射が 2 倍ずつ増えていきます。

偏角は $2\pi \log_2 n = 0, 2\pi, 2\pi \log_2 3, 4\pi, 2\pi \log_2 5, 2\pi \log_2 6, 2\pi \log_2 7, 6\pi, \dots$ と、 n が 2 べきになるごとに 2π の倍数と一周します。

3.2 フィボナッチの放射と螺旋

図 2 に図示した時点で、放射としてフィボナッチ数の並びが見受けられますが、サンプリング点をフィボナッチ列にすることにより、図 3 のように整列されます。

偏角の整列は次のように行われます。

$$\delta_n = S_{(\Phi,1)} = \Phi, 1, \Phi, \Phi, 1, \Phi, 1, \Phi, \dots \quad (8)$$

とし、その累積 σ_n を考えます。

$$\sigma_n = \Phi, 1 + \Phi, 1 + 2\Phi, 1 + 3\Phi, 2 + 3\Phi, 2 + 4\Phi, 3 + 4\Phi, 3 + 5\Phi, \dots \quad (9)$$

に対し、

$$2\pi \log_{\Phi} \sigma_n = 2\pi_{\Phi} \Phi, 2\pi \log_{\Phi} (1 + \Phi), 2\pi \log_{\Phi} (1 + 2\Phi), 2\pi \log_{\Phi} (1 + 3\Phi), 2\pi \log_{\Phi} (2 + 3\Phi), \dots \quad (10)$$

を偏角とします。

$$\log_{\Phi} \sigma_2 = \log_{\Phi} (1 + \Phi) = \log_{\Phi} \Phi^2 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{\Phi} \sigma_3 = \log_{\Phi} (1 + 2\Phi) = \log_{\Phi} \Phi^3 = 3 \quad (12)$$

$$\log_{\Phi} \sigma_5 = \log_{\Phi} (2 + 3\Phi) = \log_{\Phi} \Phi^4 = 4 \quad (13)$$

$$\dots \quad (14)$$

から示されるように、 n がフィボナッチ数になると一周します。

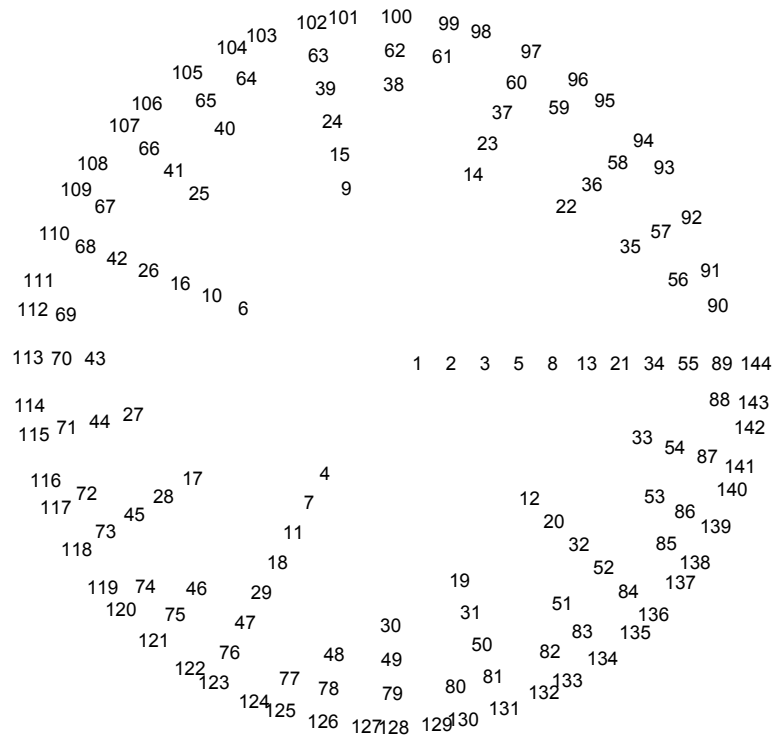


図3 黄金比を底としたフィボナッチ列間隔の両対数極座標プロット

4 まとめ

本研究では、両対数極座標離散プロットを提案しました。

基本的な例として物智の倍音配列を離散プロットし、応用としてフィボナッチの放射と螺旋の離散プロットを示しました。

このような可視化により、新たな数のつながりを見いだせると考えられます。

参考文献

- [1] 岩淵 勇樹 『ワイソフ配列について』, 日本フィボナッチ協会 第14回研究集会 (2016)

- [2] 岩淵 勇樹 『フィボナッチ列とそれを応用した黄金比の近似』, 日本フィボナッチ協会 第 15 回研究集会 (2017)
- [3] KIMBERLING, Clark. “Interspersions and dispersions”. Proceedings of the American Mathematical Society (1993), 117.2: 313-321.
- [4] KIMBERLING, Clark. “The Zeckendorf array equals the Wythoff array”. Fib. Quart (1995), 33: 3-8.
- [5] Weisstein, Eric W. “Wythoff Array”. MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/WythoffArray.html>
- [6] Tatiana Shubin, David F. Hayes, Gerald Alexanderson. “Expeditions in Mathematics”. Mathematical Association of America (2011), 75-76.

図余りと図足らずを許した正三角形を連ねた螺旋図 (Gibonacci数列と関連数列)

Spirals based on Equilateral Triangles about Various Related Padovan and Weighted Gibonacci Sequences

大阪工業大学 中西真悟

2024年8月23日 東京理科大学開催 フィボナッチ協会研究集会資料 (持ち帰り質疑回答追記版)

Abstract: This document presents the visualization for single, double, and triple equilateral triangle spirals using the related sequences and ratios. Single spirals based on plastic ratio or the related sequences such as Padovan sequence and Perrin sequence are displayed clearly by flexibly changing the initial constants if we admit small amount of reminder or short of the sequences. In the same way, we can show double spirals using equilateral triangles such as Fibonacci sequence, Lucas sequence, k-Pell sequence, and k-Pell-Lucas sequences and related metallic ratios. We call those sequences weighted Gibonacci sequences based on primary metallic ratios in this document. The double spirals based on this thinking about primary metallic ratios and the related sequences are illustrated visually. About showing triple spirals using equilateral triangles, we would like to consider the ratio 2 as the second secondary metallic ratios. We should use the sequence of powers of 2 as the sequence based on Jacobsthal sequence with changing initial constants by applying this concept. Moreover, we can investigate the characterizations about Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas sequences to create the spirals if we consider some geometric shorts of spirals about the characterizations.

Keywords: Plane geometry, Metallic ratios, Plastic ratio, Fibonacci sequence, Lucas sequence, k-Pell sequence, k-Pell-Lucas sequence, Jacobsthal sequence, Jacobsthal-Lucas sequence, Padovan sequence, Perrin sequence

1. 結 論

標題の正三角形を用いた螺旋図をイメージいただきたい。正三角形を活用した螺旋であるがゆえに、正三角形の3辺の活用を考えると、シングル、ダブル、トリプル正三角形螺旋を描ける可能性があることは想像がつくかと思われる。まず、シングル正三角形螺旋はプラスチック数^[1]、もしくはプラスチック比^[2]と呼ばれる比を基準に描く螺旋図であることは周知である。また、この性質と所縁のあるパドヴァン数列^[3,4,7]やペラン数列^[5,6]による正三角形を連ねた螺旋図^[4,6,7-11]もGoogleで検索したら表示されるように同様に認知されている。中でも、パドヴァン数列で描く正三角形による螺旋図は正三角形が旨く埋め込まれて図あまりや図足らずがなく正三角形を連ねた完全な螺旋図を描けるため、正三角形の螺旋図の代表格として例証も盛んであるようだ^[7-11]。

一方で、ペラン数列は最初の3項で凹凸が確認できていて、図あまりの状態が始まるが、その後は正常に正三角形を連ねた螺旋図を作画できる。このように、パドヴァン数列やペラン数列での正三角形を連ねた螺旋図は確認できるのだが、類似する数列では例証は可能なのかを調査しても把握できなかった。このため、本研究の題目にもある通り、若干の図余りと図足らずを認めることとし^[10]、プラスチック比の性質に関連する数列を活かしながら図あまりや図足らずを許した正三角形を連ねた螺旋図が描けるか試したところ可能であると確認できた。こ

のため、先に2024年2月開催の図学会関西支部学術講演会においてこのことを紹介している^[10]。そこで、今回はフィボナッチ数列に所縁のある研究者が集う会合に初参加したので、このことを簡潔に紹介すると同時に、残るダブル正三角形螺旋図と、トリプル正三角形螺旋図にも焦点を当てて研究を進めた成果を紹介したい。

ところで、ダブル正三角形螺旋は黄金比が基準で描けることはあまり知られていないようである^[12-15]。同時に、フィボナッチ数列でも作画が可能なことも著者は知り得なかった。日本語で検索して見つからなかった両者を見つけた時には興奮したが、フィボナッチ数列の古郷でもあるイタリアを検索地に設定して、Googleで英語による検索を行うと、Fibonacci Roseという名称でYouTubeでは紹介されており、アクセス数も多いことがわかった^[14]。このため、かなり古くから知られていたか、論文検索を行って見つけたSharpの作品^[15]が黄金比もしくはフィボナッチ数列による最初のダブル正三角形螺旋であるため、YouTubeのアクセス数が多いことも納得でき、西洋諸国では認知されていることがわかった。

一方で、わが国では日本語や英語で検索をかけても、文献を調査しても、著者が研究HPに関連図案と一緒にこれらを公開する前は、フィボナッチ数列と正三角形を用いた螺旋図は見つからなかった。しかし、小生の研究HPに本日の研究成果画像の一部を公開したところ、Googleに好意的に画像として既に認識されたようであ

る。

そこで、本稿ではパドヴァン数列とペラン数列と同様に図余りと図足らずを考慮して、フィボナッチ数列の正三角形による螺旋図の発展形として、リュカ数列、ムラツ数列^[16,17]を含むGibonacci数列^[18,19]でも螺旋図の作画は適用可能であることを正式に今回は紹介している。さらに、二項の和に重みを考慮したペル数列^[20]、ペル・リュカ数列^[20]のみならず、 k -ペル数列^[21]や、 k -ペル・リュカ数列^[21]をも想定した時に同様に描けることも加えて紹介する。したがって、同じ考え方を適用すると、黄金比、白銀比、青銅比を基準^[22]とするプライマリーの貴金属比^[23]の活用によるダブル正三角形螺旋図の作画も可能であることも報告する。

続いて、トリプル正三角形螺旋は正三角形の1辺の長さが2のべき乗で表わせるので、セカンダリーの第2貴金属比^[23]とも相性が良く、本研究では数列を用いた正三角形螺旋の作画を狙っているため、重み付けがあるヤコブスタール数列^[24-26]の初項からの設定値の修正を考慮した数列として紹介したい。また、ヤコブスタール数列とヤコブスタール・リュカ数列^[24-26]を活用するとダブル正三角形螺旋図を描けるが中途半端となることと、むしろ、トリプル正三角形螺旋図に適していることを図足らずの幾何学的性質を積極的に活用しながら例図を紹介したい。特筆すべき点として、フィボナッチ数列のように一つずらしたヤコブスタール数列の和の重みを1と1に揃えて表現すると、2のべき乗と一致するため、このこ

とを本題の図足らずという視点で活用した提案を試みている。

このような、シングル、ダブル、トリプル正三角形螺旋図を総合するような研究は、2021年のFathauerの論文^[7]まで見つからないようである。まずは、次章では定番のパドヴァン数列とペラン数列の基準となるプラスチック比に焦点を当てて、シングル正三角形螺旋図を考察し、その後の章で、フィボナッチ数列や k -ペル数列の基準となるプライマリーの貴金属比にも焦点を変更してダブル螺旋図を考察する。続いて、シングル螺旋図、ダブル螺旋図に続いて、トリプル正三角形螺旋図として、ヤコブスタール数列の修正版による正三角形の螺旋図を考察する。

2. プラスチック比、関連する数列の公式

プラスチック比もしくはプラスチック数と呼ばれる数値は、

$$\rho = 1.3247195 \dots, \quad \because \rho^3 = \rho + 1 \quad (1)$$

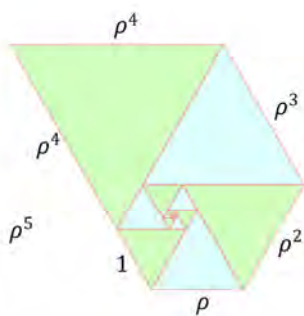
の数式の解である。厳密には累乗根を用いて

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{6}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{6}}} \quad (2)$$

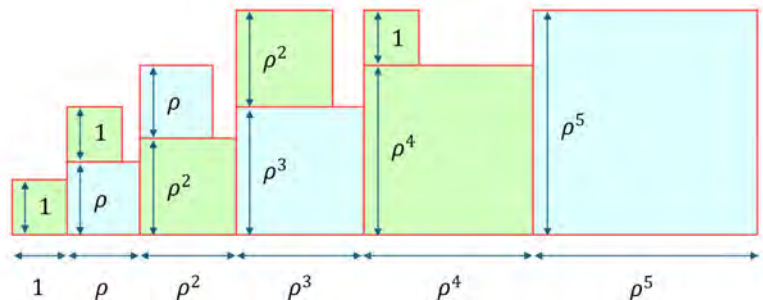
と表記できるのだが、三次方程式の解であるが故に数値の大きさを感じるにはやや取っ付きにくいかもしれない。式(1)(2)の解を数値として眺めてみると黄金比よりも小さいことがわかる。しかしながら、この数値は次の多重

Plastic ratio
 $\because \rho^3 = \rho + 1$ and

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{6}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{6}}} = 1.3247 \dots$$



$$\begin{aligned} \rho^3 &= \rho + 1 \\ \rho^5 &= \rho^4 + 1 = \rho^3 + \rho^2 \end{aligned}$$



Examples

Padovan sequence : $(g_1, g_2, g_3) = (1, 1, 1)$

Perrin sequence : $(g_1, g_2, g_3) = (3, 0, 2)$

$$P_{(1,1),0}^{(g_1, g_2, g_3)} = g_1,$$

$$P_{(1,1),1}^{(g_1, g_2, g_3)} = g_2,$$

$$P_{(1,1),2}^{(g_1, g_2, g_3)} = g_3,$$

$$P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} = 1 \cdot P_{(1,1),j-2}^{(g_1, g_2, g_3)} + 1 \cdot P_{(1,1),j-3}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 3)$$

or

$$P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} = 1 \cdot P_{(1,1),j-1}^{(g_1, g_2, g_3)} + 1 \cdot P_{(1,1),j-5}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 5)$$

$$P_{(1,1),0}^{(1,1,1)} = 1$$

$$P_{(1,1),1}^{(1,1,1)} = 1$$

$$P_{(1,1),2}^{(1,1,1)} = 1$$

$$P_{(1,1),0}^{(3,0,2)} = 3$$

$$P_{(1,1),1}^{(3,0,2)} = 0$$

$$P_{(1,1),2}^{(3,0,2)} = 2$$

$$\rho = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{P_{(1,1),j+1}^{(g_1, g_2, g_3)}}{P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)}} \right) \text{ and } \rho^3 = 1 + \frac{1}{\rho}$$

$$\rho = 1.3247 \dots = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}}$$

Ref. Annual meeting of Kansai branch of JSGS 2023, Japan, 2024

図1 プラスチック比の公式の視覚化^[2,4,6]

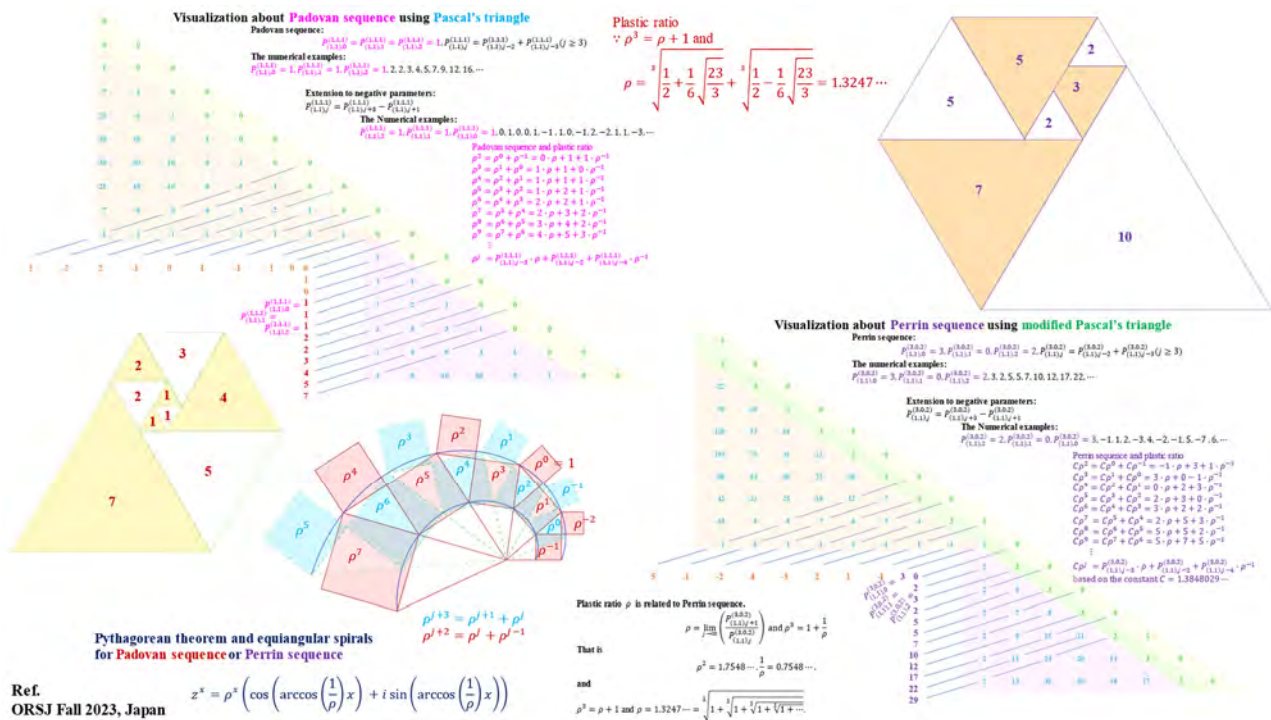


図2 パドヴァン数列とペラン数列のパスカルの三角形および正三角形を連ねた螺旋図の例図^[4,6,9,10,27]

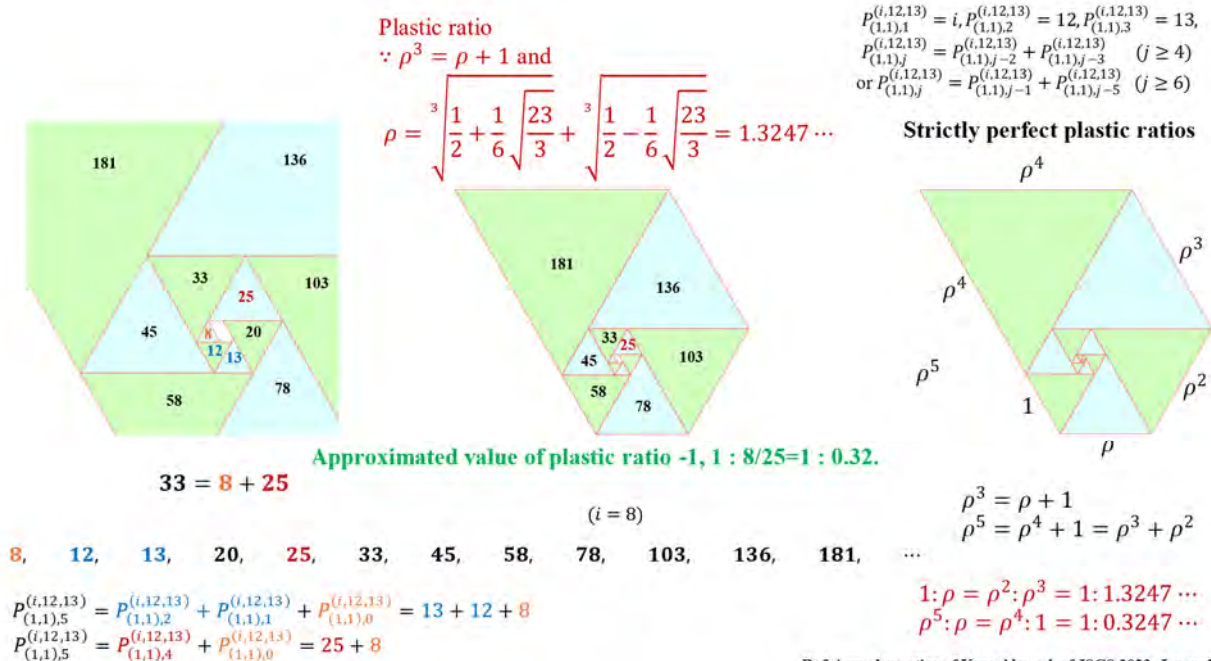


図3 プロトタイプの数値を置いて正三角形を連ねた螺旋図が描けるか試す例図^[2,10]

根号

$$\rho = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}} \quad (3)$$

で表わせることも有名で、建築物のデザインでも活用された実績があるようにデザインの数値としては大変興味深い。余談だが、日本で白銀比という呼称は認知され

つあるが、海外の研究者や建築家の中には、この数式が黄金比と類似しており、黄金比の次を意味する性質として白銀比と呼ぶこともあったらしい。ところで、図1に示す上の正方形の並びのようにべき乗で変化する各正方形の一辺の長さを見ていただきたい。よく見ると、式(1)の意味が感覚的に理解できるように見えてくる。と同時に、

わざとリズムを崩すように数式

$$\rho^5 = \rho^4 + 1 \text{ or } \rho^5 = \rho^3 + \rho^2 \quad (4)$$

が現れてくることもわかる^[2,11]. この式(4)が図学会関西支部学術講演会の発表では非常に重要な役割を果たした. このことを理解するために, 図1の正三角形を連ねた螺旋図を見ていただきたい. この図から式(4)を用いたプラスチック比の正三角形を連ねた螺旋図の原理が分かる. 式(4)の両辺に ρ を乗じると図1の正三角形を連ねた螺旋図は拡大するし, 除すると縮小していくことが読み取れる. このように厳密に螺旋図を構成する特徴があることはパドヴァン数列による例証と比較して活用が少ないようである. いま, 言及したパドヴァン数列

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(1,1,1)} &= P_{(1,1),1}^{(1,1,1)} = P_{(1,1),2}^{(1,1,1)} = 1, \\ P_{(1,1),j}^{(1,1,1)} &= P_{(1,1),j-2}^{(1,1,1)} + P_{(1,1),j-3}^{(1,1,1)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (5)$$

はプラスチック比ともとても相性が良い^[3,4]. パドヴァン数列は式(5)の上付きに記すように初項から3つの設定値を1と置き, 下付きに記すように1つスキップして二つ手前と三つ手前を重みが共に1である和として数列を形成する特徴がある. プラスチック比とパドヴァン数列は一つスキップするという共通の特徴を有することで数学的魅力を兼ね備えている.

