

日本フィボナッチ協会 第**23**回研究集会報告書

2025年8月

日本フィボナッチ協会

フィボナッチ数と初等整数論に関心のある皆様へ

第23回日本フィボナッチ研究集会

2025年8月22日に東京理科大学で開催された表記研究集会の発表論文(11名分)を掲載します。昨年度から片山が大関清太代表から代表を引き継いでおりますが、今回の研究集会は、完全数が飯高先生と梶田君、宮路君の発表は、松田先生の指導、東京高専の田中の発表は、南出さんと中川さんの指導、またカプレカ数は、徳島グループで、協会のメンバーと若い世代が協力する形での発表が多く印象的でした。これも中村代表、大関代表が守ってこられた日本フィボナッチ研究集会の成果の一つだと思います。

今回集会で発表された方、参加いただいた方、本当に有難うございました。皆様のご協力のおかげで集会は、盛況でした。今後ともこのユニークな研究集会の発展のために皆様のご協力をお願い申し上げます。

最後に今年も会場準備などで、東京理科大の秋山仁先生および理科大職員の皆様には大変お世話になりました。この場を借りて御礼申し上げます。

日本フィボナッチ協会代表 片山 真一

日本フィボナッチ協会／第23回研究集会 プログラム

日 時 2025年8月22日(金曜日) 9時55分～17時00分
場 所 東京理科大学(神楽坂校舎) 2号館4階の241・242教室
アクセス 飯田橋駅(JR総武線, 東京メトロ東西線, 有楽町線, 南北線,
都営大江戸線) 徒歩5分
参加費 1000円(中学生・高校生・高専生は無料) 主催: 日本フィボナッチ協会
協賛: 東京理科大学理数教育研究センター

9:55 開会の辞(片山 真一)

第1セッション(座長: 中村滋)

10:00 飯高 茂(元学習院大学)「完全数 2.0」

10:30 梶田 光(Crimson Global Academy)「第三種オイラー超完全数のダブルB型解について」

11:00 宮路 伶音(津山高専)、松田 修(津山高専)「 n 次元弱ヘロン三角錐の研究」

昼休み(11:30～13:00)

数学体験館の案内) 五感を使って数学の理論を実体験できる施設です。入り口で受け付けの手続きをしてくださいます。

場所: 東京理科大学 近代科学資料館 地下1階 (問い合わせ: 03-5228-7411)

第2セッション(座長: 飯高 茂)

13:00 岩淵 勇樹「黄金比と床関数・天井関数の合成写像が満たす恒等式について」

13:20 片山 真一(徳島大学)「ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数」

13:40 阿部 靖史、成松 悠汰、米崎 聖梧(富岡西高校)「第2カプレカ数の可能性」

14:00 中西 真悟(大阪工業大学)「Ladder and matrix calculations for various sequences」

休憩(14:30～15:00)

第3セッション(座長: 大関清太)

15:00 田中 璃久(東京高専)「 $|\sum_{k=1}^n \omega^k F_k|$ の明示公式について」

15:30 渋谷 元樹(北見工業大学)「Some remarks on Faulhaber-type formulas, Lucas and Fibonacci polynomials」

15:50 加隈 弘晃(開智日本橋中学・高等学校)「フィボナッチ数を係数にもつ多項式の零点の配置と既約性について」

16:20 中村 滋「フィボナッチ数の逆数和について」

16:40 事務連絡(片山 真一)

16:45 閉会の辞(アンケート回収)

完全数 2.0 の発見

飯高 茂 (東京多摩放送大学学習センター, 学生)

2025 年 8 月 23 日

1 はじめに

与えられた 整数 m に対して $\sigma(a) - 2a = -m$ を満たす a を平行移動 m の完全数と言いこれを求めてみよう.

$m = 0$ のときの完全数を代表に興味ある計算例が数多く出る.

表 1: 平行移動 m の完全数

a	素因数分解	$B = \sigma(a)$	素因数分解
m= -12			
24	$2^3 * 3$	60	$2^2 * 3 * 5$
54	$2 * 3^3$	120	$2^3 * 3 * 5$
30	$2 * 3 * 5$	72	$2^3 * 3^2$
42	$2 * 3 * 7$	96	$2^5 * 3$
66	$2 * 3 * 11$	144	$2^4 * 3^2$
78	$2 * 3 * 13$	168	$2^3 * 3 * 7$
102	$2 * 3 * 17$	216	$2^3 * 3^3$
114	$2 * 3 * 19$	240	$2^4 * 3 * 5$

関数 $\sigma(a)$ をはじめて取り上げたのはインドの数学者
で $\sigma(a) - 2a = -m$ を満たす数 a を超完全数と定義した
そして解 a が偶数の場合は a は m のべきになり 実際にそれが完全数の a のべき因子になる
ことを示した

表 2: ダブルシグマ完全数

a	素因数分解	$B = \sigma(a)$	素因数分解
m= 0			
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127
4096	2^{12}	8191	8191
65536	2^{16}	131071	131071
262144	2^{18}	524287	524287
m= -1			
3	3	4	2^2
7	7	8	2^3
31	31	32	2^5
127	127	128	2^7
8191	8191	8192	2^{13}
131071	131071	131072	2^{17}

$m = 0$ で a が偶数の時 a は 2 べきで $B = 2a - 1$ はメルセンヌ素数.(Suryanarayana の定理)

$m = -1$

$\sigma^2(a) - 2a = 1$ を 満たす解は B :偶数なら $B = 2^e$, a はメルセンヌ素数となるに違いない.(これは予想である.)

いろいろな m について $\sigma^2(a) - 2a = -m$ の解を計算し興味ある解を探すことにした. その結果

$m = -14$ すなわち $\sigma^2(a) - 2a = 14$ の場合は解が簡単で美しいことがわかった.

14 が大切な役を果たすのが不思議な気がする. $14 = 2 + 2 * 6$ によって 完全数 6 が出てくるのが理由かもしれない.

の解

ここで解 は素数である これをもとに上の表を参考にして 素
数 と仮定する も仮定する を満たす
したがって はスーパー双子素数 を定めている
を満たす スーパー双子素数から の解が出来ているという
事実には圧倒される

表 3: ダブルシグマ完全数, $m = -14$ の解

a	素因数分解	$B = \sigma(a)$	素因数分解
23	23	24	$2^3 * 3$
53	53	54	$2 * 3^3$
29	29	30	$2 * 3 * 5$
41	41	42	$2 * 3 * 7$
101	101	102	$2 * 3 * 17$
113	113	114	$2 * 3 * 19$
137	137	138	$2 * 3 * 23$
173	173	174	$2 * 3 * 29$
257	257	258	$2 * 3 * 43$
281	281	282	$2 * 3 * 47$
317	317	318	$2 * 3 * 53$
353	353	354	$2 * 3 * 59$
401	401	402	$2 * 3 * 67$

これを確認しよう.

$\sigma(a) = p + 1 = 6Q$ によって $\sigma^2(a) = 12(Q + 1)$ となる.

$\sigma^2(a) - 2a = 12(Q + 1) - 2p = 12(Q + 1) - 2(6Q - 1) = 14$

これより $\sigma^2(a) - 2a = 14$ になる.

$a = p = 6Q - 1$ を満たすとき $a = p$ が解になる.

解の表にある解 $p = 23, 53$ については, $p + 1 = 24 = 3 * 8, p + 1 = 54 = 2 * 27$ になり $p + 1 = 6Q$ とおくと, Q は素数にならない.

$B = 2^3 * 3, 2 * 3^3$ に対応する解 が解になるがこれら $2^2, 3^2$ は擬素数なので何とか意味をつけることができる.

以上では, $p = 6Q - 1$ 満たす素数 (p, Q) から $a = p$ として解ができることを確認した. 本当のところ, この逆, すなわち $\sigma^2(a) - 2a = 14$ の解を理論的に求めたい.

しかしこれは難しい課題なのでいくつかの仮定をおく.

1) a は素数 p と仮定する.

$R = \sigma(a) = n + 1$ になる $n + 1$ は偶数なので $\exists e R \ (e \geq 0 \wedge \forall R)$ と書ける

とおくと は

を仮定すると も成り立つ

よって は の倍数 とおく

は で割れないと仮定する
となるので は素数
において がスーパー双子素数

しかし, $B = 6S$ 以外の B は $2^3 * 3, 2 * 3^5$
このとき $a = 23, 53$ という素数解になる.

$m = -58$ の場合の計算の結果.