同様に, ペラン数列

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(3,0,2)} &= 3, P_{(1,1),1}^{(3,0,2)} = 0, P_{(1,1),2}^{(3,0,2)} = 2, \\ P_{(1,1),j}^{(3,0,2)} &= P_{(1,1),j-2}^{(3,0,2)} + P_{(1,1),j-3}^{(3,0,2)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (6)$$

も一つスキップする数列として知られている^[5,6]. この数式は上付きで示す(3,0,2)が記す通り, 初項がパドヴァン数列と異なるだけで表記できる. この両者は図2で視覚化するように正三角形を連ねた螺旋図を描けるだけではなく, 著者はペラン数列もパスカルの三角形の修正版として2023年の図学会大会で公表している^[27]. 後ほど, 数列の特徴と正三角形螺旋の特徴を同時に活かすことがあるため, 加えて例示している^[9,10].

ここで, 図1に示すように初項から三つの数値を数列が成り立つように任意に, (g_1, g_2, g_3) と柔軟に変更して設定できるよう一般化した

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(g_1, g_2, g_3)} &= g_1, \\ P_{(1,1),1}^{(g_1, g_2, g_3)} &= g_2, \\ P_{(1,1),2}^{(g_1, g_2, g_3)} &= g_3, \\ P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} &= P_{(1,1),j-2}^{(g_1, g_2, g_3)} + P_{(1,1),j-3}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (7)$$

なる数列を考えてみたい. この式(7)はプラスチック比と関連する設定値が一般化されたワン・スキップ型数列であり, これを次章以降でシングル正三角形の螺旋図として視覚化しながらその考察を取り扱ってみたい.

3. パドヴァン数列とペラン数列の視覚化

再度, 図2を見ていただきたい. パドヴァン数列とペラン数列の両数列は, パスカルの三角形の修正版や正三角形による螺旋図を視覚化できる. また, 蛇足ではあるがプラスチック比はピタゴラスの定理を用いると正三角形による螺旋図だけではなく等角螺旋も描ける特徴があることも例示している.

正三角形を連ねた螺旋図では, 図2の右側に示す正三角形を連ねた螺旋図がパドヴァン数列を構成しており, 左側に示す螺旋図はペラン数列を構成している. 図2からわかるように, パドヴァン数列には図あまりや図足らずは認められず正確に螺旋図を描ける. このように, パドヴァン数列は正三角形を連ねる螺旋として平面幾何学的に優秀な特徴を有する.

一方で, ペラン数列による螺旋はどのような特徴が見つかるであろうか. 図2の右側の正三角形螺旋図を確認すると, 初項の3が図あまりの状態であることが確認できる. 果たしてこのことは図としての図形の性質を追求するには図が収まりよく整合していないことから都合が良くないことであろうか. また他にもプラスチック比と関連した類似の設定値を一般化した(7)で示すワン・スキップ型の数列では, どのように正三角形を連ねる螺旋図と結びつくのであろうかという疑問が残ったので, 調査を進めてみたが先行研究を把握できなかったことから図学会関西支部学術講演会でその考察を行なった.

このことを説明する題材の始めとして, 次節ではプラスチック比を近似した簡素な比率を用いてプラスチック比に関連するワン・スキップ型の数列を構成するプロトタイプを考えてみたい.

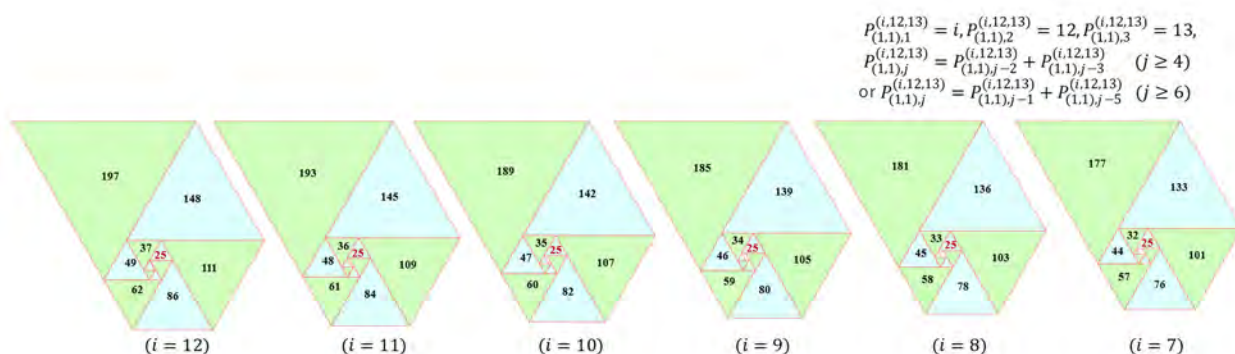
3.1. 人為的に図足らずを組み込むプラスチック比を基準とする正三角形による螺旋図の一例

2章の式(4)を参考にすると類似する数列は式(7)を

$$P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} = P_{(1,1),j-1}^{(g_1, g_2, g_3)} + P_{(1,1),j-5}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 5) \quad (8)$$

として表記し直すことができる特徴がある. このため, 式(7)と(8)の両式を用いると正三角形は容易に描けることを紹介したい. まず, 簡素な近似値として具体的には, 図学会関西支部学術講演会で図3に示すシングル正三角形の螺旋図をプロトタイプとして取り上げて考察を行なった. いま, 図3に示すように

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(8,12,13)} &= 8, \\ P_{(1,1),1}^{(8,12,13)} &= 12, \\ P_{(1,1),2}^{(8,12,13)} &= 13, \\ P_{(1,1),j}^{(8,12,13)} &= P_{(1,1),j-2}^{(8,12,13)} + P_{(1,1),j-3}^{(8,12,13)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (9)$$



Ref. Annual meeting of Kansai branch of JSGS 2023, Japan, 2024

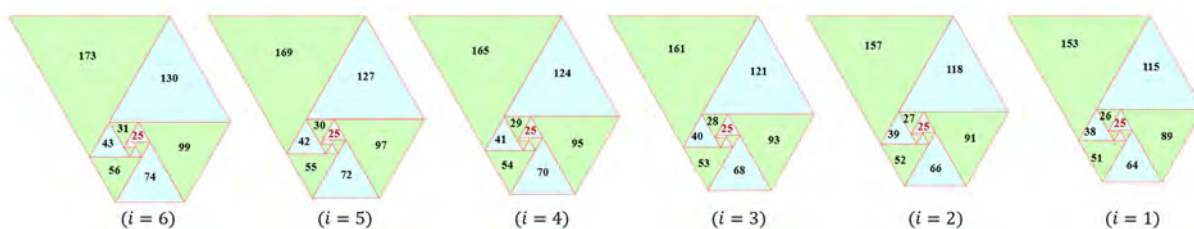


図4 任意の数値を置いて正三角形を連ねた螺旋図が描けるか試す例図^[10]

$$p_{(1,1),5}^{(i,12,13)} = p_{(1,1),2}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),1}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),0}^{(i,12,13)} = 13 + 12 + i$$

$$p_{(1,1),5}^{(i,12,13)} = p_{(1,1),4}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),0}^{(i,12,13)} = 25 + i$$

$$p_{(1,1),0}^{(i,12,13)} = i, p_{(1,1),1}^{(i,12,13)} = 12, p_{(1,1),2}^{(i,12,13)} = 13,$$

$$p_{(1,1),j}^{(i,12,13)} = p_{(1,1),j-2}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),j-3}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 4)$$

$$\text{or } p_{(1,1),j}^{(i,12,13)} = p_{(1,1),j-1}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),j-5}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 6)$$

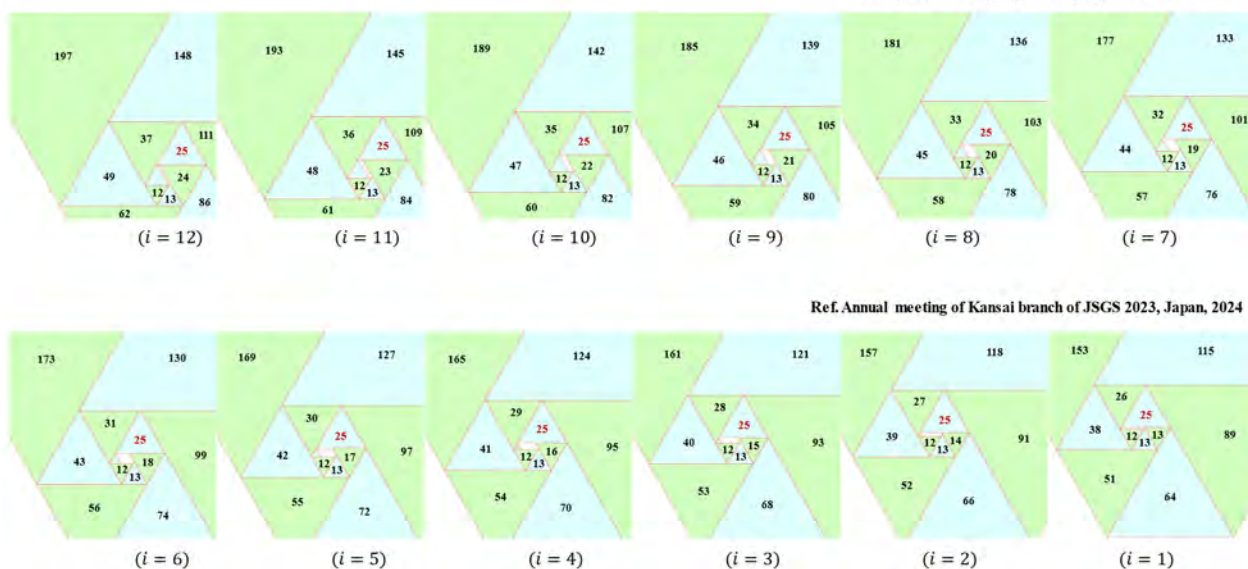


図5 図4の初項の正三角形の違いを比べるために正三角形を連ねた螺旋図を拡大^[10]

を考えてみたい. この数列の作成の意図は

$$p_{(1,1),4}^{(8,12,13)} + p_{(1,1),0}^{(8,12,13)} = 25 + 8 = 33 \quad (10)$$

を用いると, $1:8/25 = 1:0.32$ とプラスチック比に比較的近い簡素な比率で例示できる. このため, 肉眼ではプラスチック比によるシングル螺旋図と比較してもほとんど差異がなくその特徴の図示が可能であると想定できる.

すなわち, この値を活用するのは, プラスチック比に習って正三角形を連ねた螺旋図を明確に視覚化してくれることを期待しての意図的な設定である. この例では, 25を数列が成り立つように数列の第2項を12と第3項を13に設定して25を分割できるので, 式(7)に従うワン・スキップ型数列を人為的に作成した視覚化が可能である.

この結果、図3を一瞬見ただけならば、プラスチック比による正三角形を連ねた螺旋図なのか、このプロトタイプによる数列の螺旋図なのかは判断が付きにくいことがわかる。この忘れ得ぬ重要な特徴を有するプロトタイプは次のように展開すると任意の図あまりや図足らずを許した正三角形を連ねた螺旋図の作画の可能性を拓げてくれたことを図学会関西支部学術講演会では公表できた。すなわち、数値8と25のペアを日付8月25日に見立てて、この考え方を拡大して、暦に従って8月を1月から12月まで変化させて螺旋図を描く数列の作成を行える例示が期待できる。この考え方を数式で記述すると次のようになる。

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(i,12,13)} &= i \quad (i = 1, 2, \dots, 12), \\ P_{(1,1),1}^{(i,12,13)} &= 12, \\ P_{(1,1),2}^{(i,12,13)} &= 13, \\ P_{(1,1),j}^{(i,12,13)} &= P_{(1,1),j-2}^{(i,12,13)} + P_{(1,1),j-3}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (11)$$

このように記述すると、 $i = 12$ では12月25日でクリスマスまでの記述が可能となり、数値の並びに音を付けての学びや遊びを楽しむ日本人の習慣と一緒に予稿集を確認した読者がイメージするデザインだけではなく、シングル正三角形による螺旋図を用いて様々な余興を楽しむことができるかもしれない。このため、数えきれないほどのワン・スキップ型数列による正三角形を連ねた螺旋図が応用できるものと期待したい。

3.2. 人為的に図足らずを組み込むプラスチック比を基準とする正三角形による螺旋図の一例の応用

式(11)を用いると図4に示すように、初項が $i = 1$ から12まで変化させたときの図の違いが描ける。一見するとそれぞれの螺旋図の違いに気を取られるだけではなく、どの螺旋図も正三角形が連なっていることが把握できる。しかし、よく見てみると、微妙な変化が確認でき、そこに図足らずや図あまりの様子を知ることができる。このことをより明確に確認できるよう図4の螺旋図の中心付近を拡大した図が図5の例示である。図5を良く確認すると、 $i = 1, 2, \dots, 12$ の特徴により、シングル正三角形螺旋図の中心を位置するはずの初項付近で図足らずの様子が確認できる。

このほかにもパドヴァン数列とペラン数列を掛け合わせたワン・スキップ型数列による例示を幾通りか試してみたところ、すべて正三角形を連ねた螺旋図を描くことに成功した。もちろん、図あまりと図足らずを許したわけではあることはご承知のとおりである。したがって、図あまりもしくは図足らずを許した場合には、パドヴァン数列やペラン数列のように一つスキップするワン・ス

キップ型数列に従って正三角形を連ねた螺旋図を描ける作画方法があることがわかったので、図学会関西支部学術講演会で公表したことを再度言及しておく。本研究ではこの特徴をフィボナッチ研究集会でも報告するとともに、このことはどのように活かされるだろうかを考えてみたい。すなわち、正三角形を連ねた螺旋図を描くためには

$$P_{(1,1),j-2}^{(g_1,g_2,g_3)} + P_{(1,1),j-3}^{(g_1,g_2,g_3)} = P_{(1,1),j-1}^{(g_1,g_2,g_3)} + P_{(1,1),j-5}^{(g_1,g_2,g_3)} \quad (12)$$

を基準にワン・スキップ型数列を考案すればよいことがわかった。ただし、得られる数列の初項付近の図あまりもしくは図足らずを想定しておくことと、図を描く際に工夫し、応用を心掛ける必要があることも付記して、ワン・スキップ型数列で上手く描けた事実を強調したい。

蛇足だが、図あまりや図足らずが図の整合性を損なうので気になる場合には、正三角形をいくつまで並べられるかを考案する研究^[28]もあるようなので、こちらとハイブリットで制作するとデザインにも役立てることが期待できそうである。以上のことを整理してシングル正三角形螺旋図の活用が期待できることの紹介を終える。次章では、ダブル正三角形螺旋図としてフィボナッチ数列や黄金比に関連する数列に焦点を当てて、同じ発想が適用できないかを考察する。

4. フィボナッチ数列を用いた正三角形による螺旋図とその応用例

フィボナッチ数列の螺旋といえば図6に示すように正三角形を用いた螺旋図を連想するのが一般的なようである。しかしながら、Sharpによるダブル正三角形螺旋図の紹介^[15]のように正三角形を用いた図7のような正三角形とフィボナッチ数列を用いた螺旋図が可能である。フィボナッチ数列

$$\begin{aligned} F_{(1,1),0} &= 0, F_{(1,1),1} = 1, \\ F_{(1,1),j} &= F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (13)$$

によって生成されるフィボナッチ数を用いて二組の正三角形を連ねる螺旋図としてパドヴァン数列に負けず劣らず見事に作図できることは、著者が研究HPにウェブ公開するまで、日本では知られていなかったか、馴染みがなかったようである。この考え方とは別に独自に図8のように二組の正三角形を用いながらフィボナッチ数列の可視化は描けることをOR学会2023年秋季研究発表会で発表し^[29]、継続して思考を続けてきた結果、同じ着想の図7に辿り着いたが、既に西洋では周知のようであった。したがって、図7のフィボナッチ数列による正三角形を用いた螺旋図は提案ではなく、紹介であることを読者に

は強調したいし、この発想から考えられる新たな表現の
 拡大解釈による例示方法を提案していきたい。

ところで、初項と二項の二つの項の設定値を任意な g_0 ,
 g_1 とする黄金比を基調とした数列のことをフィボナッ
 チ数列と同様の特徴を多く有することからGibonacci数
 列^[19,20]と呼び、

$$\begin{aligned} G_{(1,1),0} &= g_0, G_{(1,1),1} = g_1, \\ G_{(1,1),j} &= G_{(1,1),j-1} + G_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (14)$$

なる定式化が知られている。このGibonacci数列でも図
 余りもしくは図足らずを許せば正三角形を連ねた螺旋図
 を描けることが紹介できる。図7に既に例示していると
 おり、以下の数列が活用されている。一つはリュカ数列

$$\begin{aligned} L_{(1,1),0} &= 2, L_{(1,1),1} = 1, \\ L_{(1,1),j} &= L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (15)$$

が活用され、もう一例として、ムラツ(Mulatu)数列

$$\begin{aligned} M_{(1,1),0} &= 4, M_{(1,1),1} = 1, \\ M_{(1,1),j} &= M_{(1,1),j-1} + M_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (16)$$

の活用も行つて例示している。これらの数列によるダブ
 ル正三角形螺旋図は図7のとおり、黄金比を基準に派生
 する数列のため初項付近の図余りを除けばしっかりとダ
 ブル正三角形螺旋図を構成していることが分かった。確
 かに初項の図余りを許容するならば、正三角形を連ねた
 螺旋図が作成できることから、数列を構成する二組の数
 列の数値が補完し合いながら正三角形の螺旋図は組み立
 てられて成立していることが確認できる。したがって、

図7では式(14)の数式の重みに基づき正確に正三角形を
 連ねた螺旋図が構成できることが可視化されていること
 が理解できる。

同様に、図8からも分かるようにリュカ数列のように
 初項が第二項より大きいために、図7の螺旋図でも図余
 りを示していることも読み取れる。

5. k -ペル数列および k -ペル・リュカ数列を用いた 正三角形による螺旋図とその応用例

図7のように、視覚化による正三角形の螺旋図もまた、
 任意の設定値により、図余りと図足らずを許せば、かな
 り適用範囲が広いことが期待できる。さらなる応用のた
 め、ペル数列

$$\begin{aligned} F_{(2,1),0} &= 0, F_{(2,1),1} = 1, \\ F_{(2,1),j} &= 2 \cdot F_{(2,1),j-1} + F_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (17)$$

とペル・リュカ数列

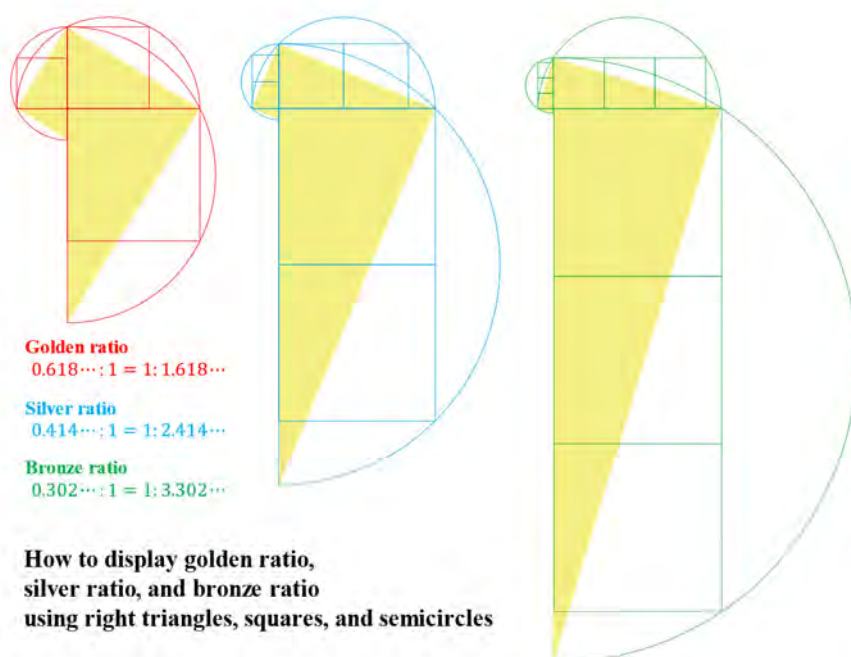
$$\begin{aligned} L_{(2,1),0} &= 2, L_{(2,1),1} = 2, \\ L_{(2,1),j} &= 2 \cdot L_{(2,1),j-1} + L_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (18)$$

の適用も考えてみたい。また、ペル数列で2倍して足し合
 わせる重みを2以上の整数 k に取り換えた k -ペル数列

$$\begin{aligned} F_{(k,1),0} &= 0, F_{(k,1),1} = 1, \\ F_{(k,1),j} &= k \cdot F_{(k,1),j-1} + F_{(k,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (19)$$

や k -ペル・リュカ数列

$$\begin{aligned} L_{(k,1),0} &= 2, L_{(k,1),1} = k, \\ L_{(k,1),j} &= k \cdot L_{(k,1),j-1} + L_{(k,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (20)$$



© Shingo Nakanishi, ORSJ Spring 2023, Japan

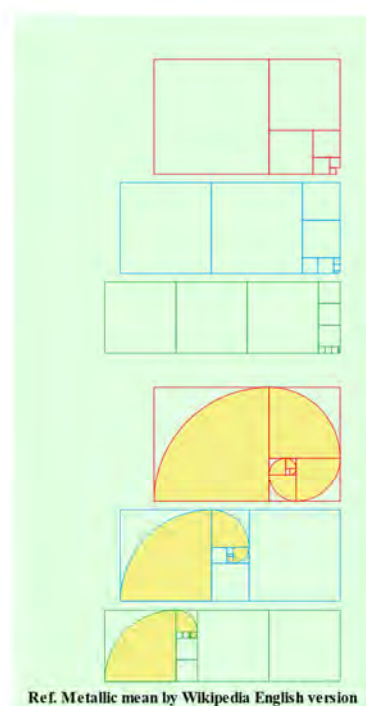


図6 プライマリーの貴金属比（黄金比，白銀比，青銅比）を用いた正方形を連ねた螺旋図

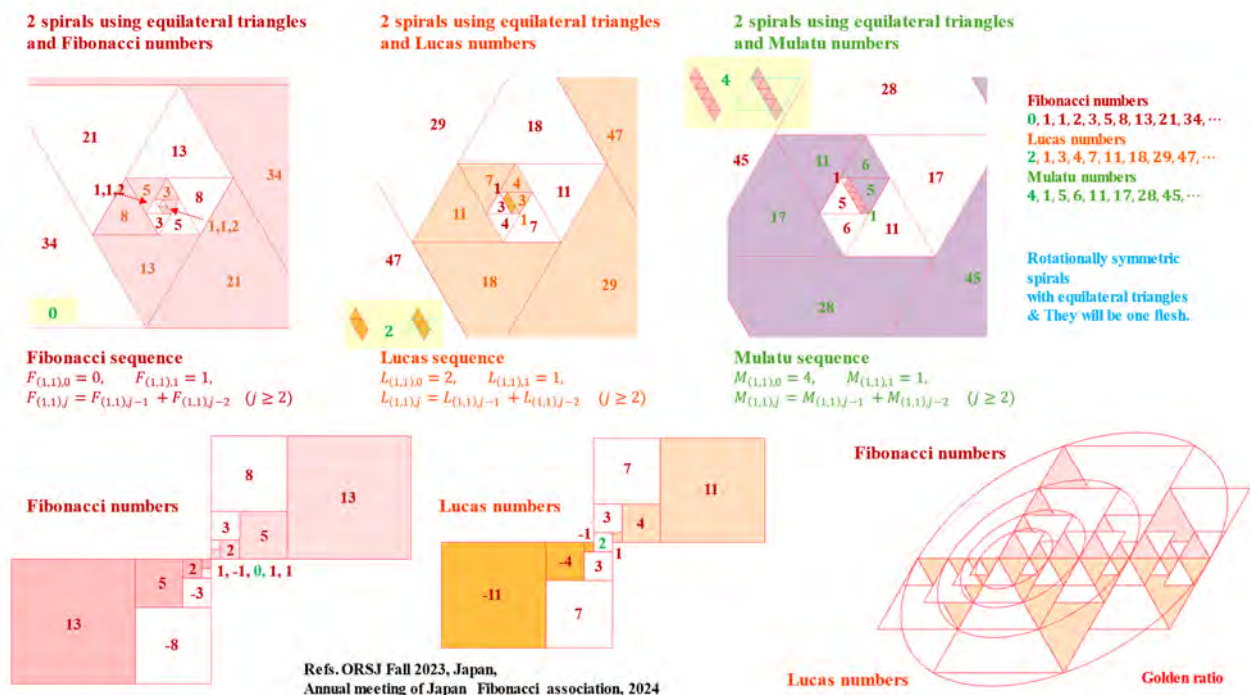


図7 フィボナッチ数列，リュカ数列，ムラツ数列を用いた二組の正三角形を連ねた螺旋図^[29]

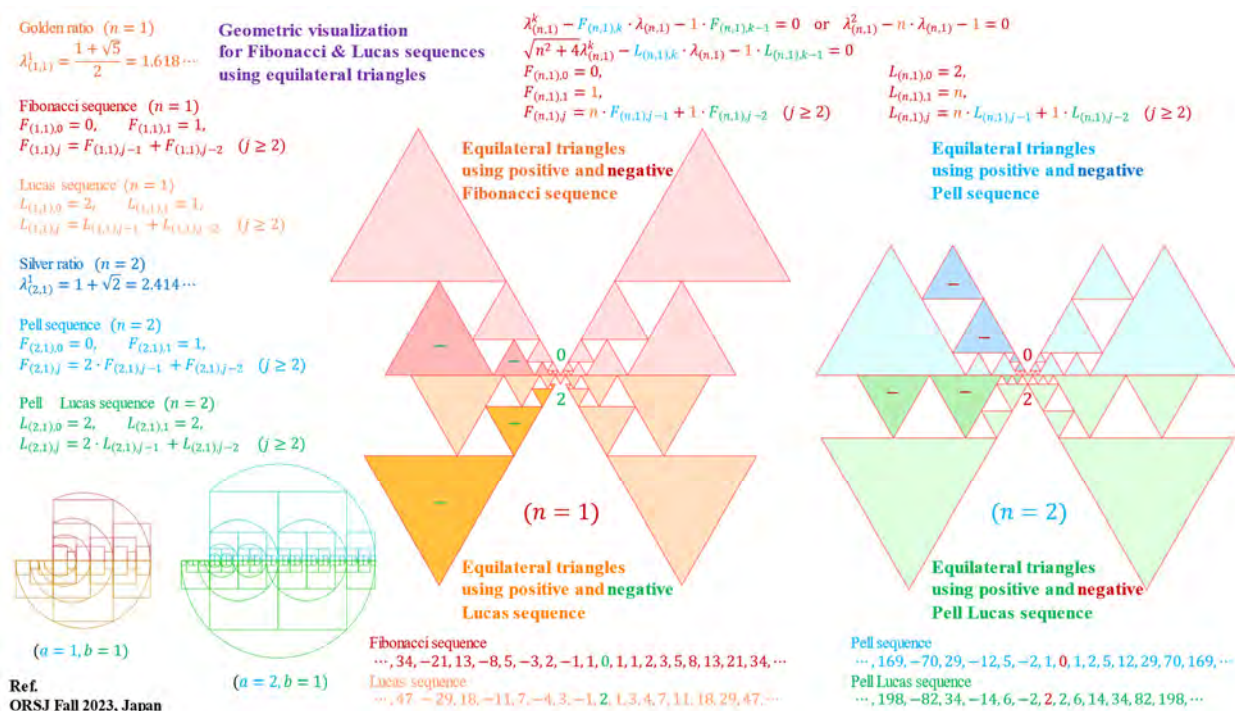


図8 フィボナッチ数列，リュカ数列，ペル数列，ペル・リュカ数列と正方形と正三角形の関係図^[29]

も正三角形螺旋図の作画を試みたい。これらの発想によるダブル型螺旋図の作画が図9に示されている。すなわち、二組の正三角形を連ねた螺旋図のうち、一つが2倍もしくは k 倍した横並びを構成した螺旋図の例示として発想を拡張するならば、フィボナッチ数列やリュカ数列と同様に描けることが明らかになった。以上のように、ダ

ブル正三角形螺旋図の作画が可能となった。同時に基準となる比率がプライマリーの貴金属比と一致するので、これらの比率でもダブル正三角形螺旋を同様に描けることが分かった。そこで、図9にダブル正三角形螺旋図として図示した数列と、黄金比，白銀比，青銅比の螺旋図を並べながらその性質が類似していることが把握できるよ

うに図示してみた。実は、これらの比の例示では、正方形による紹介^[30]や比による長方形による例示^[31]が圧倒的に多いことは周知である。加えて、貴金属比を活用した正三角形によるタイリングの研究^[32]も存在するが、本研究で取り扱う貴金属比によるダブル型正三角形螺旋図は従来の正方形による螺旋図の提案を正三角形に置き換えたアイデアとして認知できるし、貴金属比のための正三角形活用の新たな提案として独自のものであるため、これを機会にダブル正三角形螺旋での新たなデザインの考案や応用を期待したい。

6. ヤコブスタール数列の例図

ところで、セカンダリーの第2貴金属比は下記の二次方程式から

$$\begin{aligned}\lambda_{(1,2)}^2 &= \lambda_{(1,2)} + 2, \\ \therefore \lambda_{(1,2)} &= 2.\end{aligned}\quad (21)$$

と求まる。このときの足し合わす重みが1:2であり、フィボナッチ数列の足し合わす重みが式(21)に習うとき、ヤコブスタール数列

$$\begin{aligned}F_{(1,2),0} &= 0, F_{(1,2),1} = 1, \\ F_{(1,2),j} &= F_{(1,2),j-1} + 2 \cdot F_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2)\end{aligned}\quad (22)$$

が表記できる。わが国ではペル数列を基準としたプライマリーの貴金属比のみが注目されて、セカンダリーの貴金属比はあまり知られていないようである。このため、

著者は当初、貴金属比の類似比と呼びながら研究を進めてきた。したがって、類似比としてセカンダリーの第2貴金属比について、当初はこれから紹介する例図の特性を見つけたため、その魅力を感じながら研究を始めたこともあり、こちらを白銀比の類似比として取り扱って公表してきた^[33-37]。

貴金属比の発案者であるDe Spinadelによればニッケル比と命名されたいが、プライマリーの貴金属比にもいくつかの比が同じ呼び方として定着しつつあるので、本報では混乱を避けたいので単にセカンダリーの第2貴金属比もしくは副第2貴金属比と呼ぶことにしたい。一方で、リュカ数列のヤコブスタール数列版は、ヤコブスタール・リュカ数列と呼ばれており、

$$\begin{aligned}L_{(1,2),0} &= 2, L_{(1,2),1} = 1, \\ L_{(1,2),j} &= L_{(1,2),j-1} + 2 \cdot L_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2)\end{aligned}\quad (23)$$

と表記できる。したがって、ヤコブスタール数列を表記する式(22)は、パドヴァン数列の表記に合わせると

$$\begin{aligned}P_{(1,2),0}^{(0,1)} &= 0, P_{(1,2),1}^{(0,1)} = 1, \\ P_{(1,2),j}^{(0,1)} &= P_{(1,2),j-1}^{(0,1)} + 2 \cdot P_{(1,2),j-2}^{(0,1)} \quad (j \geq 2)\end{aligned}\quad (24)$$

と表すことも可能で、ヤコブスタール・リュカ数列を表記する式(23)もまた

$$\begin{aligned}P_{(1,2),0}^{(2,1)} &= 2, P_{(1,2),1}^{(2,1)} = 1, \\ P_{(1,2),j}^{(2,1)} &= P_{(1,2),j-1}^{(2,1)} + 2 \cdot P_{(1,2),j-2}^{(2,1)} \quad (j \geq 2)\end{aligned}\quad (25)$$

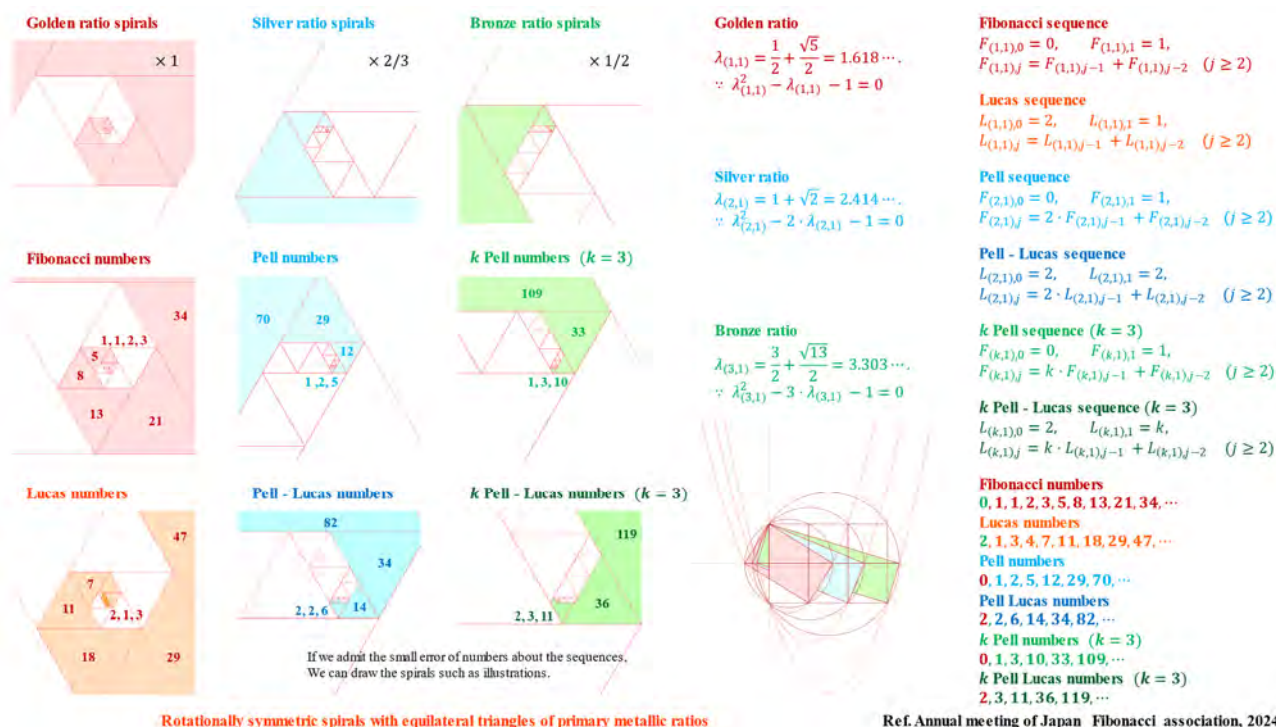


図9 k -ペル数列もしくは k -ペル・リュカ数列を用いた正三角形を連ねた螺旋図($k = 1, 2, 3$)とプライマリーの貴金属比(黄金比, 白銀比, 青銅比)($k = 1, 2, 3$)による正三角形螺旋図の提案

Visualizations of golden ratio (first ratio) using Fibonacci sequence and Lucas sequence

Fibonacci sequence
 $F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$
 First ratio $0.618 \dots : 1 = 1 : 1.618 \dots$

Lucas sequence
 $L_{(1,1),0} = 2, L_{(1,1),1} = 1, L_{(1,1),j} = L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

Golden ratio
 $\lambda_{(1,1)}^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots$

Fibonacci sequence
 $\dots, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$
 Lucas sequence
 $\dots, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots$

$$\lambda_{(1,1)}^1 = 1 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^1 = 3 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,1)}^2 = 2 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^2 = 3 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,1)}^3 = 3 + 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^3 = 4 + 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,1)}^4 = 5 + 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^4 = 7 + 4 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

Fibonacci numbers
 Lucas numbers

$$\lambda_{(1,2)}^1 = 1 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} \\ 3 = 1 + 2 \times 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,2)}^2 = 3 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} \\ 3 \lambda_{(1,2)}^2 = 5 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

Jacobsthal sequence
 $F_{(1,2),0} = 0, F_{(1,2),1} = 1, F_{(1,2),j} = F_{(1,2),j-1} + 2 \cdot F_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2)$

Jacobsthal - Lucas sequence
 $L_{(1,2),0} = 2, L_{(1,2),1} = 1, L_{(1,2),j} = L_{(1,2),j-1} + 2 \cdot L_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2)$

Second ratio $0.5 : 1 = 1 : 2$

$$\lambda_{(1,2)}^3 = 5 + 2 \times 3 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} \\ 3 \lambda_{(1,2)}^3 = 7 + 2 \times 5 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

Visualizations of second ratio using Jacobsthal sequence and Jacobsthal - Lucas sequence

$$\lambda_{(1,2)}^4 = 11 + 2 \times 5 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} \\ 3 \lambda_{(1,2)}^4 = 17 + 2 \times 7 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

Jacobsthal sequence
 $\dots, -5/2^4, 3/2^3, -1/2^2, 1/2, 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots$
 Jacobsthal - Lucas sequence
 $\dots, 17/2^4, -7/2^3, 5/2^2, -1/2, 2, 1, 5, 7, 17, 31, \dots$

Second ratio
 $\lambda_{(1,2)}^1 = 2$

Ref. ORSJ Fall 2023, Japan

図10 黄金比とフィボナッチ数列, リュカ数列および副第2貴金属比とヤコブスター数列, ヤコブスター・リュカ数列の公式の視覚化^[29]

How to structure equiangular spirals using Pythagorean theorem about Fibonacci sequence $F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$ or Lucas sequence $L_{(1,1),0} = 2, L_{(1,1),1} = 1, L_{(1,1),j} = L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

$$\lambda_{(1,1)}^1 = \text{Golden Ratio} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots$$



$$\sqrt{5} \times \lambda_{(1,1)}^1 = \sqrt{5} \times \text{Golden Ratio} = 3.618 \dots$$

Pythagorean theorem using Fibonacci sequence

$$\lambda_{(1,1)}^1 = \lambda_{(1,1)}^{-1} + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-2} = F_{(1,1),j+1} + 1 \cdot F_{(1,1),j} \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

Pythagorean theorem using Lucas sequence

$$\sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^1 = \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-1} + 1 \cdot \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-2} = L_{(1,1),j+1} + 1 \cdot L_{(1,1),j} \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

- ① $\lambda_{(1,1)}^{-1} = \lambda_{(1,1)}^{-2} + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-3} = 0 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ② $\lambda_{(1,1)}^0 = \lambda_{(1,1)}^{-1} + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-2} = 1 + 1 \times 0 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = 1$
- ③ $\lambda_{(1,1)}^1 = \lambda_{(1,1)}^0 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = 1 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = \text{Golden ratio}$
- ④ $\lambda_{(1,1)}^2 = \lambda_{(1,1)}^1 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^0 = 2 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ⑤ $\lambda_{(1,1)}^3 = \lambda_{(1,1)}^2 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^1 = 3 + 1 \times 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ⑥ $\lambda_{(1,1)}^4 = \lambda_{(1,1)}^3 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^2 = 5 + 1 \times 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$

- ① $\sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-1} = \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-2} + 1 \cdot \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-3} = 2 + 1 \times (-1) \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ② $\sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^0 = \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-1} + 1 \cdot \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-2} = 1 + 1 \times 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = \sqrt{5}$
- ③ $\sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^1 = \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^0 + 1 \cdot \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^{-1} = 3 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = \sqrt{5} \times \text{Golden ratio}$
- ④ $\sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^2 = \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^1 + 1 \cdot \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^0 = 4 + 1 \times 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ⑤ $\sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^3 = \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^2 + 1 \cdot \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^1 = 7 + 1 \times 4 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ⑥ $\sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^4 = \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^3 + 1 \cdot \sqrt{5} \lambda_{(1,1)}^2 = 11 + 1 \times 7 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$

How to describe equiangular spirals using Pythagorean theorem about Jacobsthal sequence $F_{(1,2),0} = 0, F_{(1,2),1} = 1, F_{(1,2),j} = F_{(1,2),j-1} + 2 \cdot F_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2)$ or Jacobsthal Lucas sequence $L_{(1,2),0} = 2, L_{(1,2),1} = 1, L_{(1,2),j} = L_{(1,2),j-1} + 2 \cdot L_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2)$

Pythagorean theorem using Jacobsthal sequence

$$\lambda_{(1,2)}^1 = \lambda_{(1,2)}^{-1} + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-2} = F_{(1,2),j+1} + 2 \cdot F_{(1,2),j} \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

Pythagorean theorem using Jacobsthal Lucas sequence

$$3 \lambda_{(1,2)}^1 = 3 \lambda_{(1,2)}^{-1} + 2 \cdot 3 \lambda_{(1,2)}^{-2} = L_{(1,2),j+1} + 2 \cdot L_{(1,2),j} \lambda_{(1,2)}^{-1}$$



Ref. ORSJ Fall 2023, Japan

図11 黄金比とフィボナッチ数列, リュカ数列および副第2貴金属比とヤコブスター数列, ヤコブスター・リュカ数列のピタゴラスの定理による等角螺旋図の視覚化^[32]

と同様に表わすことができる。したがって、式(24)(25)のように初項と第2項を強調して書き換えて解説するときがあることをご承知いただきたい。以上までの数式はそれぞれが似ているくらいにしか思えないかもしれないが、

図10のように例示^[29]してみるとヤコブスター数列とヤコブスター・リュカ数列の特徴がペル数列やペル・リュカ数列とも異なる傾向があることが鮮明に見えてくる。

源流は定かではないが、図10のように黄金比とフィボナッチ数列を大小の正方形と円弧で描きながら説明する例図は有名である。一方で、下側に追加した円弧と正方形の図はこれまで知られていなかったようである。この図をよく確認すると、リュカ数列と黄金比の関係を同様に記していることが読み取れる。

そこで、正方形を活用せず上部の円弧には、フィボナッチ数列系を、下部の円弧にはリュカ数列系を示すことがヤコブスタール数列に適応できるかを試みたところ可能であったので、図11に例示してみた。同様に、重みとして1:2から一般性を持たせた1:kに拡張してもこの例図は成り立つことを付記しておく。

また、このときに、図10に付記している黄金比とフィボナッチ数列、もしくは黄金比とリュカ数列の関係式が成立していることも理解できる。副第2貴金属比とヤコブスタール・リュカ数列もまた同様の関係式が成り立っていることを図10に付記している。

6.1. ピタゴラスの定理を用いた等角螺旋としての例図

図10に記した図の関係式は、実は図10の解説だけに留まらなかった。約400年前にドイツのケプラーは次の言葉を残している。すなわち、「幾何学には2つの宝がある。一つはピタゴラスの定理、もう一つは外中比（黄金比）

である。一つ目は金塊と比べ、二つ目は貴重な宝石と呼ぶことになるだろう^[38,39]。」という言葉を残しているが、20世紀が終わろうとする頃に、De Spinadelによる提唱で貴金属比の名称が産声を上げ、ケプラーも深く調べたと思われるフィボナッチ数列とピタゴラスの定理が調和を奏でるかのように、著者は図11に例示するように等角螺旋を作成することができた^[33]。