表 4: ダブルシグマ完全数 ; $\sigma^2(a) - 2a = 58$ の解

a	素因数分解	$B = \sigma(a)$	素因数分解
$m = -58$			
33	$3 * 11$	48	$2^4 * 3$
223	223	224	$2^5 * 7$
83	83	84	$2^2 * 3 * 7$
139	139	140	$2^2 * 5 * 7$
307	307	308	$2^2 * 7 * 11$
643	643	644	$2^2 * 7 * 23$
811	811	812	$2^2 * 7 * 29$
1483	1483	1484	$2^2 * 7 * 53$
1987	1987	1988	$2^2 * 7 * 71$
3163	3163	3164	$2^2 * 7 * 113$

素数解 $a = p$ があるとき, $\sigma(a) = B = p + 1$.

上の表を見て, $B = p + 1 = 28Q$ と素数 Q で書いてみる.

$\sigma^2(a) = \sigma(B) = \sigma(28Q) = 56(Q + 1)$.

$\sigma^2(a) - 2a = 56(Q + 1) - 2(28Q - 1) = 58$ となる.

これ以外の解は, $33 = 3 * 11, 223$ だけらしい. それぞれパートナは $B = 2^4 * 3, 2^5 * 7$
 $B = 2 * 7^2$ に対応する解があるか. これが問題である.

4 究極の課題

一般に完全数の場合を考える.

k を完全数として, $m = -2k - 2$ とおく.

$\sigma^2(a) - 2a = -m = 2k + 2$ の解を構成する.

$a = p$ は素数として $B = \sigma(a) = p + 1 = kQ$ と完全数 k を用いて書ける素数 $Q > 2$ があるとする.

ここで k, Q は互いに素と仮定する. $m = -2k - 2$ とおく.

$\sigma^2(a) = \sigma(B) = \sigma(kQ) = 2k(Q + 1)$.

$$\sigma^2(a) - 2a = 2k(Q + 1) - 2p = 2k(Q + 1) - 2(kQ - 1) = 2k + 2$$

完全数 k に対して $p = kQ - 1$ が素数になる素数 Q があれば $a = p$ が $\sigma^2(a) - 2a = -m$ の解になる. これらの解を通常解とする.

これ以外の解は極めて少ないが, 擬素数解にあたるもの以外にあるかどうかは不明.

完全数は $\sigma(k) - 2k = 0$ の解であるが, $\sigma^2(a) - 2a = 2k + 2$ の解がスーパー双子素数で得られるのはいかにも美しい結果である.

しかし数学的な証明をつけることはいかにも難しそうである.

これらの結果を得たのは 2024 年 11 月 6 日で, 米国大統領選挙の開票結果が逐一放送される最中であった.

私は選挙の結果に比べて私のえた完全数の結果は比類なき成果であると思った.

そこで k を完全数とするとき $\sigma^2(a) - 2a = 2k + 2$ の解を完全数 2.0 と呼ぶことにした.

実は古典的完全数でも類似の結果がある.

$\sigma(a) - 2a = 2k$ の解には k と素なる素数 p との積がある.

$\sigma^2(a) - 2a = 2k + 2$ の解は $a = p$: 素数で $B = kQ$, $p = kQ - 1$ が素数になる素数 p が通常解になる.

私は定年後若い方々とはじめて完全数研究のたどり着いた最高の到達点と言えるのはないか.

と高揚感丸出しの文章を書いたところで既存研究との関連を調べねばいけないと思いインターネットの整数列大辞典 (OEIS) で $k = 6; m = -14$ のときの数列

を入れて検索すると番号 がついた数列であるということがわかった
これらは を満たす素数 の列であった 年の
の論文があった

第 3,4 完全数 $k = 496, 8128$ について解をパソコンで求めた.

表 5: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 2a = 496 * 2 + 2$ の解

a	素因数分解	$B = \sigma(a)$	素因数分解
2743	$13 * 211$	2968	$2^3 * 7 * 53$
3661	$7 * 523$	4192	$2^5 * 131$
p	素因数分解	$B = p + 1$	$496 * Q$
1487	1487	1488	$2^4 * 31 * 3$
8431	8431	8432	$2^4 * 31 * 17$
23311	23311	23312	$2^4 * 31 * 47$
97711	97711	97712	$2^4 * 31 * 197$
118543	118543	118544	$2^4 * 31 * 239$
130447	130447	130448	$2^4 * 31 * 263$
157231	157231	157232	$2^4 * 31 * 317$
189967	189967	189968	$2^4 * 31 * 383$

$p = 496Q - 1$ は双子素数.