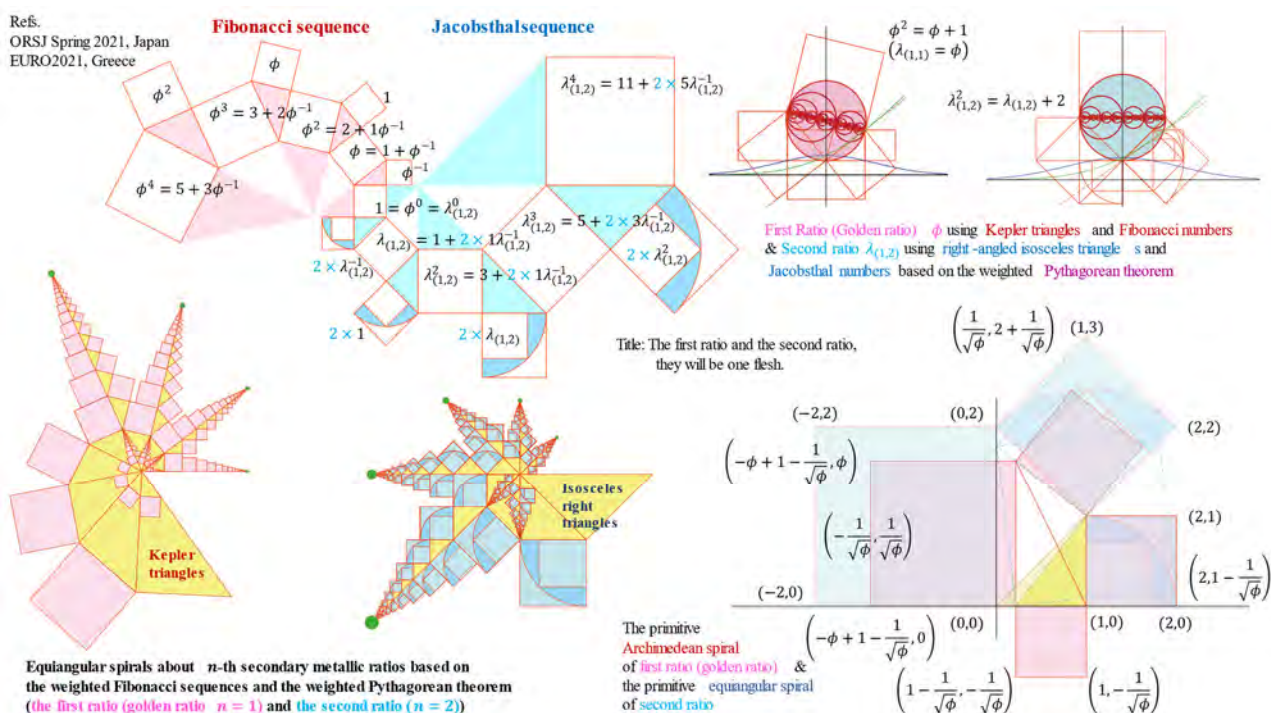
この図の等角螺旋では、2をkに読み替えてセカンダリーの第k貴金属比による等角螺旋図として拡張することも可能であることを付記しておく。その等角螺旋図の公式は、離散型であればフィボナッチ数列の加法定理の考え方を拡張した定義式として

$$\lambda_{(1,k)}^j = \lambda_{(1,k)}^{j-1} + k \cdot \lambda_{(1,k)}^{j-2} = F_{(1,k),j+1} + k \cdot F_{(1,k),j} \lambda_{(1,k)}^{-1} \quad (26)$$

と表記できることを紹介したい^[27]。同様に、その連続版螺旋は例示していないが、もし、離散版の等角螺旋図と重なるように定義するならば、ガウス平面を想定し、その座標上に等角螺旋を描くオイラーの公式を拡張した数式として定義できる。

すなわち、

$$\begin{aligned} z_k^x &= \sqrt{\lambda_{(1,k)}}^x \exp\left(i \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{(1,k)}}}\right) x\right) \\ &= \sqrt{\lambda_{(1,k)}}^x \left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{(1,k)}}}\right) x\right) \right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{(1,k)}}}\right) x\right) \right) \quad (27) \end{aligned}$$



と例示できる美しい公式^[36]であることを補足する．図11では同時に、フィボナッチ数列の等角螺旋図をルート5倍した等角螺旋図がリュカ数列との対応として明示できた．この考え方をヤコブスタール数列の等角螺旋図にも適用すると、ヤコブスタール・リュカ数列に対応した3倍の等角螺旋図として図示できた^[40]．このときの3倍が後の章で言及するトリプル型正三角形螺旋図の特徴にも活かしてくることを先に述べて強調しておきたい．

6.2. ケプラー三角形と直角二等辺三角形の相性の例図

ここまでフィボナッチ数列とヤコブスタール数列について同じ基準による例図を見てきたが、前節の等角螺旋図で用いた二組の直角三角形に注目したい．一つは黄金比に対応するケプラー三角形^[38,39]、もう一つは副第2貴金属比に対応する二等辺直角三角形である．この二組の直角三角形を用いて図11では等角螺旋の作図を試みたので、描く倍率を慎重に扱いながら等角螺旋図の大小関係を見ていただきたい．すなわち、図12の左上のように両者の等角螺旋を重ねてみるとその大小関係がイメージできる．このときの二組の等角螺旋図があたかも仲の良い生命体のように生き生きしているように感じ取れたので、様々な例図を創造しながら図示を試みた．まるで仲

の良いご夫婦のように例図に収まったので、聖書の聖句「二人は一体となる」の英語訳を活用して、図の題目として「They will be one flesh.」を図の題目として付記している．また、図12の右上のように、標準正規分布にケプラー三角形を例示したところ、ケプラー三角形と黄金比の関係を例示するのにとても都合が良かったので、しばらくこの例図を活用しながら研究を進めてきた^[36,37]．このケプラー三角形の特徴については、詳しくは文献^[38,39]をご覧ください．また、右下のようにケプラー三角形を代数螺旋として、直角三角形を対数螺旋（等角螺旋）の基準として例示し、同じ辺の長さを用いた正方形に合わせて図示したところ、とても良い相性が得られた^[34-36]．特に、それぞれ2枚の直角三角形を並べながら直角を形成して、両者の螺旋図を描いたところ、主要な点の通過や重なりがとても相性が良いことが確認でき、魅力的な図の性質が明示できていることが分かった^[34]．

7. ヤコブスタール数列によるダブル型正三角形螺旋

シングル、ダブル型正三角形螺旋図を考察してきたが、ダブル型正三角形螺旋図の考察で取り扱った数列は、 k -ペル数列による正三角形螺旋図であった．当初は、図13の上部に示すように、 $k=2,3$ の場合の k -ヤコブスタール数列による螺旋図も描いて見たのだが、しっくり

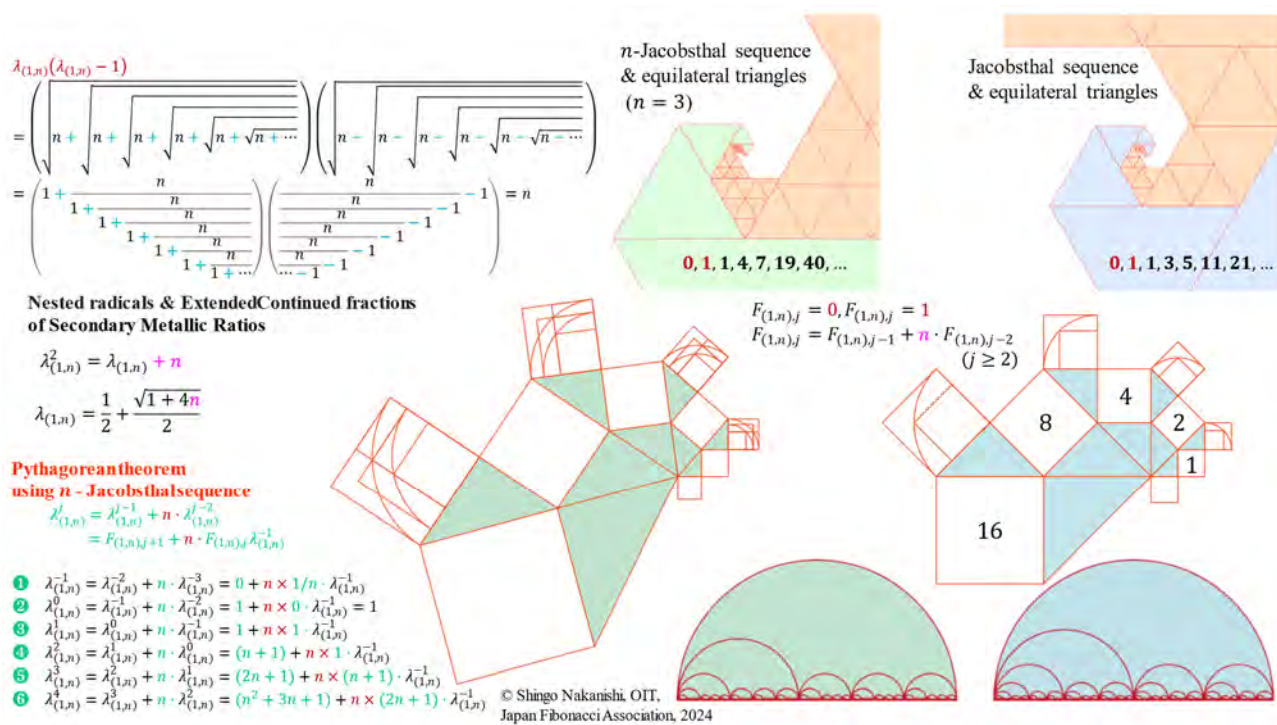


図13 k -ヤコブスタール数列を用いた正三角形を連ねたダブル正三角形螺旋図を拡大($k=2,3$)
およびそのピタゴラスの定理による等角螺旋図との比較例図

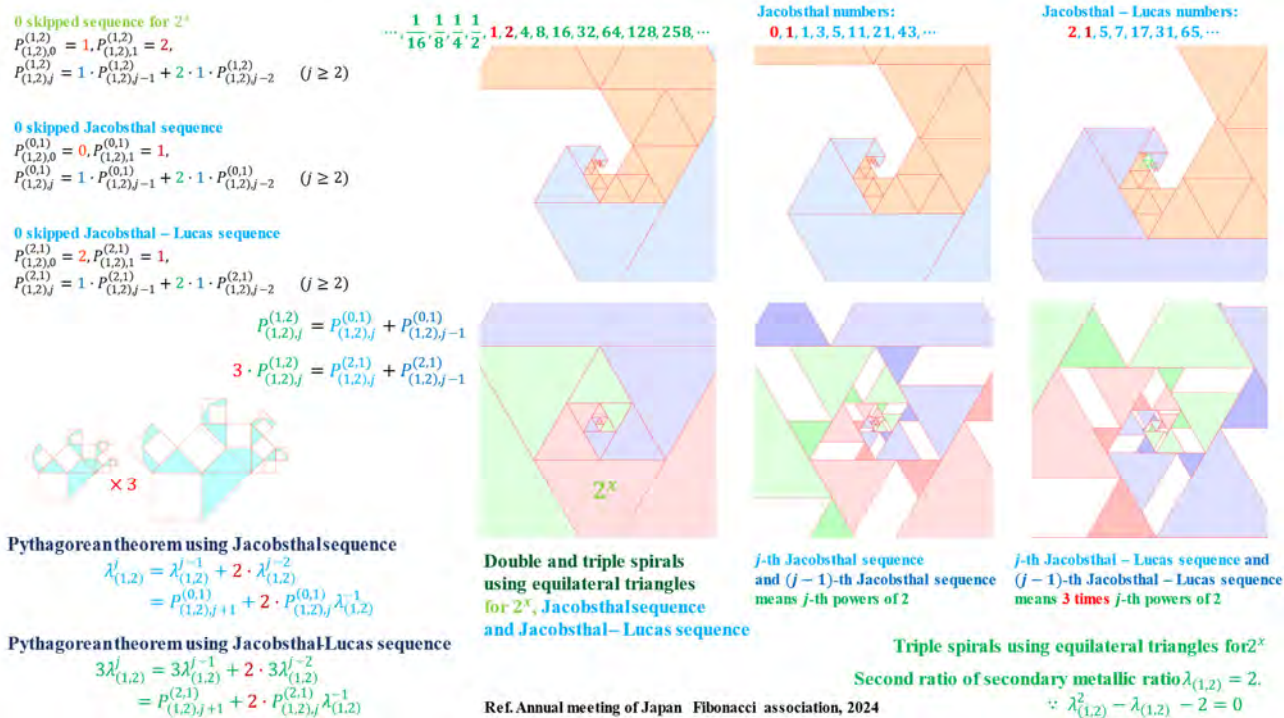


図14 ダブル螺旋とトリプル螺旋作図の為にヤコブスター数列、ヤコブスター・リュカ数列を用いた正三角形を連ねた螺旋図が描けるか試す例図

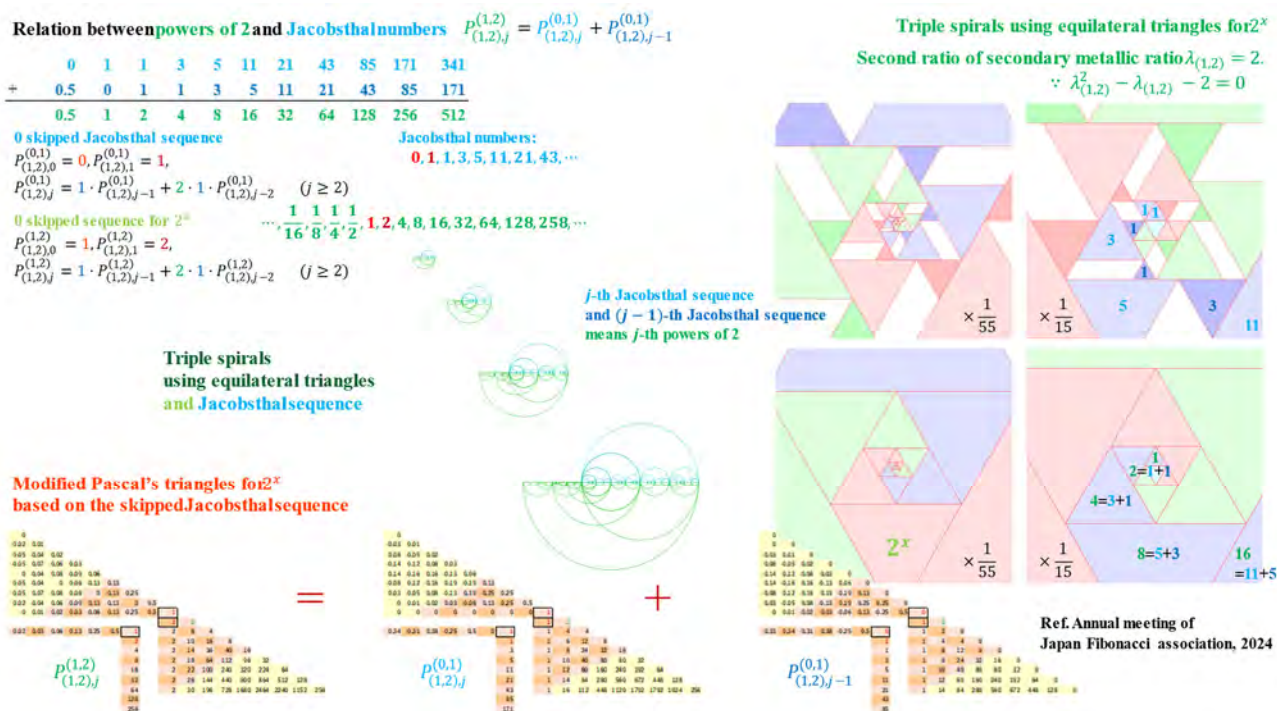


図15 2 のべき乗とヤコブスター数列を用いた正三角形を連ねたトリプル螺旋図を拡大^[27]

とこない。そこで、 k –ペル数列に取り組み直したところ上手くいったのであるが、ヤコブスター数列の改良版がトリプル正三角形螺旋図を構成するところまで進展したので、その一部について既にWeb公開を試みている。

本章では、Web公開前後にフィボナッチ研究集会に発表申込みも終えていたので、発表用の新作としてWeb公開で割愛したヤコブスター数列はなぜダブル型螺旋図でしっくりとこなかったかを紹介してみたい。にもかかわ

らず、その空白が図足らずのトリプル正三角形螺旋図の作画に大変都合が良かったことを紹介する。

まず、図14をご覧ください。一番左側の正三角形螺旋図は、ヤコブスタール数列の初項を1、第2項を2に置き換えた数列

$$\begin{aligned} P_{(1,2),0}^{(1,2)} &= 1, P_{(1,2),1}^{(1,2)} = 2, \\ P_{(1,2),j}^{(1,2)} &= P_{(1,2),j-1}^{(1,2)} + 2 \cdot P_{(1,2),j-2}^{(1,2)} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (28)$$

を基準に描いた図である。したがって、図の空欄にもう一つ同じ水準の螺旋図が加わりトリプル螺旋図を描くことが可能である。一方で、中央のヤコブスタール数列を基準に描いたダブル螺旋図がいかでであろうか。確かに、左の螺旋図と同じ考え方でダブル螺旋図は描けている。しかしながら、空白の部分の意味が釈然としない。力技で埋め込むことはできるのだが納得のいくルールが見つからない。同様に、右の螺旋図のようにヤコブスタール・リュカ数列でも描いてみた。ヤコブスタール数列と同様にダブル正三角形螺旋図を描ける。もちろん、シングル、ダブル螺旋図で成功例を考察したように、図余りを許すわけであることを付記しておく。ヤコブスタール数列によるダブル正三角形螺旋図の作画と同様に、ヤコブスタール・リュカ数列による螺旋図も空白を埋める有効なルールが見つからない。一方で、数列の特徴から、無理に埋め込むと、ヤコブスタール数列に特有の隣り合う数列が1つ余ってしまう特徴が図として浮き彫りになってくる。同様に、この考え方に基づくダブル正三角形螺旋図の作画を行うと、図13に例示するダブル型正三角形螺旋図として、 k -ヤコブスタール数列による作画でもダブル型正三角形螺旋図を描けるのだが、やはり空白を埋める合理的な手立てが見つからない。

そこで、図14の上部のヤコブスタール数列によるダブル正三角形螺旋図から下部のトリプル正三角形螺旋図として図に示すように、発想を変えて螺旋図の拡大途中の図余りや図足らずは仕方がないと認めることにした。このときの図余りや図足らずを有効に活かしたトリプル螺旋図の性質に着目し、次章から図余りを認めたトリプル螺旋図の考察を進めてみたい。

8. 図余りを認めたヤコブスタール数列によるトリプル型正三角形螺旋図

ここで、図15を見ていただきたい。実は、前後するヤコブスタール数列をフィボナッチ数列のように足し合わせ和は、2のべき乗である。ということは、一つずらしたヤコブスタール数列を用いれば、二組の正三角形を一セットとするトリプル型正三角形螺旋図を描けることが分

かった^[4]。ただし、図余りの規則性を認めて作図をすることによる例図であることを言及しておく。

この一つずらす性質は2023年度図学会大会で発表した修正パスカル三角形による例図^[7]でも確認することができるので、図15の下側にこの特徴が分かりやすいように並べた修正パスカル三角形の例図もご覧いただきたい。

このように、完璧なトリプル型の正三角形螺旋図と同様に描くことが可能であり、ヤコブスタール数列の初項と第2項を修正した新たな数列の活用やヤコブスタール数列を一つずらす操作によるトリプル型正三角形螺旋図の活用により、同様に図余りの規則性をデザインとして応用しながらトリプル型正三角形螺旋図の作画を楽しむことが期待できる、

その一例として、図15の考え方と同様に描いてみた図16のヤコブスタール・リュカ数列の活用によるトリプル螺旋図をご覧ください。ここで、一つの重要な特徴が分かった。数列を一つずらして和を形成するとき、その和は2のべき乗の3倍であった。この特徴は、図11でヤコブスタール数列による等角螺旋図の作画の3倍は、ヤコブスタール・リュカ数列による等角螺旋に等しいことを記したときに既に説明を終えた特徴である。

このように、図11の作図で見つけた同じ基準でトリプル正三角形螺旋図を描く設計図が見つかった。ただし、空白の規則性は異なるため、ヤコブスタール数列によるトリプル正三角形螺旋図とまったく同じ正三角形螺旋図の3倍したというわけではないこともわかり、むしろ空白の多様性を楽しむことができるので、デザインの思考の幅が広がると期待したい。

また、図17のように初項を1とし、二項を2とするときにも、2の倍数を基準とする数列を構成できて、ヤコブスタール数列の形式は役立つことが改めて理解できる。

以上が、トリプル正三角形螺旋図とヤコブスタール数列の関係の考察である。ここで、数列や関連する比とシングル、ダブル、トリプル型の正三角形の螺旋図はただの偶然であったのだろうか再考してみたい。本稿の前半でも紹介したように、ワン・スキップ型の数列に再度注目するとその謎が腑に落ちるはずである。まず、図18を見ていただきたい。2023年度図学会大会で発表したスキップ型数列と修正パスカルの三角形の考え方が生きてくる。このように、ヤコブスタール数列をワン・スキップ型で見ると、ゼロ・スキップ型の和の重みである1:2が、3:2に読み替えられる。このことは大変重要な意味を有している。もう一度、図18をご覧ください。プラス

チック比に関連するパドヴァン数列はもともとワン・スキップ型で重みは1:1である．黄金比やフィボナッチ数列の和の重みも1:1であったが，パドヴァン数列のようにワン・スキップ型に修正するとき2:1となる．このこ

とはワン・スキップ型数列や比で定義式を読み替えると，正三角形のシングル，ダブル，トリプル型と一致していることに気が付く．したがって，図15と図16のワン・スキップ型数列と重みの図示より，数学的な性質こそ異な

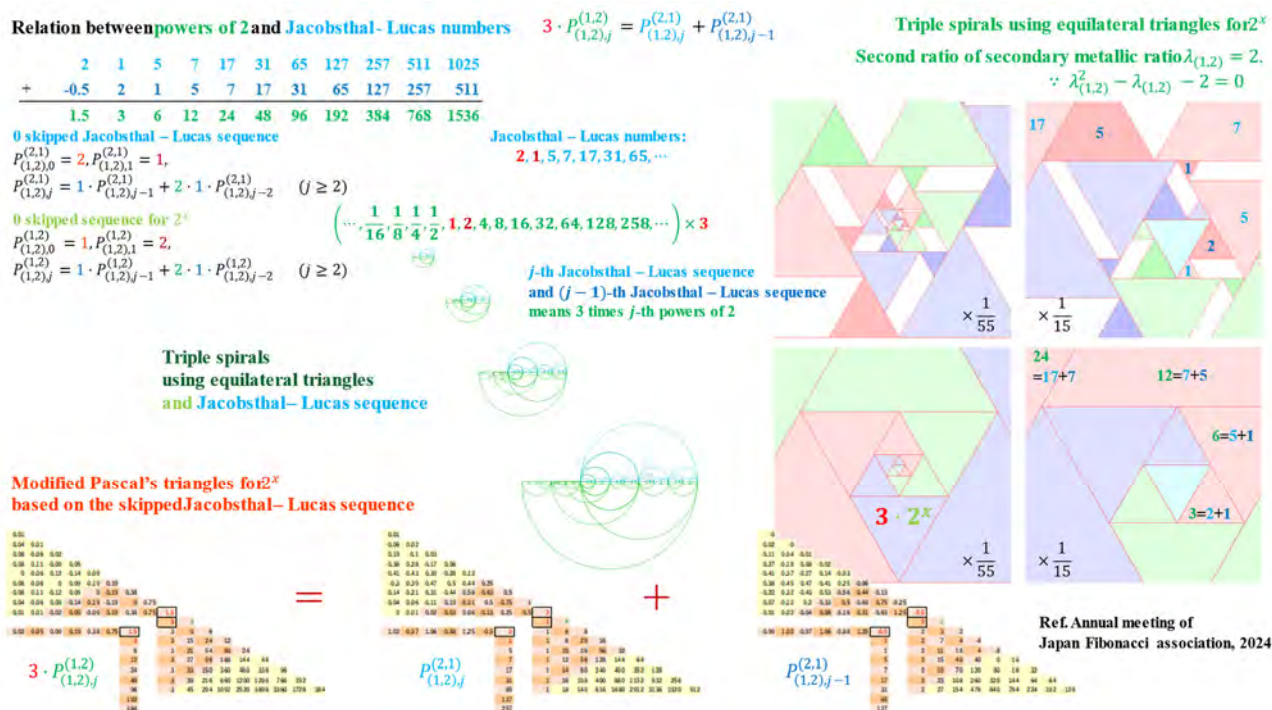


図16 3×2のべき乗とヤコブスタール・リュカ数列を用いた正三角形を連ねたトリプル螺旋図を拡大^[27]

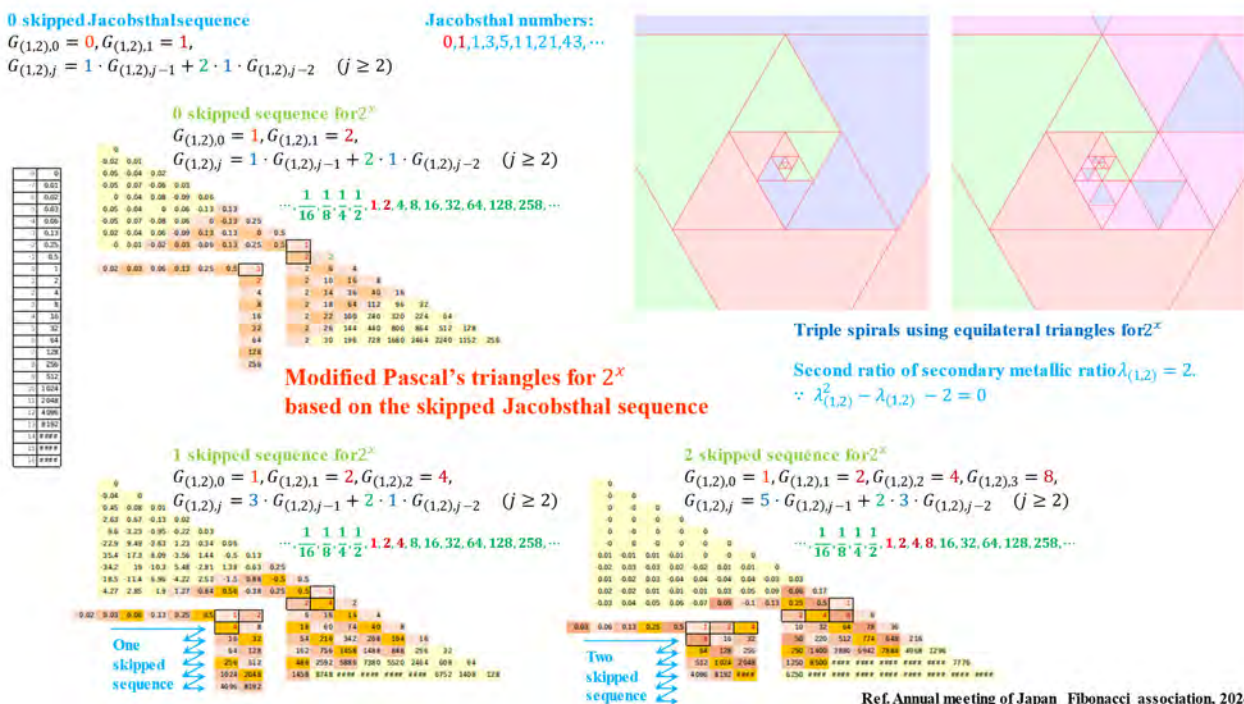
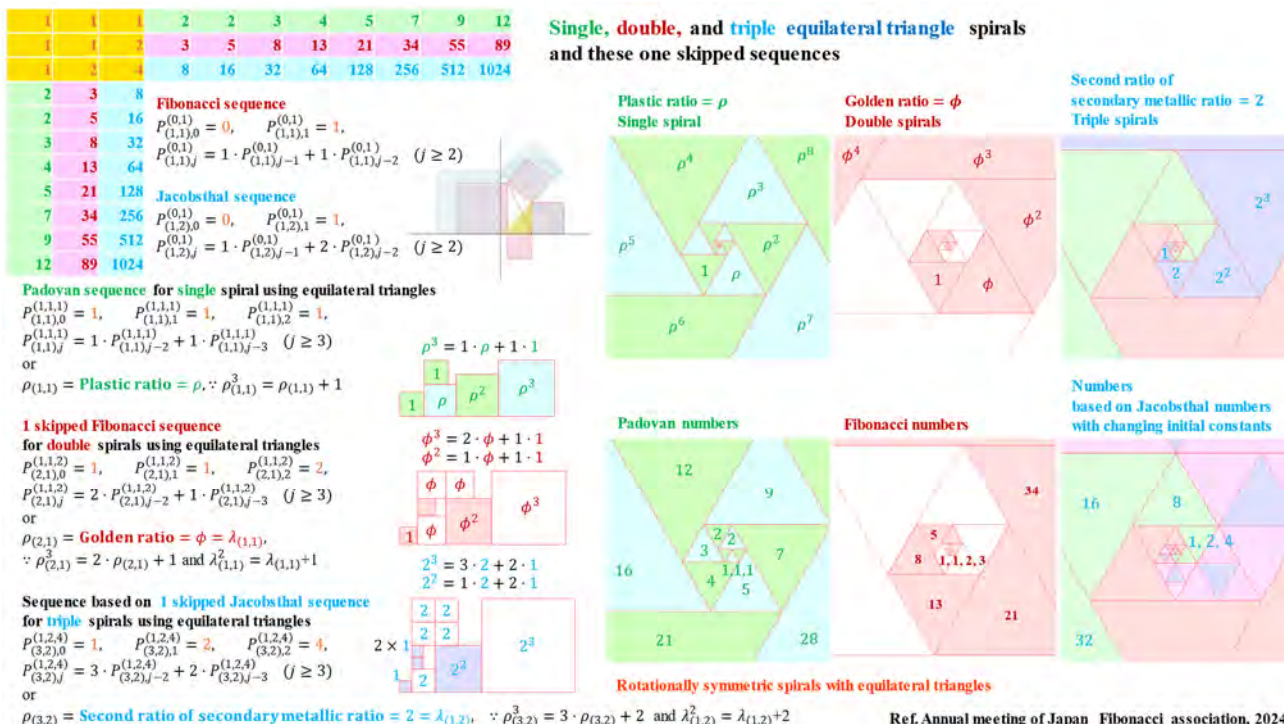
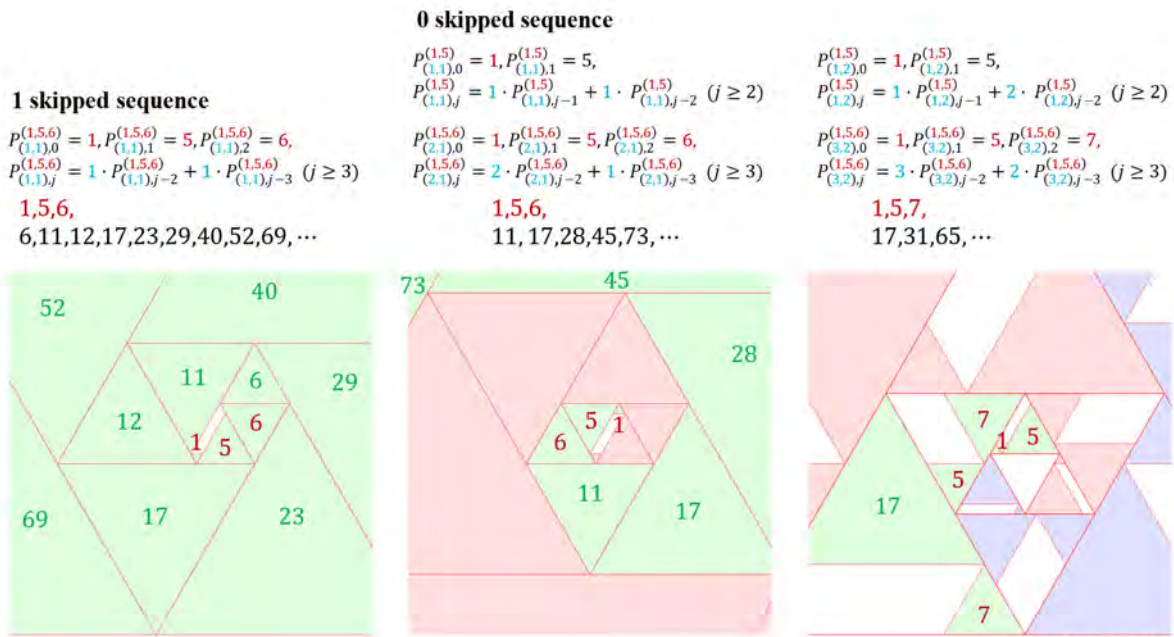


図17 スキップ型ヤコブスタール数列の初項訂正版を生成する修正パスカル三角形とこの数列を用いた正三角形を連ねたトリプル螺旋図^{[16],[23]}

るが、ヤコブスタール数列は重要な役割を果たしたことが理解できる。
 以上を言及したが、図18を基にシングルからトリプル

までの正三角形螺旋図を体系的に述べる論文は、2021年のFathauerの論文^[7]まで見つからないようにも関わらず、多くのデザイナー によるブログにトリプル型正三角形



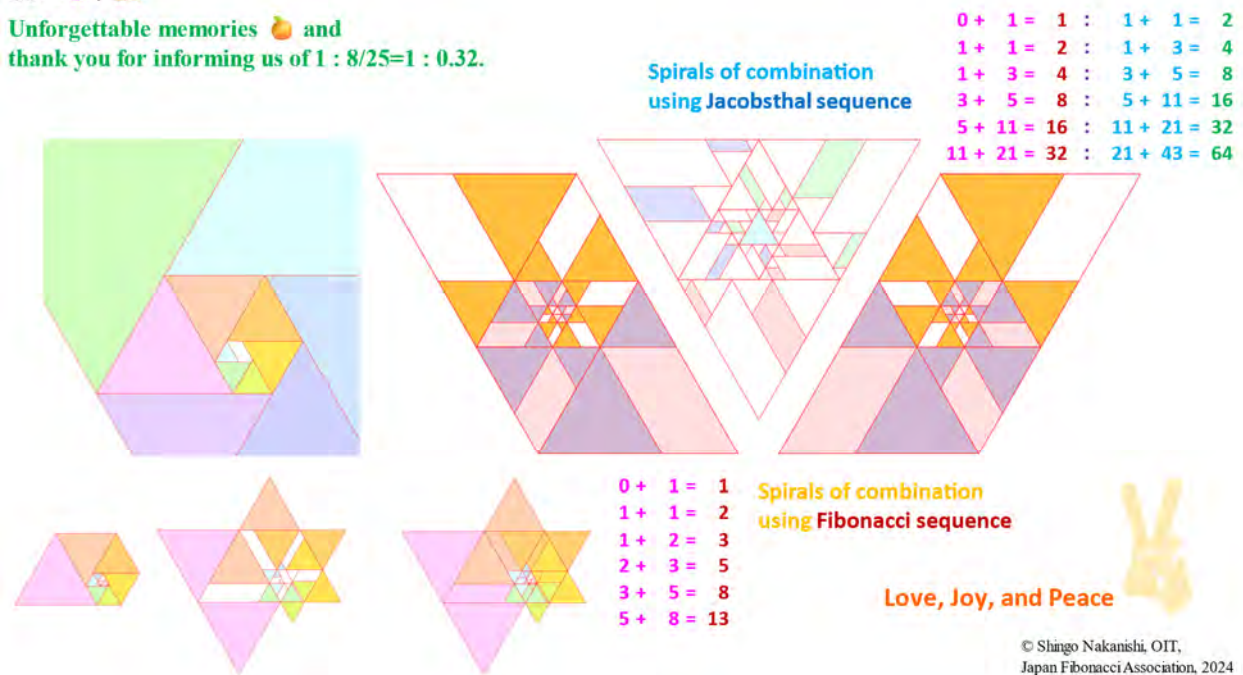


© Shingo Nakanishi, OIT,
Japan Fibonacci Association, 2024

図20 Gibonacci数列や関連数列による正三角形を用いたシングル，ダブル，トリプル型螺旋図のその他一例

$$33 = 8 + 25$$

Unforgettable memories 🍌 and
thank you for informing us of $1 : 8/25 = 1 : 0.32$.



© Shingo Nakanishi, OIT,
Japan Fibonacci Association, 2024

図21 ヤコブスタール数列の図足らず着想を応用した正三角形を用いた螺旋図のその他一例

螺旋が散見できるということは芸術の世界では源流は定かではないがお馴染みなのかもしれない。このため、シングル，ダブルの正三角形螺旋図と同様に数列とその関連する比で考察を行うことが本稿の狙いであった。トリプル正三角形螺旋図を描く拡大の比は，数値が2である。

したがって，セカンダリーの第2貴金属比と一致するので，ヤコブスタール数列の初項からの設定値を図18のように修正した2のべき乗を示す数列を活用したら旨く作画が可能となった。この数列もまたパスカルの三角形を修正すれば成り立つことを2023年図学会大会で公表^[27]

しているので図17に併記してみた。このときのワン・スキップ型数列に焦点を当ててみると、これまで考察してきたダブル正三角形螺旋も併せて興味深い傾向が分かる。すなわち、数学的な性質こそ異なるが、ワン・スキップして重み付した数値の和からなる数列の発想は、今回考察した螺旋図の作画のための基本概念図といえるかもしれない。

このことが分かりやすいように、図18にシングル、ダブル、トリプル型の3組の螺旋図に3つの初期設定値を考慮したワン・スキップ型数列の数値を明示し、それぞれが比較しやすいように並べて表記してみた。これらの数列の数値を基にシングル、ダブル、トリプルの正三角形の関係が図示されている。同時に、同じ傾向を基準とする比でも比較できるように併記してそれぞれ図示してみた。すなわち、シングル正三角形螺旋図はプラスチック比による螺旋図として図示し、ダブル正三角形螺旋図は黄金比による螺旋図としている。同様に、トリプル正三角形螺旋図はセカンダリーの第2貴金属比による螺旋図として作画でき、基準とする比に関連する数列による螺旋図とも相性が良いことが分かった。

ところで、本稿の骨格に関係ない蛇足として、もう一例を取り上げたい。ここまで議論したプラスチック比や黄金比と数値は、この予稿集を読んで頂いた読者には、実はお馴染みの数値であった。そうである。気が付いた読者は、この方面のことを常に考えている方々であると推察する。でもない方には、普通の一般的な事象の一つに過ぎないのかもしれない。勿体ぶらずに打ち明けると、図15、図16、図17で示す修正パスカル三角形をご覧いただきたい。このように考えると、ここまで考察した比は、図19に記すオリジナルのパスカル三角形の桂馬型の和、対角上の和、横の和の前後の比の数値と一致するのである。まったくの偶然であるが、案外身近なところにアイデアとなる重要なヒントは暗号のごとく隠されているのかもしれない。

加えて、読者に本稿の本質が再確認できるようにもう一例を取り上げたい。本稿の題目のように図余りと図足らずを許せば、初項からの定数を任意に設定したGibonacci数列や関連数列による正三角形螺旋図は、図20ように描けることを具体的に例示しておきたい。このようになりに柔軟に描けることが分かったことが本稿の特徴である。

以上、清々しい気持ちに浸らせてくれた一瞬に感動、感謝しながら著者自身はデザインの素人であるが、本稿に基づくデザインの一例として図21を例示して筆をお

きたい。読者の皆様が本稿の内容をどのように理解され、もしくは感じ取られて、これらの数列と正三角形螺旋の関係を上手く併せた芸術的な魅力を発展させてくれることを期待したい。

9. 結論

本研究では、シングル、ダブル、トリプル型の正三角形螺旋図について、関連する数列と比を基準に作画できる方法の提案や紹介を行なった。このときに、図余り、もしくは図足らずの可能性も考慮した螺旋図の工夫やその性質を明らかにし、ダブル型螺旋図ではプライマリーの貴金属比に関連する数列の足し合わす重み付けによる作画の特徴についても提案を行った。トリプル型ではヤコブスタール数列を基準に設定値を修正した2のべき乗を表わす数列を紹介し、以上の特徴を考察した螺旋図を併記して可視化を試みた。以上、これらの正三角形を用いた螺旋図に図余りもしくは図足らずという発想と、パスカルの三角形を例示した数列の魅力を正三角形螺旋図と併記しながら提案を試みた。

補足：質疑と回答の追記

発表当日に好意的にいくつかの質問を賜った。そのうちのの一つを持ち帰り取り組んだところ明確になったので、補足として追記する。その質問は以下のとおりである。

積極的に図余りや図足らずを想定するときには、Gibonacci数列を用いた場合でも正六角形を用いた螺旋図は作図が可能であるかという質問であった。宿題として持ち帰えることを約束し、東京からの帰宅後に着手したところ、図22のようにフィボナッチ数列によるダブル正六角形型螺旋図として作図が可能であることが分かった。そして、質問者の意図通りに確かに図余りや図足らずが数列を用いた六角形の各所で認められることも図の傾向から得られるが規律正しく螺旋軌道を描けている。加えて、ダブル型の螺旋図として作画できることが、本研究の核心でもある正三角形の活用による螺旋図の補助線によって保証されていることも併せて理解できる。したがって、正六角形を用いた螺旋図も、想定外であったが会場からの質問により、講演集の中に得ることができた。

そこで、ペル数列に関しても図23に示すように正六角形を活用したダブル螺旋図の作画を試みた。基本的な性質は正三角形の時と同じように、フィボナッチ数列の拡張の考え方に習うようであるが、隙間が大きすぎるように感じられる。そこで、同時に図23に併記したトリプル