表 6: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 2a = 8128 * 2 + 2$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
49471	$61 * 811$	50344	$2^3 * 7 * 29 * 31$
112951	112951	112952	$2^3 * 7 * 2017$
1243807	1243807	1243808	$2^5 * 47 * 827$
p	素因数分解	$B = p + 1$	$8128 * Q$
40639	40639	40640	$2^6 * 5 * 127$
430783	430783	430784	$2^6 * 53 * 127$
723391	723391	723392	$2^6 * 89 * 127$
820927	820927	820928	$2^6 * 101 * 127$
723391	723391	723392	$2^6 * 89 * 127$
820927	820927	820928	$2^6 * 101 * 127$
1893823	1893823	1893824	$2^6 * 127 * 233$
2381503	2381503	2381504	$2^6 * 127 * 293$

$p = 8128Q - 1$ は双子素数.

5 $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

定数 $C > 1$ を定めて, 平行移動 m に対して $\sigma^2(a) - Ca = -m$ を満たす a を 平行移動 m のダブル σ 完全数という.

$C = 3$ を扱う. 3 倍積完全数に対応する.

$B = \sigma(a)$ を完全数のパートナという.

m をいろいろ変化させると多くの解が多数ある場合が次々と発見された.

表 7: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
m= -18			
14	$2 * 7$	24	$2^3 * 3$
34	$2 * 17$	54	$2 * 3^3$
26	$2 * 13$	42	$2 * 3 * 7$
74	$2 * 37$	114	$2 * 3 * 19$
122	$2 * 61$	186	$2 * 3 * 31$
146	$2 * 73$	222	$2 * 3 * 37$
314	$2 * 157$	474	$2 * 3 * 79$
386	$2 * 193$	582	$2 * 3 * 97$
554	$2 * 277$	834	$2 * 3 * 139$
626	$2 * 313$	942	$2 * 3 * 157$

第二ブロックの解に注目する.
 $a = 2p, B = 6Q, (Q > 3, 3 \nmid Q)$ と素数 Q で書けている.
 $B = \sigma(a) = 3(p + 1), B = 6Q$ と $3(p + 1) = 6Q$ により $p = 2Q - 1$.
 $\sigma(B) = 12(Q + 1). a = 2p = (12Q - 2)$ になり

$$\sigma^2(a) - 3a = 18 = -m.$$

次に第 1 ブロックに注目する.
最初の解は $a = 2 * 7$ なので $B = \sigma(a) = 3 * 8 = 24$.
 $\sigma^2(a) = \sigma(B) = \sigma(3 * 8) = 4 * 15 = 60$.

$$\sigma^2(a) - 3a = 60 - 3 * 2 * 7 = 42 = 18 = -m.$$

次の解は $a = 34$.
こうしてやればこれらが $a = 2p, B = 2 * 3 * Q; (Q > 5 : \text{素数})$ が解であることは容易にわかる.
しかしこれらしかないことの証明は極めて難しい. この難しさにこそ完全数の一般化の存在意義がある
オイラーだって偶数完全数しかできなかった

仮定 解は素数 の 2 倍 を仮定
は正しい が条件式
は偶数なので と書ける
仮定 と奇数 で書けると仮定する
ついでに は と互いに素まで仮定する
となり
なので ゆえに

$\sigma(R) = R + 1$; R は素数になる.

表 8: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -36$ (第一ブロック)			
28	$2^2 * 7$	56	$2^3 * 7$
388	$2^2 * 97$	686	$2 * 7^3$
20	$2^2 * 5$	42	$2 * 7 * 3$
148	$2^2 * 37$	266	$2 * 7 * 19$
244	$2^2 * 61$	434	$2 * 7 * 31$
292	$2^2 * 73$	518	$2 * 7 * 37$
628	$2^2 * 157$	1106	$2 * 7 * 79$
772	$2^2 * 193$	1358	$2 * 7 * 97$
1108	$2^2 * 277$	1946	$2 * 7 * 139$

$B = \sigma(a), \sigma(B) - 3a = 36$ が定義式.

第二ブロックの解に注目する.

表によると $a = 4p, B = 14Q$ と素数, p, Q で書けている.

1. 仮定. 解は素数 p の 4 倍 $a = 4p$ を仮定.

$B = \sigma(4p) = 7(p+1)$ は正しい, $\sigma(B) - 12p = 36$ が条件式.

$p+1$ は偶数なので $p+1 = 2R$ と書ける.

2. 仮定. $p+1 = 2R$ と奇数 R で書けると仮定する. $B = \sigma(4p) = 14R$ が成り立つ.

ついでに R は 14 と互いに素まで仮定する.

$\sigma(B) = \sigma(14)\sigma(R) = 24\sigma(R)$ となり

$\sigma(B) = 12p + 36$ なので, $12p + 36 = 12p + 36 = 12(2R - 1) + 36 = 24R + 24$. ゆえに

$\sigma(R) = R + 1$; R は素数になる.

表 9: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -75$			
171	$3^2 * 19$	260	$2^2 * 5 * 13$
479	479	480	$2^5 * 3 * 5$
95	$5 * 19$	120	$2^3 * 3 * 5$
215	$5 * 43$	264	$2^3 * 3 * 11$
335	$5 * 67$	408	$2^3 * 3 * 17$
815	$5 * 163$	984	$2^3 * 3 * 41$
1055	$5 * 211$	1272	$2^3 * 3 * 53$
1415	$5 * 283$	1704	$2^3 * 3 * 71$
1655	$5 * 331$	1992	$2^3 * 3 * 83$
2615	$5 * 523$	3144	$2^3 * 3 * 131$
2735	$5 * 547$	3288	$2^3 * 3 * 137$
3455	$5 * 691$	4152	$2^3 * 3 * 173$
3935	$5 * 787$	4728	$2^3 * 3 * 197$

定義式を書き直す.

$B = \sigma(a), \sigma(B) - 3a = 75$

第 2 ブロックの解では $a = 5p, B = 24Q$ が素数 p, Q で成り立つ.

1. 仮定. 解は素数 p の 5 倍 $a = 5p$ を仮定.

$B = \sigma(5p) = 6(p + 1)$ は正しい, $\sigma(B) - 15p = 75$ が条件式.

$p + 1$ は偶数なので $p + 1 = 2R$ と書ける.

2. 仮定. $p + 1 = 2R$ と奇数 R で書けると仮定する. $B = \sigma(4p) = 14R$ が成り立つ.

ついでに R は 14 と互いに素まで仮定する.

1. 仮定. 解は素数 p の 5 倍 $a = 5p$ を仮定.

$B = \sigma(5p) = 6(p + 1)$ は正しい, $\sigma(B) - 18p = 75$ が条件式.

$p + 1$ は偶数なので $p + 1 = 2R$ と書ける.

しかし, 数表をみると $p = 19, p + 1 = 20 = 4 * 5$ 等が並ぶので $p + 1 = 4R$ を仮定する.

$n + 1$ は偶数なので $n + 1 = 2R$ と書ける.

しかし 数表をみると $\qquad \qquad \qquad$ 等が並ぶので $\qquad \qquad \qquad$ を仮定する
仮定 $\qquad \qquad \qquad$ と奇数 $\qquad \qquad \qquad$ で書けると仮定する $\qquad \qquad \qquad$ が

成り立つ

ついでに \qquad は \qquad と互いに素まで仮定する
 $\qquad \qquad \qquad$ となる

なので

は素数になる

表 10: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -99$			
959	$7 * 137$	1104	$2^4 * 3 * 23$
2687	2687	2688	$2^7 * 3 * 7$
2527	$7 * 19^2$	3048	$2^3 * 3 * 127$
2827	$11 * 257$	3096	$2^3 * 3^2 * 43$
87	$3 * 29$	120	$2^3 * 3 * 5$
327	$3 * 109$	440	$2^3 * 5 * 11$
687	$3 * 229$	920	$2^3 * 5 * 23$
1227	$3 * 409$	1640	$2^3 * 5 * 41$
2127	$3 * 709$	2840	$2^3 * 5 * 71$
2487	$3 * 829$	3320	$2^3 * 5 * 83$
3027	$3 * 1009$	4040	$2^3 * 5 * 101$

$$a = 3p, B = 40Q$$

表 11: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
m= -144			
112	$2^4 * 7$	248	$2^3 * 31$
80	$2^4 * 5$	186	$2 * 3 * 31$
208	$2^4 * 13$	434	$2 * 7 * 31$
592	$2^4 * 37$	1178	$2 * 19 * 31$
1168	$2^4 * 73$	2294	$2 * 31 * 37$
2512	$2^4 * 157$	4898	$2 * 31 * 79$
3088	$2^4 * 193$	6014	$2 * 31 * 97$
4432	$2^4 * 277$	8618	$2 * 31 * 139$

$$a = 16p, B = 62Q$$

6 $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

定数 $C > 1$ を定めて, 平行移動 m に対して $\sigma^2(a) - Ca = -m$ を満たす a を 平行移動 m のダブル σ 完全数という.