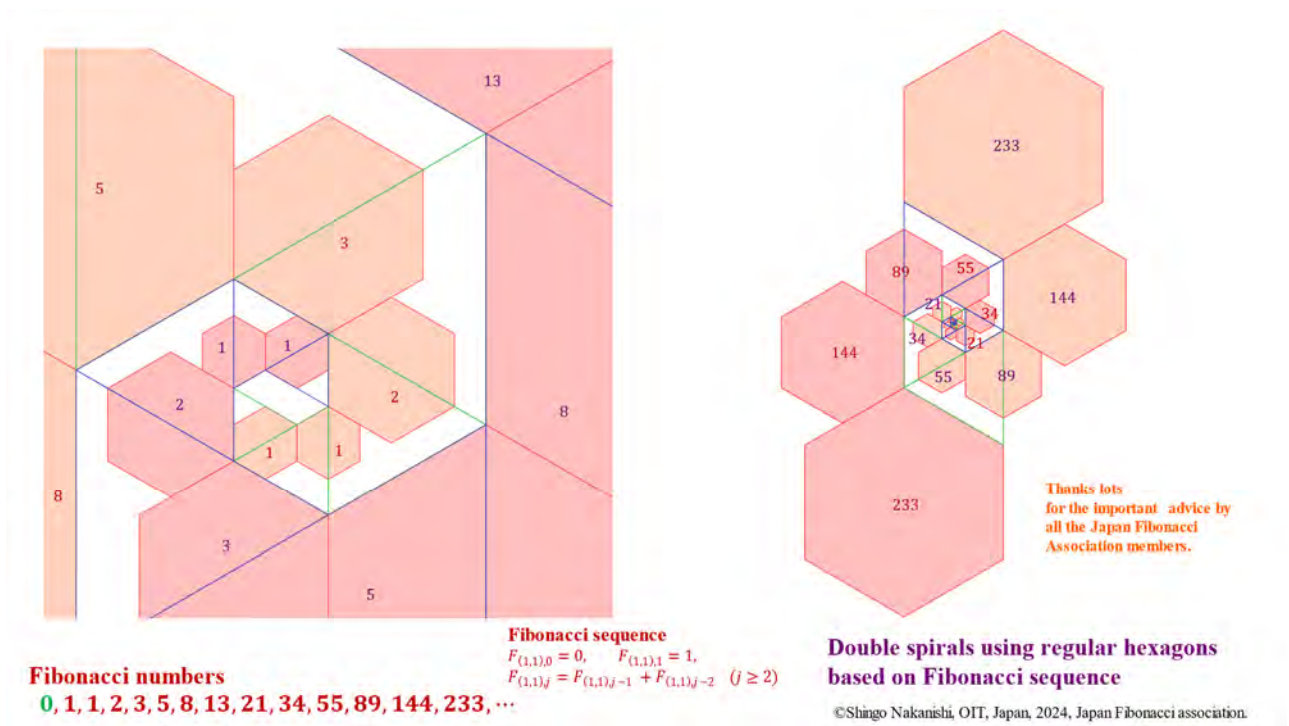


図22 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたダブル型フィボナッチ螺旋図の作画例

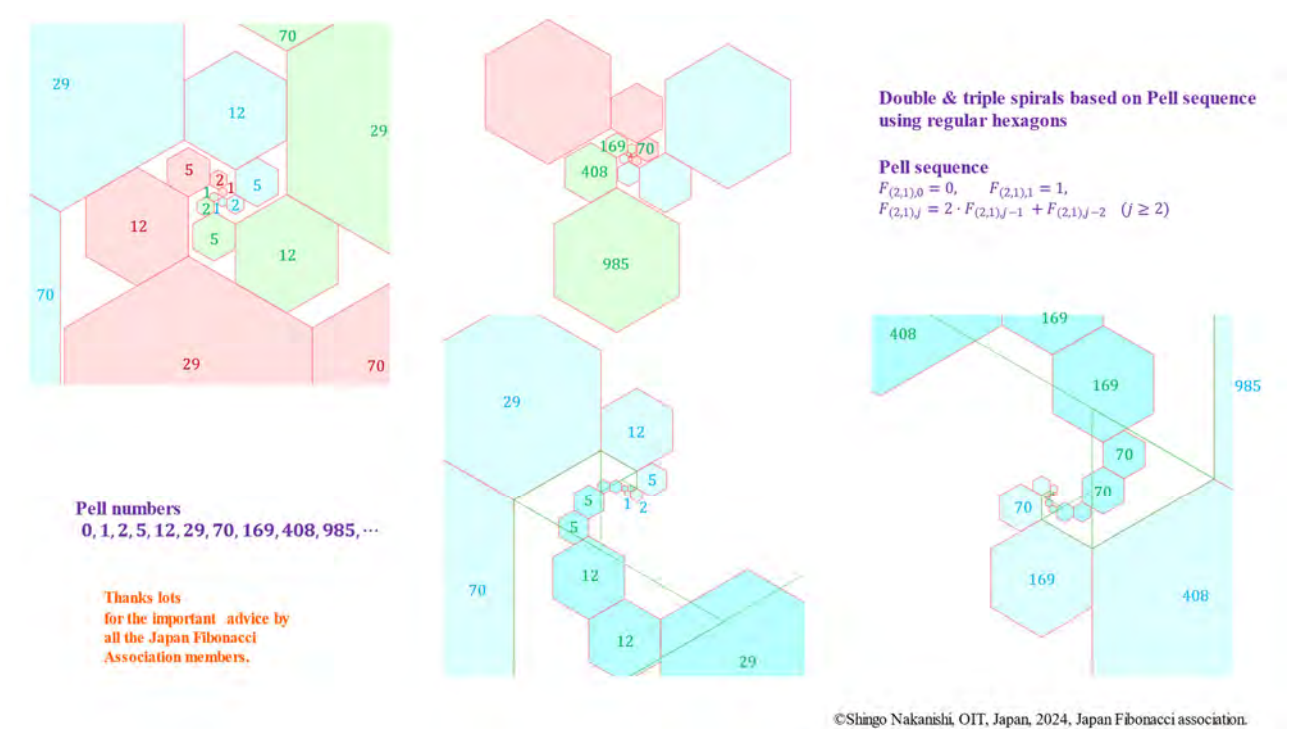


図23 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたダブル型とトリプル型ペル螺旋図の作画例

螺旋図も考えてみた。2のべき乗では、正六角形によるトリプル型螺旋図の作画が上手いかず、ヤコブスタール数列の活用は断念したが、その代わりにもっと拡大率が大きいペル数列を祈る気持ちで採用したところ、図23に示す通りに見事に描けた。一旦、隙間を作るように膨ら

んだ後、綺麗に収まるので、そのまま図が重なるかと思えばわずかな隙間を得ながらもトリプル螺旋図を意識する拡大を描けていることが理解できる。

したがって、パドヴァン数列を用いた正六角形によるシングル螺旋図として加えて、本研究のこれらの副産物

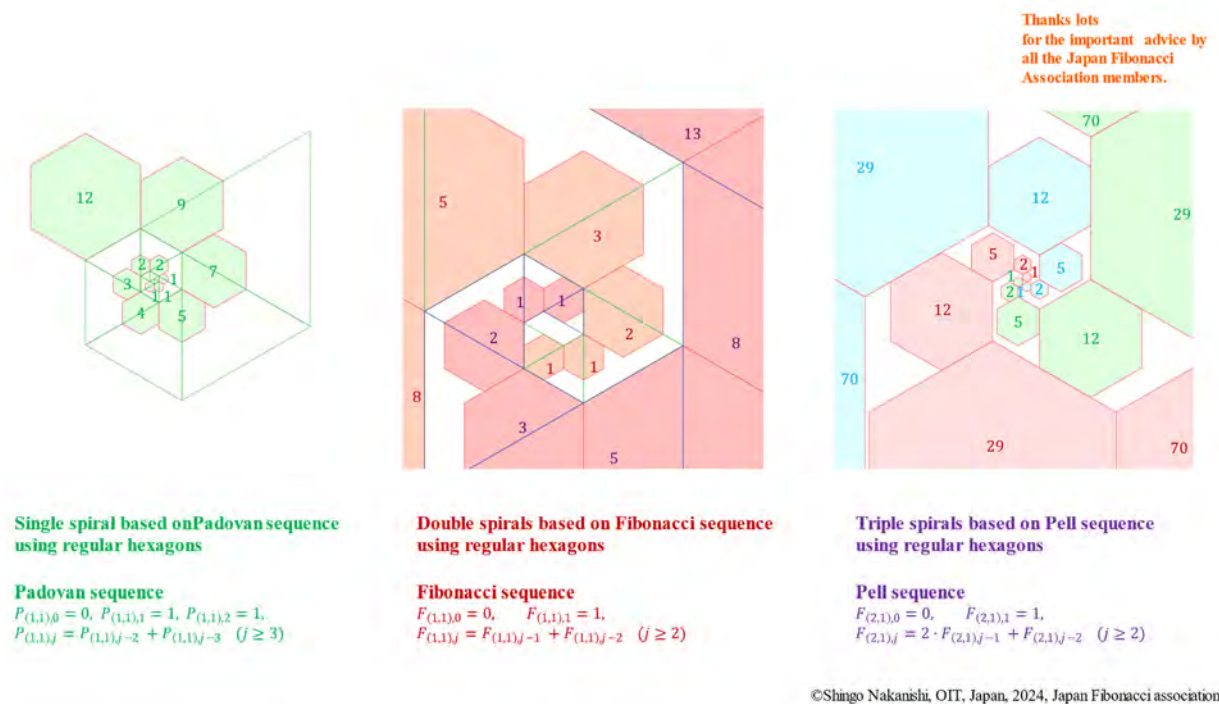


図24 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたシングル，ダブル，トリプル型螺旋図の作画例
 (パドヴァン数列，フィボナッチ数列，ペル数列を活用した作画例)

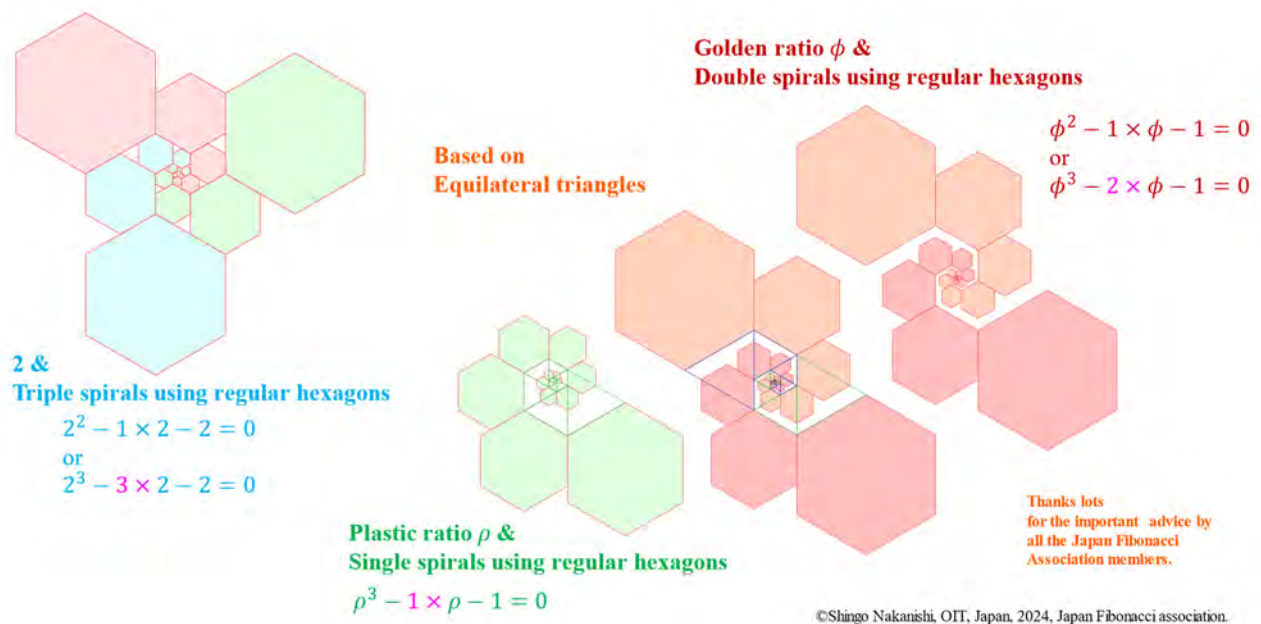


図25 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたシングル，ダブル，トリプル型螺旋図の作画例
 (プラスチック比，黄金比，2を基準に作画例)

を記念に図24のとおり，シングル型，ダブル型，トリプル型の正六角形を用いた螺旋図を並べた図を追記の図として残しておきたい。

ところで，追記公表の翌日に，黄金比でも描けるか挑

戦したところ，図25に示す通り，見事に補助線の正三角形とも相性が良くダブル正六角形螺旋図の作画ができた。そこで，もう一度，慎重に2のべき乗によるトリプル正六角形螺旋図にも再挑戦したところ，中心付近の六角形の

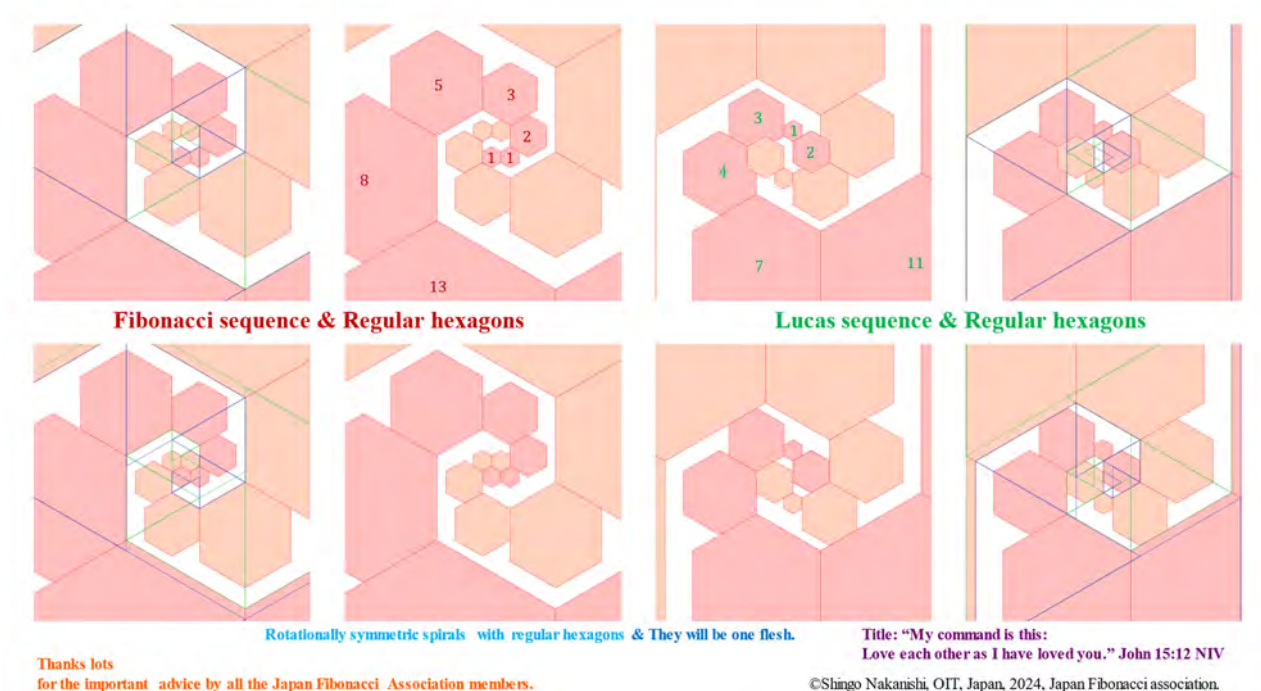


図26 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いダブル型螺旋図の作画例
(フィボナッチ数列とリュカ数列による正六角形を用いたダブル型螺旋図)

配置の修正で上手く収まることができた。思わずこれらの研究成果に驚きを隠せなかったが、同時に検証不足であったことが分かった。

ところで、正六角形のダブル型螺旋図を作画するうちに興味深いことが分かった。読者の皆様もここまで読んでこられたので、リュカ数列のダブル型螺旋図の傾向を想像されたと思われる。リュカ数列を活用した正六角形によるダブル型螺旋図を作成して図26に示す特徴が分かった。すなわち、正三角形の傾向を活用しながら数学的に取り扱うならば、フィボナッチ数列もリュカ数列も図26の上側のダブル型螺旋図として美しく描けるし、リュカ数列には図余りが確認できる。一方で、片方の螺旋図を少し移動させて芸術的に観察すならば、図26の下側のように描写したほうがより美的である。素直に、聖書の句「二人は一体となる(They will be one flesh.)」を感じる瞬間でもあるし、「互いに愛し合いなさい(Love each other as I have loved you.)」のように隣人を愛する心を感じることもできるので、締めくくりの図としてさらに追加してみた。

先行研究の調査をこれから行いながら、これらの特徴を見極めていくことにし、本研究では、追記の加筆訂正と図余りや図足らずを積極的に活用するときの正六角形螺旋図の速報版と位置付けて長くなったが解説を終えた

い。

以上の追記を代表の片山真一先生と座長の大関清太先生に確認を得たので追記したことを公表する。天の神様に感謝しながら実りある大変有益な発表会であったことを覚えておきたい。

謝辞

ここまでの研究成果に、数列や貴金属比の魅力をご指導や励みになるお言葉を賜った岩本誠一先生、安田正實先生に心から御礼申し上げます。また、両先生とご縁をいただいた北條仁志先生に感謝申し上げます。

また、フィボナッチ数列や黄金比の関係を調べていく中で、理解を深める著書を残してくださった細矢治夫先生、中村滋先生、研究集会の当日に好意的にご質問を賜った中川幸一先生をはじめ、フィボナッチ協会の研究集会会場の皆様ならびに先人の研究者に厚く感謝申し上げます。この他にもご支援いただいた多くの皆様にもこの場を借りて御礼申し上げます。

また、フィボナッチ協会研究集会への参加にご支援いただいた大関清太先生、片山真一先生にも厚く御礼申し上げます。

最後に、システムティックな考え方と統合する考え方と数理的な考え方をご指導いただいた小生の指導教授の

中易秀敏先生，栗山仙之助先生，大西匡光先生に御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] “プラスチック数”，Wikipedia,
<https://ja.wikipedia.org/wiki/プラスチック数>,
(2024年2月5日アクセス).
- [2] “Plastic ratio”，Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Plastic_ratio, (2024
年2月5日アクセス).
- [3] “パドヴァン数列”，Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/パドヴァン数](https://ja.wikipedia.org/wiki/パドヴァン数列)
列,(2024年2月5日アクセス).
- [4] “Padovan sequence”，Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence,
(2024年2月5日アクセス).
- [5] “ペラン数”，Wikipedia,
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ペラン数>, (2024年2月
5日アクセス).
- [6] “Perrin number”，Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number,
(2024年2月5日アクセス).
- [7] Fathauer, R., "Logarithmic Spiral Tilings of
Triangles", Bridges 2021 Conference Proceedings,
Tessellations Publishing, (2021), 55-62.
- [8] Stewart, I., “Tales of a Neglected Number”,
Scientific American, No. 6, June, (1996), 92-93.
- [9] 中西真悟，“細矢の三角形の拡張図ならびに黄金比
やプラスチック比を参考とするいくつかの数列の
修正版パスカルの三角形と螺旋図による可視化”，
日本オペレーションズ・リサーチ学会2023年秋季
研究発表会, (2023), 148-149.
- [10] 中西真悟，“図余りと図足らずを許した正三角形を
連ねた螺旋図 -パドヴァン数列とペラン数列に習
って-”，日本図学会2023年度関西支部学術講演会,配
布資料,1-6, (2024).
- [11] Klasßen, B., “Infinite perfekte
Dreieckszerlegungen auch für gleichseitige
Dreiecke”, Elemente Der Mathematik, 50, (1995),
116-121 (in German).
- [12] Kazlacheva, Z., “Fibonacci Rose in Fashion
Design”, ARTTE Applied Researches in Technics,
Technologies and Education, vol. 2, no. 3, (2014),
224-230.
- [13] Kazlacheva, Z., and Julieta I. J., "The golden and
Fibonacci geometry in fashion and textile
design", Proc. of the eRA 10, (2016), 15-64.
- [14] ErkDemon, “#3 - The "Fibonacci Rose”, YouTube,
(2008), (2024年5月3日アクセス).
- [15] Sharp, John. "Spirals and the golden section."
Nexus Network Journal 4 (2002): 59-82.
- [16] Mulatu Lemma, The Mulatu Numbers, Advances
and Applications in Mathematical Sciences, Vol.
10, Issue 4,(2011), 431-44.
- [17] Mulatu Lemma, Mustafa Mohammed and
Jonathan Lambright, J., “Some Celebrity
Theorems of the Mulatu Numbers”, IJRDO -
Journal of Mathematics, Vol. 5, Issue 1, (2019), 1-
5.
- [18] Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn, “Proofs
that Really Count: The Art of Combinatorial
Proof”, The Mathematical Association of America,
(2003).
- [19] 中村滋，“フィボナッチ数の小宇宙 第2版: フィボ
ナッチ数、リュカ数、黄金分割”，日本評社,(2008).
- [20] Thomas Koshy, “Pell and Pell–Lucas Numbers
with Applications”, Springer, (2014).
- [21] Panwar, A., Sisodiya, K. and Rathore, G.P.S.,
“On the products of k-Pell number and k-Pell
Lucas number”, IOSR Journal of Mathematics,
13, 5-III, (2017), 85-87.
- [22] 岩本 誠一，江口 将生，吉良 知文，“黄金・白銀・
青銅：数と比と形と率と”，九州大学経済学会，経
済学研究, Vol.74, No. 4, (2008), 1-19.
- [23] de Spinadel, V. W., "The family of metallic
means", Vis. Math Vol. 1, No. 3, (1999) 1-16.
- [24] “Jacobsthal number”，Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobsthal_number,
(2024年5月11日アクセス).
- [25] Thomas Koshy, “Fibonacci and Lucas Numbers
with Applications, Volume 1”, 2nd Edition, Wiley,
(2017)
- [26] Thomas Koshy, “Fibonacci and Lucas Numbers
with Applications, Volume 2”, 2nd Edition, Wiley,
(2018)
- [27] 中西真悟，“修正パスカルの三角形の活用を含む貴
金属比と関連する数列の数理とその可視化”，図学
会2023年度大会学術講演論文集, (2023), 63-68.

- [28] Draǵal, A., Hämäläinen, C., “An enumeration of equilateral triangle dissections”, *Discrete applied mathematics*, Vol. 158, No.14 (2010), 1479-1495.
- [29] 中西真悟, “黄金比とフィボナッチ数列とリュカ数列, 白銀比とペル数列とペル・リュカ数列を基準とする図形による幾何学的可視化”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2023年秋季研究発表会, (2023), 142-143.
- [30] Alves, Francisco Regis Vieira, et al. "Teaching Recurrent Sequences in Brazil Using Historical Facts and Graphical Illustrations." *Acta Didactica Napocensia* 13.1 (2020): 87-104.
- [31] Parodi, Bernhard R. "A generalized Fibonacci spiral." *arXiv preprint arXiv:2004.08902* (2020) 1-22.
- [32] Dotera, T., Shinichi, B., Primož, Z., "Bronze-mean hexagonal quasicrystal." *Nature materials*, 16.10 (2017), 987-992.
- [33] 中西真悟, “ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく 螺旋および等角図の幾何学的考察 — 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ—”, 大阪工業大学紀要, Vol. 55, No.2, (2021), 103-127.
- [34] 中西真悟, “標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比(その1) ケプラー三角形,ピタゴラスの定理,平方および代数螺旋の再考”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年春季研究発表会, No. 2-E-10, (2021), 1-2.
- [35] 中西真悟, “標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比(その2) フィボナッチ数列の拡張とフラクタルを目指した等角螺旋デザイン”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年春季研究発表会, No. 2-E-11, (2021), 1-2.
- [36] Nakanishi, S., "Visualizations of discrete equiangular spirals based on similar metallic ratios using Pythagorean theorem and weighted Fibonacci sequences", *Abstracts of 31th European Conference on Operational Research (the EURO2022)*, (2022), 21.
- [37] Nakanishi, S. “Visualizations of Sinusoidal Spirals, Limacons of Pascal, and Conic Curves using Equiangular Spirals of Secondary Metallic Ratios”, *Proceedings of the 21st International Conference on Geometry and Graphics*, Kitakyushu, Japan, (2024).
- [38] Meisner, G. (赤尾秀子訳), 「黄金比 —秘められた数の不思議—」, 創元社, (2019).
- [39] Meisner, G., “The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics”, Race Point Publishing, (2017).
- [40] 中西真悟, “一般化されたフィボナッチ数列およびリュカ数列の修正パスカルの三角形による幾何学的可視化”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2023年秋季研究発表会, (2023).