$C = 3$ を扱う. 3 倍積完全数に対応する.

$B = \sigma(a)$ を完全数のパートナという.

m をいろいろ変化させると多くの解が多数ある場合が次々と発見された.

$\sigma(R) = R + 1$; R は素数になる.

表 13: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -36$ (第一ブロック)			
28	$2^2 * 7$	56	$2^3 * 7$
388	$2^2 * 97$	686	$2 * 7^3$
20	$2^2 * 5$	42	$2 * 7 * 3$
148	$2^2 * 37$	266	$2 * 7 * 19$
244	$2^2 * 61$	434	$2 * 7 * 31$
292	$2^2 * 73$	518	$2 * 7 * 37$
628	$2^2 * 157$	1106	$2 * 7 * 79$
772	$2^2 * 193$	1358	$2 * 7 * 97$
1108	$2^2 * 277$	1946	$2 * 7 * 139$

$B = \sigma(a), \sigma(B) - 3a = 36$ が定義式.

第二ブロックの解に注目する.

表によると $a = 4p, B = 14Q$ と素数, p, Q で書けている.

1. 仮定. 解は素数 p の 4 倍 $a = 4p$ を仮定.

$B = \sigma(4p) = 7(p+1)$ は正しい, $\sigma(B) - 12p = 36$ が条件式.

$p+1$ は偶数なので $p+1 = 2R$ と書ける.

2. 仮定. $p+1 = 2R$ と奇数 R で書けると仮定する. $B = \sigma(4p) = 14R$ が成り立つ.

ついでに R は 14 と互いに素まで仮定する.

$\sigma(B) = \sigma(14)\sigma(R) = 24\sigma(R)$ となり

$\sigma(B) = 12p + 36$ なので, $12p + 36 = 12p + 36 = 12(2R - 1) + 36 = 24R + 24$. ゆえに

$\sigma(R) = R + 1$; R は素数になる.

表 14: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -75$			
171	$3^2 * 19$	260	$2^2 * 5 * 13$
479	479	480	$2^5 * 3 * 5$
95	$5 * 19$	120	$2^3 * 3 * 5$
215	$5 * 43$	264	$2^3 * 3 * 11$
335	$5 * 67$	408	$2^3 * 3 * 17$
815	$5 * 163$	984	$2^3 * 3 * 41$
1055	$5 * 211$	1272	$2^3 * 3 * 53$
1415	$5 * 283$	1704	$2^3 * 3 * 71$
1655	$5 * 331$	1992	$2^3 * 3 * 83$
2615	$5 * 523$	3144	$2^3 * 3 * 131$
2735	$5 * 547$	3288	$2^3 * 3 * 137$
3455	$5 * 691$	4152	$2^3 * 3 * 173$
3935	$5 * 787$	4728	$2^3 * 3 * 197$

定義式を書き直す.

$$B = \sigma(a), \sigma(B) - 3a = 75$$

第 2 ブロックの解では $a = 5p, B = 24Q$ が素数 p, Q で成り立つ.

1. 仮定. 解は素数 p の 5 倍 $a = 5p$ を仮定.

$$B = \sigma(5p) = 6(p+1) \text{ は正しい, } \sigma(B) - 15p = 75 \text{ が条件式.}$$

$p+1$ は偶数なので $p+1 = 2R$ と書ける.

2. 仮定. $p+1 = 2R$ と奇数 R で書けると仮定する. $B = \sigma(4p) = 14R$ が成り立つ.
ついでに R は 14 と互いに素まで仮定する.

1. 仮定. 解は素数 p の 5 倍 $a = 5p$ を仮定.

$$B = \sigma(5p) = 6(p+1) \text{ は正しい, } \sigma(B) - 18p = 75 \text{ が条件式.}$$

$p+1$ は偶数なので $p+1 = 2R$ と書ける.

しかし, 数表をみると $p = 19, p+1 = 20 = 4 * 5$ 等が並ぶので $p+1 = 4R$ を仮定する.

$n+1$ は偶数なので $n+1 = 2R$ と書ける.