Ramanujan's exercise の一般化と Fibonacci 多項式

渋川元樹* (神戸大理)

概要

「Ramanujan の exercise」を一般化する．これは $x^n - 1$ の因数分解公式の変奏とみなせる．

1 Introduction

Ramanujan は以下の事実を指摘した [6] p9, Exercise 2:

$$at^2 + t - a^{-1} \mid a^5 t^{10} + 11t^5 - a^{-5}. \quad (1)$$

Thiruvenkatachar と Venkatachaliengar はこの事実を以下のように一般化した:

Theorem 1 (Theorem 1.3.1 [6]).

$$at^2 + t - a^{-1} \mid a^{2n+1} t^{2(2n+1)} + N t^{(2n+1)} - a^{-(2n+1)} \quad (n \geq 1), \quad (2)$$

ただし,

$$N = (2n+1) + \sum_{r=1}^n \left\{ \binom{n+r}{2r+1} + \binom{n+r+1}{2r+1} \right\}.$$

Ramanujan の結果は Theorem 1 の $n = 2$ の場合にあたる．多項式 $at^2 + t - a^{-1} = a^{-1}((at)^2 + at - 1)$ は $a^{-1}(x^2 + x - 1)$ と書き換えられるので, Theorem 1 は以下の結果と同値である:

$$x^2 + x - 1 \mid x^{2(2n+1)} + N x^{2n+1} - 1. \quad (3)$$

Theorem 1 は単に「割り切れる」と言っているだけで, その商と余りについては何も言及していない．本論文では Theorem 1 の $x^2 + x - 1$ を一般のモニックな 2 次多項式 $x^2 - ax + b$ に拡張した上で, 更にその商と余りを決定する．

Theorem 2. 任意の非負整数 $m \geq 0$ について, $f_{m+1}(x; a, b) \in \mathbb{Z}[a, b][x]$ を以下のように定義する:

$$f_{m+1}(x; a, b) := x^{2m+2} + [bF_m(a, b) - F_{m+2}(a, b)] x^{m+1} + b^{m+1},$$

ただし, $F_m(a, b)$ は (二変数) Fibonacci 多項式とする:

$$F_{n+1}(a, b) := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} (-b)^k \quad (n \geq 0), \quad F_0(a, b) := 0.$$

*g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

このとき,

$$f_{m+1}(x; a, b) = (x^2 - ax + b) \left[\sum_{j=0}^{m-1} F_{j+1}(a, b)x^{2m-j} + \sum_{j=0}^m b^{m-j} F_{j+1}(a, b)x^j \right] \quad (4)$$

$$= x^{2m+2} - L_{m+1}(a, b)x^{m+1} + b^{m+1}. \quad (5)$$

ここで $L_m(a, b) \in \mathbb{Z}[a, b]$ は以下の差分方程式と初期値で定義される (*Lucas*) 多項式である:

$$x_{m+2} - ax_{m+1} + bx_m = 0, \quad x_0 := 2, \quad x_1 := a.$$

公式 (4) を $x^2 - ax + b$ で割ると次を得る:

$$\frac{f_{m+1}(x; a, b)}{x^2 - ax + b} = \sum_{j=0}^{m-1} F_{j+1}(a, b)x^{2m-j} + \sum_{j=0}^m b^{m-j} F_{j+1}(a, b)x^j. \quad (6)$$

この公式はよく知られた等比級数の和公式:

$$\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{x - a} = \sum_{j=0}^m x^j a^{m-j}$$

の変奏 (2 次版) とみなせる.

なお, 本論文の内容に関しては, [1] とその解説動画 <https://www.youtube.com/watch?v=qajKRSza9Ao> も併せて参照されたい.

2 Preliminaries

主定理の証明に必要な Fibonacci 多項式 $F_n(a, b)$ の基本性質を述べる (詳細は [3] Chapter 43 参照).

Lemma 3. 以下の初期値と差分方程式:

$$x_{n+2} - ax_{n+1} + bx_n = 0, \quad x_0 := 0, \quad x_1 := 1$$

を満たす解は一意的であり,

$$x_n = F_n(a, b) \quad (n \geq 0). \quad (7)$$

特に

$$F_n(\alpha + \beta, \alpha\beta) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k} \beta^k. \quad (8)$$

以下, α と β は 2 次多項式 $x^2 - ax + b$ の 2 根とする:

$$x^2 - ax + b = (x - \alpha)(x - \beta).$$

α^n と β^n は差分方程式 $x_{n+2} - ax_{n+1} + bx_n = 0$ を満たし,

$$\alpha^0 + \beta^0 = 2, \quad \alpha^1 + \beta^1 = a,$$

となる. よって差分方程式の解の一意性から次を得る.

Lemma 4. 任意の非負整数 n に対し,

$$L_n(\alpha + \beta, \alpha\beta) = \alpha^n + \beta^n. \quad (9)$$

多項式 $\Phi_{m+1}(x; a, b) \in \mathbb{Z}[a, b][x]$ を以下で定義する:

$$\Phi_{m+1}(x; a, b) := \prod_{\substack{1 \leq j \leq m+1 \\ \gcd(j, m+1)=1}} \left(x - \alpha e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right) \left(x - \beta e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right). \quad (10)$$

これは円分多項式

$$\Phi_{m+1}(x) := \prod_{\substack{1 \leq j \leq m+1 \\ \gcd(j, m+1)=1}} \left(x - e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right).$$

を用いて, 次のように書ける:

$$\Phi_{m+1}(x; a, b) = b^{\varphi(m+1)} \Phi_{m+1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \Phi_{m+1}\left(\frac{x}{\beta}\right). \quad \varphi(m+1) = \deg(\Phi_{m+1}(x)). \quad (11)$$

を用いて, ただし, $\varphi(m+1)$ は Euler totient 関数 ($\varphi(m+1) = \deg(\Phi_{m+1}(x))$) である.

多項式 $\Phi_{m+1}(x; a, b)$ の定義とよく知られた因数分解:

$$x^{m+1} - a^{m+1} = \prod_{j=0}^m \left(x - e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} a \right) = a^{m+1} \prod_{d|m+1} \Phi_d\left(\frac{x}{a}\right),$$

及び Lemma 4 より, 次を得る.

Lemma 5. 任意の非負整数 m について,

$$x^{2m+2} - L_{m+1}(a, b)x^{m+1} + b^{m+1} = \prod_{j=0}^m \left(x - \alpha e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right) \left(x - \beta e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right) \quad (12)$$

$$= \prod_{d|m+1} \Phi_d(x; a, b). \quad (13)$$

これらはよく知られた

$$x^{m+1} - a^{m+1} = \prod_{j=0}^m \left(x - e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} a \right) = a^{m+1} \prod_{d|m+1} \Phi_d\left(\frac{x}{a}\right).$$

の“2 次版”とみなせる。

Section 4 で必要になるので、対称関数について必要な性質を述べる。変数 r 次数 $n \in \mathbb{Z}$ の基本対称式 $e_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 、ベキ和対称多項式 $p_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ と完全斉次対称多項式 $h_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ を以下のように定義する：

$$e_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \sum_{r \geq m_1 > \dots > m_1 \geq 1} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_r} & (n = 1, \dots, r), \\ 0 & (\text{others}) \end{cases} \quad (14)$$

$$p_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) := \sum_{j=1}^r \alpha_j^m, \quad (15)$$

$$h_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) := \frac{1}{\prod_{1 \leq k < l \leq r} (\alpha_k - \alpha_l)} \det \begin{pmatrix} \alpha_1^{n+r-1} & \alpha_2^{n+r-1} & \cdots & \alpha_{r-1}^{n+r-1} & \alpha_r^{n+r-1} \\ \alpha_1^{r-2} & \alpha_2^{r-2} & \cdots & \alpha_{r-1}^{r-2} & \alpha_r^{r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{r-1} & \alpha_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$= \begin{cases} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_r = n, \\ m_1, \dots, m_r \geq 0}} \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_r^{m_r} & (n \geq 0) \\ 0 & (n = -1, \dots, -r + 1) \\ \frac{(-1)^{r-1}}{a_r} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_r = -n-r, \\ m_1, \dots, m_r \geq 0}} \alpha_1^{-m_1} \cdots \alpha_r^{-m_r} & (n \leq -r) \end{cases} \quad (17)$$

ここで $h_j^{(r)}$ は Fibonacci 数の一般化にあたり、初期値

$$h_0^{(r)} := 1, \quad h_{-j}^{(r)} := 0 \quad (j = 1, \dots, r-1) \quad (18)$$

と差分方程式

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j a_j x_{r-j} = 0, \quad a_j = e_j^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \quad (19)$$

から一意に定まり、 $h_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ や $p_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ が $a_1, \dots, a_r$ を用いて以下のように明示的に書けることに注意せよ。これらの公式はいわゆる Waring の名を冠した公式の類であり、よく知られていると思うが、Macdonald [4] には基本対称式による行列式表示はあるが、それを直接和で書いた表示（また特にマイナス次数側の言及）は無さそうなので念のため証明しておく。

Lemma 6. 任意の非負整数 n に対し、

$$h_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r k m_k = n}} (m_1 + \dots + m_r)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{(j-1)m_j}}{m_j!} a_j^{m_j}, \quad (20)$$

$$h_{-r-n}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \frac{(-1)^{r-1}}{a_r} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r k m_k = n}} (m_1 + \dots + m_r)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{(j-1)m_j}}{m_j!} \left(\frac{a_{r-j}}{a_r} \right)^{m_j}, \quad (21)$$

$$p_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = n \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r km_k = n}} (m_1 + \dots + m_r - 1)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{(j-1)m_j}}{m_j!} a_j^{m_j}, \quad (22)$$

$$p_{-n}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = n \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r km_k = n}} (m_1 + \dots + m_r - 1)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{(j-1)m_j}}{m_j!} \left(\frac{a_{r-j}}{a_r} \right)^{m_j}. \quad (23)$$

Proof. 母関数を用いて計算する. (20) については

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} h_n^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) u^n &= \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - \alpha_j u} \\ &= \left(1 - \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} a_j u^j \right)^{-1} \\ &= \sum_{l \geq 0} \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} a_j u^j \right)^l \\ &= \sum_{n \geq 0} u^n \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r km_k = n}} (m_1 + \dots + m_r)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{(j-1)m_j}}{m_j!} a_j^{m_j}. \end{aligned}$$

(21) についても同様にして

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} h_{-r-n}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) u^n &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{r-1}}{a_r} h_n^{(r)}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r^{-1}) u^n \\ &= \frac{(-1)^{r-1}}{a_r} \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - u/\alpha_j} \\ &= (-1)^{r-1} \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j a_{r-j} u^j \right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^{r-1}}{a_r} \left(1 - \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \frac{a_{r-j}}{a_r} u^j \right)^{-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} u^n \frac{(-1)^{r-1}}{a_r} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r km_k = n}} (m_1 + \dots + m_r)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{(j-1)m_j}}{m_j!} \left(\frac{a_{r-j}}{a_r} \right)^{m_j}. \end{aligned}$$

ベキ和対称多項式 (22) はオリジナルの Waring の公式そのものである (たとえば, [2] (2.1)). (23) については

$$\sum_{n \geq 0} p_{-n}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \frac{u^n}{n} = \sum_{n \geq 0} p_n^{(r)}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r^{-1}) \frac{u^n}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{j=1}^r \log(1 - u/\alpha_j) \\
&= -\log \prod_{j=1}^r \frac{\alpha_j - u}{\alpha_j} \\
&= -\log \left(1 - \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \frac{a_{r-j}}{a_r} u^j \right) \\
&= \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l} \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \frac{a_{r-j}}{a_r} u^j \right)^l \\
&= \sum_{n \geq 1} u^n \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sum_{k=1}^r k m_k = n}} (m_1 + \dots + m_r - 1)! \prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{(j-1)m_j}}{m_j!} \left(\frac{a_{r-j}}{a_r} \right)^{m_j}.
\end{aligned}$$

□

3 Theorem 2 の証明

Proof of Theorem 2. 直接計算より,

$$\begin{aligned}
\text{LHS of (4)} &= x^{2m+2} + \sum_{j=1}^m (F_{j+1}(a, b) - aF_j(a, b) + bF_{j-1}(a, b))x^{2m+2-j} \\
&\quad + (2bF_m(a, b) - aF_{m+1}(a, b))x^{m+1} \\
&\quad + b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m-1} b^{m+1-j} (F_{j+1}(a, b) - aF_j(a, b) + bF_{j-1}(a, b))x^j \\
&= x^{2m+2} + (bF_m(a, b) - F_{m+2}(a, b))x^{m+1} + b^{m+1}.
\end{aligned}$$

ここで 2 番目の等号は Lemma 3 より従う.

また (4) より,

$$f_{m+1}(\alpha; a, b) = f_{m+1}(\beta; a, b) = 0.$$

多項式 $f_{m+1}(x; a, b)$ の定義より,

$$f_{m+1} \left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} x; a, b \right) = f_{m+1}(x; a, b) \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

ゆえ, $f_{m+1}(x; a, b)$ の全ての根が得られる:

$$f_{m+1}(x; a, b) = \prod_{j=0}^m \left(x - \alpha e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right) \left(x - \beta e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right). \quad (24)$$

最後に Lemma 5 より, (5) を得る.

□

Remark 7. 対称関数論の観点から, Theorem 2 の別証が得られる. まず公式 (5) は (8) と (9) から得られる:

$$\begin{aligned}\alpha\beta F_m(\alpha + \beta, \alpha\beta) - F_{m+2}(\alpha + \beta, \alpha\beta) &= \alpha\beta \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{m+2} - \beta^{m+2}}{\alpha - \beta} \\ &= -\alpha^{m+1} - \beta^{m+1} \\ &= -L_{m+1}(\alpha + \beta, \alpha\beta).\end{aligned}$$

また公式 (4) は直接計算から得られる:

$$\begin{aligned}& (x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta) \left[\sum_{j=0}^{m-1} F_{j+1}(\alpha + \beta, \alpha\beta) x^{2m-j} + \sum_{j=0}^m (\alpha\beta)^{m-j} F_{j+1}(\alpha + \beta, \alpha\beta) x^j \right] \\ &= (x - \alpha)(x - \beta) \left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha^{j+1} - \beta^{j+1}}{\alpha - \beta} x^{2m-j} + \sum_{j=0}^m (\alpha\beta)^{m-j} \frac{\alpha^{j+1} - \beta^{j+1}}{\alpha - \beta} x^j \right] \\ &= x^{2m} \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{\alpha - \beta} \left(\alpha \frac{1 - \alpha^m/x^m}{1 - \alpha/x} - \beta \frac{1 - \beta^m/x^m}{1 - \beta/x} \right) \\ &\quad + (\alpha\beta)^{m+1} \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{\alpha - \beta} \left(\alpha \frac{1 - x^{m+1}/\beta^{m+1}}{1 - x/\beta} - \beta \frac{1 - x^{m+1}/\alpha^{m+1}}{1 - x/\alpha} \right) \\ &= \left(x^{2m+2} - \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} x^{m+2} + \alpha\beta \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} x^{m+1} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} x^{m+2} - \frac{\alpha^{m+2} - \beta^{m+2}}{\alpha - \beta} x^{m+1} + (\alpha\beta)^{m+1} \right) \\ &= f_{m+1}(x; \alpha + \beta, \alpha\beta).\end{aligned}$$

対称関数の観点からは, 更に別の第 3 の証明 (Theorem 11 の Proof) も得られる.

Theorem 2 と Lemma 5 より, 以下の因数分解公式が得られる.

Corollary 8.

$$f_{m+1}(x; a, b) = \prod_{d|m+1} \Phi_d(x; a, b), \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} F_{j+1}(a, b) x^{2m-j} + \sum_{j=0}^m b^{m-j} F_{j+1}(a, b) x^j = \prod_{j=1}^m \left(x - \alpha e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right) \left(x - \beta e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}} \right) \quad (26)$$

$$= \prod_{j=1}^m f_1 \left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{m+1}}; a, b \right). \quad (27)$$

Example 9 ($a = b = -1$). この場合 $F_{n+1}(-1, -1)$ と $L_{n+1}(-1, -1)$ はそれぞれ Fibonacci 数:

$$F_{n+1} := \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r}, \quad F_0 := 0,$$

および Lucas 数:

$$L_{n+1} := F_n + F_{n+2}$$

である:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(-1, -1) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} (-1)^{n-2k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = (-1)^n F_{n+1}, \\ L_{n+1}(-1, -1) &= (-1)^n (F_n + F_{n+2}) = (-1)^n L_{n+1}. \end{aligned}$$

よって

$$f_{m+1}(x; -1, -1) = x^{2m+2} + (-1)^m L_{m+1} x^{m+1} + (-1)^{m+1} \quad (28)$$

$$= (x^2 + x - 1) \left(\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j F_{j+1} x^{2m-j} + (-1)^m \sum_{j=0}^m F_{j+1} x^j \right) \quad (29)$$

$$= \prod_{d|m+1} \Phi_d(x; -1, -1). \quad (30)$$

ここで $m = 2n$ とすることで Theorem 1 の一般化を得る. 実際,

$$N = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n-r-1}{r} + \sum_{r=0}^n \binom{2n-r+1}{r} = F_{2n} + F_{2n+2}$$

ゆえ

$$x^{2(2n+1)} + Nx^{2n+1} - 1 = f_{2n+1}(x; -1, -1) \quad (31)$$

$$= (x^2 + x - 1) \left(\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j F_{j+1} x^{4n-j} + \sum_{j=0}^{2n} F_{j+1} x^j \right) \quad (32)$$

$$= \prod_{d|2n+1} \Phi_d(x; -1, -1). \quad (33)$$

$\Phi_n(x; -1, -1)$ の最初の方の具体例は以下の通り:

$$\Phi_1(x; -1, -1) = x^2 + x - 1,$$

$$\Phi_2(x; -1, -1) = x^2 - x - 1,$$

$$\Phi_3(x; -1, -1) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1,$$

$$\Phi_4(x; -1, -1) = x^4 + 3x^2 + 1,$$

$$\begin{aligned} \Phi_5(x; -1, -1) &= x^8 - x^7 + 2x^6 - 3x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ &= (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1)(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1), \end{aligned}$$

$$\Phi_6(x; -1, -1) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1.$$

また $f_n(x; -1, -1)$ の最初の方の具体例は

$$f_1(x; -1, -1) = x^2 + x - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_1(x; -1, -1), \\
f_2(x; -1, -1) &= x^4 - 3x^2 + 1 \\
&= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \\
&= \Phi_1(x; -1, -1)\Phi_2(x; -1, -1), \\
f_3(x; -1, -1) &= x^6 + 4x^3 - 1 \\
&= (x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) \\
&= \Phi_1(x; -1, -1)\Phi_3(x; -1, -1), \\
f_4(x; -1, -1) &= x^8 - 7x^4 + 1 \\
&= (x^2 + x - 1)(x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1) \\
&= \Phi_1(x; -1, -1)\Phi_2(x; -1, -1)\Phi_4(x; -1, -1), \\
f_5(x; -1, -1) &= x^{10} + 11x^4 - 1 \\
&= (x^2 + x - 1)(x^8 - x^7 + 2x^6 - 3x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1) \\
&= \Phi_1(x; -1, -1)\Phi_5(x; -1, -1), \\
f_6(x; -1, -1) &= x^{12} - 18x^4 + 1 \\
&= (x^2 + x - 1)(x^{10} - x^9 + 2x^8 - 3x^7 + 5x^6 - 8x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1) \\
&= \Phi_1(x; -1, -1)\Phi_2(x; -1, -1)\Phi_3(x; -1, -1)\Phi_6(x; -1, -1).
\end{aligned}$$

4 一般化について

Theorem 2 は以下のような一般化が考えられる. 多項式 $f(x)$ を

$$f(x) := \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j) = \sum_{j=0}^r (-1)^j a_j x^{r-j}, \quad a_j = e_j^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

とする.

Problem 10. 有理関数

$$\frac{1}{f(x)} \prod_{j=1}^r (x^{m+1} - \alpha_j^{m+1}) = \prod_{k=1}^m f\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{m+1}} x\right) = \sum_{j=0}^{rm} c_j x^{rm-j} \quad (34)$$

を考え, 展開係数 $c_j \in \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$ を明示的にもとめよ.

$r = 1$ は等比級数, $r = 2$ は Theorem 2 であるが, $r \geq 3$ の時は難しく, 以下のような部分的な結果しか得られない.