しかし 数表をみると $p+1 = 20 = 4 * 5$ 等が並ぶので $p+1 = 4R$ を仮定する
仮定 $p+1 = 4R$ と奇数 R で書けると仮定する R が

成り立つ

ついでに R は 14 と互いに素まで仮定する
となる

なので

は素数になる

表 15: Double sigma ; $\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -99$			
959	$7 * 137$	1104	$2^4 * 3 * 23$
2687	2687	2688	$2^7 * 3 * 7$
2527	$7 * 19^2$	3048	$2^3 * 3 * 127$
2827	$11 * 257$	3096	$2^3 * 3^2 * 43$
87	$3 * 29$	120	$2^3 * 3 * 5$
327	$3 * 109$	440	$2^3 * 5 * 11$
687	$3 * 229$	920	$2^3 * 5 * 23$
1227	$3 * 409$	1640	$2^3 * 5 * 41$
2127	$3 * 709$	2840	$2^3 * 5 * 71$
2487	$3 * 829$	3320	$2^3 * 5 * 83$
3027	$3 * 1009$	4040	$2^3 * 5 * 101$

$$a = 3p, B = 40Q$$

参考文献

- [1] 飯高 茂 『数学の研究をはじめよう I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX』, 現代数学社, 2016,2017,2018,2020,2021,2023,2024.
- [2] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1

第三種オイラー超完全数のダブル B 型解について

梶田光

2025/08/22

1. はじめに

宮本 (2023) は第三種オイラー超完全数を, 以下の連立方程式の解と定めた:

$$\begin{cases} \bar{h}A = 2h\varphi(a) + \bar{h}m + \bar{h}, \\ \varphi(A) = a + m \end{cases}$$

なお, 慣例で $n-1$ のことを \bar{n} と書き, h は奇素数, m は一般の(負になりうる)整数を表す.

この方程式は $a = h \cdot 2^e, A = h \cdot 2^e + m + 1$ の形の解を持つように設計されている.

しかし, オイラー関数は複雑な関数であるから, 上の形以外の解も存在する.

そこで, そのような例外解が発生する条件や例外解の性質などを調べる研究が発展してきた.

2. ダブル B 型解

宮本 (2025) は特定の h や m について, ダブル B 型解と呼ばれる解の構造が現れることを発見し, その特定の h, m について解を特定した.

ここで, ダブル B 型解とは, ある正整数の定数 α, β について, $a = \alpha p, A = \beta q$ (p, q : prime, $(\alpha, p) = (\beta, q) = 1$) と書ける解が 2 個以上存在することを言う.

下は宮本 (2025) が計算した解の中で典型的なダブル B 型解のみを抜き出した表である (したがってこれらがそれぞれの h, m の解をすべて列挙しているわけではない):

$h = 3, m = -22$	
a	A
$2 \cdot 23$	$3^2 \cdot 5$
$2 \cdot 29$	$3^2 \cdot 7$
$2 \cdot 41$	$3^2 \cdot 11$
$2 \cdot 47$	$3^2 \cdot 13$
$2 \cdot 59$	$3^2 \cdot 17$
$2 \cdot 101$	$3^2 \cdot 31$
$2 \cdot 131$	$3^2 \cdot 41$
$2 \cdot 137$	$3^2 \cdot 43$
$2 \cdot 149$	$3^2 \cdot 47$

$h = 3, m = -19$	
a	A
67	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
139	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$
163	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$
211	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$
283	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 23$
379	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 31$
499	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 41$
523	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 43$
571	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 47$

$h = 3, m = -9$	
a	A
$3 \cdot 7$	$2^2 \cdot 7$
$3 \cdot 11$	$2^2 \cdot 13$
$3 \cdot 23$	$2^2 \cdot 31$
$3 \cdot 31$	$2^2 \cdot 43$
$3 \cdot 43$	$2^2 \cdot 61$
$3 \cdot 47$	$2^2 \cdot 67$
$3 \cdot 67$	$2^2 \cdot 97$
$3 \cdot 71$	$2^2 \cdot 103$
$3 \cdot 103$	$2^2 \cdot 151$

補題 2.1: ダブル B 型解の係数 α, β は $\frac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\bar{h}}{2h}$ を満たす.