Theorem 11. 任意の非負整数 j について

$$c_j = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_r = j, \\ 0 \leq m_1, \dots, m_r \leq m}} \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r}. \quad (35)$$

特に $j = 0, 1, \dots, m$ と $j = rm, rm - 1, \dots, (r - 1)m + 1$ については

$$c_j = \begin{cases} h_j^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) & (j = 0, 1, \dots, m) \\ (-1)^{r-1} a_r^{m+1} h_{j-rm}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) & (j = rm, rm - 1, \dots, (r - 1)m + 1) \end{cases}. \quad (36)$$

Proof. (35) は母函数を変形して

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} \prod_{j=1}^r (x^{m+1} - \alpha_j^{m+1}) &= \prod_{j=1}^r \frac{x^{m+1} - \alpha_j^{m+1}}{x - \alpha_j} \\ &= \prod_{j=1}^r \left(\sum_{m_j=0}^m \alpha_j^{m_j} x^{m-m_j} \right) \\ &= \sum_{0 \leq m_1, \dots, m_r \leq m} \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r} x^{rm-m_1-\dots-m_r} \\ &= \sum_{j=0}^{rm} x^{rm-j} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_r=j, \\ 0 \leq m_1, \dots, m_r \leq m}} \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r}. \end{aligned}$$

(36) は $j = 0, 1, \dots, m$ の場合は明らか. $j = rm - k$ ($k = 0, 1, \dots, m$) の場合は

$$\begin{aligned} c_j &= \sum_{\substack{m_1+\dots+m_r=rm-k, \\ 0 \leq m_1, \dots, m_r \leq m}} \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r} \\ &= \sum_{\substack{l_1+\dots+l_r=k, \\ 0 \leq l_1, \dots, l_r \leq m}} \alpha_1^{m-l_1} \dots \alpha_r^{m-l_r} \\ &= a_r^m \sum_{\substack{l_1+\dots+l_r=k, \\ 0 \leq l_1, \dots, l_r \leq m}} \alpha_1^{-l_1} \dots \alpha_r^{-l_r} \\ &= a_r^m h_k^{(r)}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r^{-1}) \\ &= (-1)^{r-1} a_r^{m+1} h_{-r-k}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= (-1)^{r-1} a_r^{m+1} h_{j-rm}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \end{aligned}$$

□

Remark 12. (34) に $f(x)$ をかけた多項式

$$f(x) \sum_{j=0}^{rm} c_j x^{rm-j} = \prod_{j=1}^r (x^{m+1} - \alpha_j^{m+1}) = \sum_{j=0}^r (-1)^j e_j^{(r)}(\alpha_1^{m+1}, \dots, \alpha_r^{m+1}) x^{(r-j)(m+1)}$$

の係数は、いわゆる一般化された Waring の公式 ([2] Section 3 Theorem) により基本対称式で書くことができる. 特に端の方は

$$e_1^{(r)}(\alpha_1^{m+1}, \dots, \alpha_r^{m+1}) = p_{m+1}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \quad (37)$$

$$e_{r-1}^{(r)}(\alpha_1^{m+1}, \dots, \alpha_r^{m+1}) = \frac{1}{a_{m+1}^{(r)}} p_{-m-1}^{(r)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \frac{1}{a_r^{(r)}} p_{m+1}^{(r)}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r^{-1}) \quad (38)$$

となり, 1 個のベキ和対称多項式 (Lucas 多項式の一般化) で簡単に書けるが, 一般の表示は非常に複雑である.

Example 13.

$$f(x) := x^3 - x^2 - 2x + 1 = \left[x + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right] \left[x + 2 \cos \left(\frac{4\pi}{7} \right) \right] \left[x + 2 \cos \left(\frac{6\pi}{7} \right) \right]$$

として

$$f_{m+1}(x) := \left[x^{m+1} - \left(-2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right)^{m+1} \right] \left[x^{m+1} - \left(-2 \cos \left(\frac{4\pi}{7} \right) \right)^{m+1} \right] \left[x^{m+1} - \left(-2 \cos \left(\frac{6\pi}{7} \right) \right)^{m+1} \right]$$

とおく. 高階 Fibonacci 数 [5]:

$$h_m^{(3)} \left(-2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right), -2 \cos \left(\frac{4\pi}{7} \right), -2 \cos \left(\frac{6\pi}{7} \right) \right) := F_{m+1}^{(3)} : \dots, -25, -11, -5, -2, -1, 0, 0, 1, 1, 3, 4, 9, \dots$$

と高階 Lucas 数:

$$p_{m+1}^{(3)} \left(-2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right), -2 \cos \left(\frac{4\pi}{7} \right), -2 \cos \left(\frac{6\pi}{7} \right) \right) := L_{m+1}^{(3)} : \dots, 57, 26, 11, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 13, \dots,$$

を用いて, c_j が部分的に記述できることがわかる.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 - x^2 - 2x + 1, \\ f_2(x) &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 \\ &= f_1(x)(x^3 + x^2 - 2x - 1), \\ f_3(x) &= x^9 - 4x^6 - 11x^3 + 1 \\ &= f_1(x)(x^6 + x^5 + 3x^4 + 5x^2 + 2x + 1), \\ f_4(x) &= x^{12} - 13x^8 + 26x^4 - 1 \\ &= f_1(x)(x^9 + x^8 + 3x^7 + 4x^6 - 4x^5 + x^4 - 11x^3 - 5x^2 - 2x - 1) \\ &= f_1(x)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1), \\ f_5(x) &= x^{15} - 16x^{10} - 57x^5 + 1 \\ &= f_1(x)(x^{12} + x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 9x^8 - 2x^7 + 12x^6 - x^5 + 25x^4 + 11x^3 + 5x^2 + 2x + 1). \end{aligned}$$

Acknowledgments

本研究は JST CREST (Grant Number JP19209317) と JSPS 科研費 (Grant Number 21K13808) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] 渋川元樹, エレガントな解答をもとむ【解答】, 数学セミナー 2024 年 6 月号, 日本評論社 (2024), pp86–89. 解説動画 <https://www.youtube.com/watch?v=qajKRSza9Ao>
- [2] J. Konvalina, *A generalization of Waring's formula*, J. Combin. Theory Ser. A **75**-2 (1996), pp281–294.
- [3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2*, Wiley, Hoboken, (2019).
- [4] I. G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, 1995.
- [5] G. Shibukawa, *New identities for some symmetric polynomials and a higher order analogue of the Fibonacci and Lucas numbers*, Fibonacci Quart., **58**-5, (2020) pp200–221.
- [6] V. R. Thiruvengatachar, K. Venkatachaliengar, *Ramanujan at Elementary Levels ; Glimpses*, In: B. C. Berndt, A. Dixit, V. J. Reuter, V.J., P. Xu, B., (eds) Yuttanan, Ramanujan Mathematical Society (2016).

Genki Shibukawa
Department of Mathematics
Graduate School of Science
Kobe University
1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe, 657-8501, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

フィボナッチ数を導く積分方程式とレーマー公式の図形解

Fibonacci numbers derived from an integral equation,
and another proof of Lehmer's arctangent sum.

東京海洋大学名誉教授 中村 滋 (Shigeru NAKAMURA)

はじめに

最近の雑誌からフィボナッチ数に関連する論文を2つ紹介します。はじめは、積分方程式の解からフィボナッチ数が導かれるという話、2つ目はフィボナッチ数に関するレーマー公式を図形的に解くという話です。

(1) ある積分方程式の解から得られるフィボナッチ数

積分方程式の解から、ドゥ・モアヴル=ビネの公式を使ってフィボナッチ数を導くという興味ある問題を見つけたのでここで紹介します。問題は次の通りです。

問題

- (1) $f(-x) = 1 + \int_0^x f(x-t) \cos t \, dt$ を満たす実数関数 $f(x)$ を初等関数で表せ。
- (2) 任意の整数 ($k \geq 0$) に対して、 $f^{(k)}(0) = (-1)^{[(k+1)/2]} F_k$ 、であることを示せ。
(ただし F_k はフィボナッチ数、 $[*]$ はガウスの最大整数関数)

(解) (1) 積分方程式で t を $x-t$ と置換すると、

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \int_x^0 f(t) \cos(x-t) (-dt) = 1 + \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt, \\ \therefore f(x) &= 1 + \int_0^{-x} f(t) \cos(-x-t) dt = 1 - \int_0^x f(-t) \cos(-x+t) dt \\ &= 1 - \int_0^x f(-t) \cos(x-t) dt. \end{aligned}$$

そこで、 $g(x) = f(x) + f(-x)$, $h(x) = f(x) - f(-x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 + \int_0^x h(x) \cos(x-t) dt, \\ h(x) &= -\int_0^x g(x) \cos(x-t) dt. \end{aligned}$$

これらをラプラス変換すると、

$$G(s) = 2/s + \{s/(s^2+1)\} \cdot H(s), \quad H(s) = -\{s/(s^2+1)\} \cdot G(s),$$

よって、 $G(s) = 2/s - \{s^2/(s^2+1)^2\} \cdot G(s)$.

移項して整理すると、

$$\begin{aligned} G(s) &= (2/s) \{ (s^2+1)^2 / (s^4+3s^2+1) \} \\ &= (2/s) \{ (s^4+3s^2+1) - s^2 \} / (s^4+3s^2+1) \\ &= 2/s - 2s / (s^4+3s^2+1) = 2/s - 2s / (s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2). \\ &= 2/s + (2/\sqrt{5}) \{ s / (s^2+\alpha^2) - s / (s^2+\beta^2) \}. \end{aligned}$$

[2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の根を $\alpha = (\sqrt{5}+1)/2$ (黄金比), および $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ と書くと、 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ なので、 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$, $\alpha^2\beta^2 = 1$

となる. $\therefore s^4 + 3s^2 + 1 = (s^2 + \alpha^2)(s^2 + \beta^2)$. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta = \sqrt{5}$ も明らか.]
ラプラス逆変換をすると, 次式が得られる:

$$g(x) = 2 + (2/\sqrt{5})\{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)\}.$$

同様にして $h(x)$ を求める.

$$\begin{aligned} H(s) &= -\{s/(s^2+1)\} \cdot (2/s)\{(s^2+1)^2/(s^4+3s^2+1)\}, \\ &= -2\{(s^2+1)/(s^4+3s^2+1)\} \\ &= (2/\sqrt{5})\{\alpha/(s^2+\alpha^2) - \beta/(s^2+\beta^2)\}. \end{aligned}$$

$$\therefore h(x) = -(2/\sqrt{5})\{\sin(\alpha x) - \sin(\beta x)\}.$$

よって, $f(x) = 1 + (1/\sqrt{5})\{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x) - \sin(\alpha x) + \sin(\beta x)\}$ (A).

(2) $f(x)$ を何度も微分して $x=0$ とおくと, $k > 0$ に対して,

$$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^k(\alpha^{2k-1} - \beta^{2k-1})/\sqrt{5},$$

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k(\alpha^{2k} - \beta^{2k})/\sqrt{5}.$$

ところで, フィボナッチ数 F_n を直接 α と β で表す公式は, ビネの公式 (1843) と呼ばれていたが, じつはビネ (Jaques-Philippe-Marie Binet; 1786-1856) の 100 年以上前, 1718 年にドゥ・モアヴル (Abraham De Moivre; 1667-1754) が見つけていた. リュカ数 L_n の公式と並べておこう:

$$(M) \quad F_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}, \quad L_n = \alpha^n + \beta^n. \quad (\text{ドゥ・モアヴル=ビネの公式})$$

したがって, $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^k F_{2k-1}$, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k F_{2k} = (\alpha^{2k} - \beta^{2k})/\sqrt{5}$.
これを 1 つの式にまとめると次のようになる. ([*] はガウスの最大整数関数)

$$(A) \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{[n/2]} F_n. \quad (\text{解終})$$

(2) フィボナッチ数に関するレーマー公式を図形的に解く

レーマー (D. H. Lehmer; 1905-1991) はフィボナッチ数のアーク・コタンジェントと円周率の間に成り立つ美しい式を見つけました (1938). これは次の公式です:

$$\pi/4 = \text{Ac}(F_3) + \text{Ac}(F_5) + \text{Ac}(F_7) + \text{Ac}(F_9) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Ac}(F_{2n+1})$$

タンジェントの逆数であるコタンジェントの逆関数がアーク・コタンジェントです.

以下ではアーク・コタンジェント関数を簡単に次のように書くことにします:

$$\text{Ac}(x) = \text{Arccot } x = \text{Arctan}(1/x).$$

$$(\tan(\pi/4) = 1 \text{ なので, } \text{Ac}(1) = \text{Arccot}(1) = \text{Arctan}(1) = \pi/4 \text{ です.})$$

これを使うと, マチン (John Machin; 1680?-1752) が見つけたことが分かっている 7 つの円周率公式のうちで $\text{Ac}(x)$ (x は整数) の整数倍の和で表す公式は, 次の 5 通りです.

$$(M1) \quad \pi/4 = 4 \text{Ac}(5) - \text{Ac}(239) \quad \cdots (\text{マチンの公式})$$

$$(M2) \quad \pi/4 = \text{Ac}(2) + \text{Ac}(3)$$

$$(M3) \quad \pi/4 = 2 \text{Ac}(2) - \text{Ac}(7)$$

$$(M4) \quad \pi/4 = 2 \text{Ac}(3) + \text{Ac}(7)$$

$$(M5) \quad \pi/4 = 3 \text{Ac}(4) + \text{Ac}(20) + \text{Ac}(1985)$$

長いこと このうちの (M1) だけが「マチンの公式」と呼ばれ, (M2) はオイラー (1738) (Leonhard Euler ; 1707–1783), (M3) はヘルマン (1706) (Jakob Hermann ; 1678–1733), (M4) はハットン (1776) (Charles Hutton ; 1737–1823) に帰せられていました (今でもそのまま昔の間違いを踏襲している著者は多いです). そのうちの一つで, (M2) $\pi/4 = \text{Ac}(2) + \text{Ac}(3)$ を $\text{Ac}(1) = \text{Ac}(2) + \text{Ac}(3)$ と書き直し, さらにこれを, フィボナッチ数 F_n を使って, $\text{Ac}(F_2) = \text{Ac}(F_3) + \text{Ac}(F_4)$ と書き直した人がいます. そして これを一般化して,

$$\text{Ac}(F_{2n}) = \text{Ac}(F_{2n+1}) + \text{Ac}(F_{2n+2}) \cdots (*)$$

というきれいな公式を見つけました. これをコタンジェントの加法定理で証明し, その後で, 図形的に証明します.

(証明1) コタンジェントの加法定理は次の通り: $\cot(\alpha + \beta) = (\cot \alpha \cot \beta - 1) / (\cot \alpha + \cot \beta)$.

$\alpha = \text{Ac}(F_{2n+1})$, $\beta = \text{Ac}(F_{2n+2})$ とおくと, $\cot \alpha = F_{2n+1}$, $\cot \beta = F_{2n+2}$.

$\therefore \cot(\alpha + \beta) = (F_{2n+1} F_{2n+2} - 1) / (F_{2n+1} + F_{2n+2}) = (F_{2n+1} F_{2n+2} - 1) / F_{2n+3}$.

ところで $F_{2n} F_{2n+3} = (F_{2n+2} - F_{2n+1})(F_{2n+1} + F_{2n+2}) = F_{2n+2}^2 - F_{2n+1}^2$.

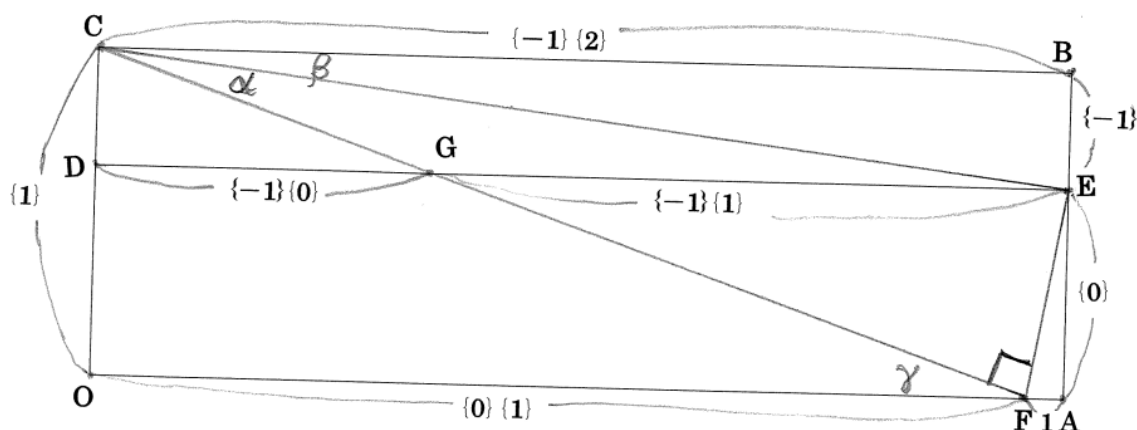
カッシーニ=シムソンの定理より, $F_{2n+2}^2 = F_{2n+1} F_{2n+3} - 1$ なので, 代入して,

$F_{2n} F_{2n+3} = (F_{2n+1} F_{2n+3} - 1) - F_{2n+1}^2 = F_{2n+1}(F_{2n+3} - F_{2n+1}) - 1$

$= F_{2n+1} F_{2n+2} - 1$. よって, $\cot(\alpha + \beta) = F_{2n} F_{2n+3} / F_{2n+3} = F_{2n}$.

すなわち, $\text{Ac}(F_{2n}) = \alpha + \beta = \text{Ac}(F_{2n+1}) + \text{Ac}(F_{2n+2})$. (証明終)

★ $F_{2n+k} = \{k\}$ と略記



(証明2) 簡単のために $F_{2n+k} = \{k\}$ と略記する. 8つの点を $O(0,0)$, $A(-1\{2\},0)$, $B(-1\{2\},\{1\})$, $C(0,\{1\})$, $D(0,\{0\})$, $E(-1\{2\},\{0\})$, $F(\{0\}\{1\},0)$, $G(-1\{0\},\{0\})$ とする. $\alpha = \text{Ac}(\{1\})$, $\beta = \text{Ac}(\{2\})$, $\gamma = \text{Ac}(\{0\})$ とおくと, $\angle BCE = \beta$, $\angle CGD = \angle CFO = \gamma$ は明らかである. また, $OA \parallel DG$ より, $DG : OF = CD : CO$ だから, $DG = -1\{0\}$. $\therefore GE = DE - DG = -1\{1\}$.

ここで $CF^2 = CO^2 + OF^2 = \{1\}^2 + \{0\}^2 = \{1\}^2 = \{1\}^2 \{0\}^2 + 1$. また $EF^2 = FA^2 + AE^2$

$=\{0\}^2+1$ なので, $CF^2+EF^2=(\{1\}^2+1)(\{0\}^2+1)$. ところで, カッシーニ=シムソンの
 定理より, $\{1\}^2+1=\{-1\}\{3\}$, $\{0\}^2+1=\{-1\}\{1\}$ だから, $CF^2+EF^2=(\{1\}^2+1)(\{0\}^2+1)$
 $=\{-1\}^2\{1\}\{3\}$. 一方, $CE^2=(\{-1\}\{2\})^2+(\{-1\})^2=(\{-1\})^2((\{2\})^2+1)=\{-1\}^2\{1\}\{3\}$.
 $=CF^2+EF^2$. したがって, $\angle CFE=90^\circ$ となる. よって $\angle ECA=\text{Ac}(CF/EF)=\text{Ac}(\{1\})$
 $=\alpha$. $\therefore \alpha+\beta=\angle BCE+\angle ECF=\angle BCE+\angle ECG=\angle CGD=\text{Ac}(GD/CD)=\text{Ac}(\{0\})=\gamma$.
 これは (*) 式そのものである. (証明終)

(*) が得られれば, n に順に $1, 2, 3, \dots$ を代入して,

$$\begin{aligned}
 \pi/4 &= \text{Ac}(1) = \text{Ac}(F_2) = \text{Ac}(F_3) + \text{Ac}(F_4) = \text{Ac}(F_3) + \text{Ac}(F_5) + \text{Ac}(F_6) \\
 &= \text{Ac}(F_3) + \text{Ac}(F_5) + \text{Ac}(F_7) + \text{Ac}(F_8) = \text{Ac}(F_3) + \text{Ac}(F_5) + \text{Ac}(F_7) + \text{Ac}(F_9) \\
 &\quad + \text{Ac}(F_{10}) = \dots
 \end{aligned}$$

と変形して, 各式の最後の $\text{Ac}(F_{2n})$ を $\text{Ac}(F_{2n+1}) + \text{Ac}(F_{2n+2})$ で置き換えて行
 き, 最後に極限值を取ることによって, レーマー公式が得られるのです:

$$\pi/4 = \text{Ac}(F_3) + \text{Ac}(F_5) + \text{Ac}(F_7) + \text{Ac}(F_9) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Ac}(F_{2n+1}).$$

REFERENCE

- [1] Fibonacci numbers from the solution to an integral equation, (solution by Russ Gordon,
 to the problem 1217 ; proposed by Eugen Ionascu) ; The College Mathematics Journal,
 vol.54, No.2, pp.150–152, 2023)
 [2] Rex H. Wu ; A Visual Proof of Lehmer's Arctangent Sum, ; Mathematics Magazine,
 vol.96, No.5, pp.537–539, 2023)

《付論》

大塚秀幸さんは, 上記の公式 $\text{Ac}(F_{2n}) = \text{Ac}(F_{2n+1}) + \text{Ac}(F_{2n+2}) \dots (*)$ を使って次
 のきれいな公式を見つけ, Fibonacci Quarterly の Elementary Problem に提出しました:

$$\pi^2/8 = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Ac}(F_n) \text{Ac}(F_{n+1}) \dots (**).$$

(証明) $f_n = \text{Ac}(F_n)$ と書くと, (*) より $f_{2n} = f_{2n+1} + f_{2n+2}$ だから,

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{n=1}^m \{ (f_{2n+1} + f_{2n+2}) f_{2n+2} - f_{2n} (f_{2n} - f_{2n+1}) \} \\
 &= \sum_{n=1}^m (f_{2n+1} f_{2n+2} + f_{2n} f_{2n+1}) + \sum_{n=1}^m (f_{2n+2}^2 - f_{2n}^2) \\
 &= \sum_{n=2}^{2m+1} f_n f_{n+1} + f_{2m+2}^2 - f_2^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{2m+1} f_n f_{n+1} - f_1 f_2 + f_{2m+2}^2 - f_2^2. \\
 &= \sum_{n=1}^{2m+1} f_n f_{n+1} + f_{2m+2}^2 - 2\pi^2/16.
 \end{aligned}$$

ところで, $f_1 = f_2 = \pi/4$, $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m+2} = 0$ なので,

$$\pi^2/8 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n f_{n+1}. \quad \square$$