Proof: 今, $(a, A) = (\alpha p_0, \beta q_0), (\alpha p_1, \beta q_1)$ がどちらも解であると仮定する. (ただし, $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$ はすべて素数で, $(\alpha, p_0) = (\alpha, p_1) = (\beta, q_0) = (\beta, q_1) = 1$ と仮定する.)

さて, p_0, p_1 をまとめて p , q_0, q_1 をまとめて q と書くと, 下の p と q に関する連立一次方程式は 2 つ以上の解を持つ:

$$\begin{cases} \bar{h}\beta q = 2h\varphi(\alpha)\bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} \\ \varphi(\beta)\bar{q} = \alpha p + m \end{cases}$$

したがって, その係数行列 $\begin{pmatrix} \bar{h}\beta & -2h\varphi(\alpha) \\ \varphi(\beta) & -\alpha \end{pmatrix}$ の行列式 $-\bar{h}\alpha\beta + 2h\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ は 0 に等しい.

$$\text{よって } \frac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\bar{h}}{2h}.$$

■

さて, これが α, β について何を意味するのか考える.

実は筆者の考案した φ^k 同値の論文の中で証明されている補題を利用すると, ここから即座に $\text{rad}(\alpha)\text{rad}(\beta) = 2h$ が言える (ここで $\text{rad}(n)$ は n の根基, radical を表す.)

しかし, 今回はより直感的な理解のため, その補題の限定されたものを利用し, $\text{rad}(\alpha)\text{rad}(\beta) = 2h$ を証明してみる.

補題 2.2: 正整数 α, β に対して $\frac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\bar{h}}{2h}$ ならば, $\text{rad}(\alpha)\text{rad}(\beta) = 2h$.

Proof: $X = \text{rad}(\alpha)\text{rad}(\beta)$ とおく.

このとき, 補助関数 $\varphi'(n) := n \prod_{p^e \parallel n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^e$ とおく.

すると, $\text{rad}(\alpha), \text{rad}(\beta)$ は無平方数であり, さらに $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \prod_{p \mid \alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ であることから (β についても同様), $\frac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\varphi'(X)}{X}$.

さて, $\frac{\varphi'(X)}{X} = \frac{\bar{h}}{2h} = \frac{\frac{\bar{h}}{2}}{h}$ と書くと, 右辺は既約分数形であるから, ある正整数 k を用いて $X = kh$ と書ける.

φ' が完全乗法的関数, つまり任意の正整数 n, m について $\varphi'(nm) = \varphi'(n)\varphi'(m)$ が成り立つことに注意すると $\frac{\varphi'(X)}{X} = \frac{\varphi'(k) \cdot \varphi'(h)}{hk} = \frac{\varphi'(k)}{k} \cdot \frac{\bar{h}}{h} = \frac{\bar{h}}{2h}$.

よって両辺を比較すると $\frac{\varphi'(k)}{k} = \frac{1}{2}$.

右辺は既約分数形であるから, さらにある整数 k' を用いて $k = 2k'$ と書ける.

すると $\frac{\varphi'(k)}{k} = \frac{\varphi'(k') \cdot \varphi'(2)}{2k'} = \frac{\varphi'(k')}{k'} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

よって $\frac{\varphi'(k')}{k'} = 1$, だが, φ' の定義より任意の 2 以上の整数 n について, n は素因数を持っているので $\varphi'(n) < n$.

したがって $k' = 1$ で, $X = kh = 2hk' = 2h$ と書ける. ■

定理 2.1: 第三種オイラー超完全数のダブル B 型解は, 以下のいずれかに当てはまる:

- $\alpha = 1, \beta = 2^e h^f, m = \frac{-h - 1 - 2^e \bar{h} h^f}{h + 1}$
- $\alpha = 2^e, \beta = h^f, m = -\bar{h} h^f - h 2^e + \bar{h}$
- $\alpha = h^f, \beta = 2^e, m = -2h^f - 2^e + 1.$

Proof: 先の補題たちより, $\text{rad}(\alpha)\text{rad}(\beta) = 2h$ から, $(\text{rad}(\alpha), \text{rad}(\beta))$ の組は $(1, 2h), (2, h), (h, 2), (2h, 1)$ のいずれかに分類できる.

$a = \alpha p, A = \beta q$ を定義式に代入した式を再掲する:

$$\begin{cases} \bar{h}\beta q = 2h\varphi(\alpha)\bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} & \dots(\text{A}) \\ \varphi(\beta)\bar{q} = \alpha p + m & \dots(\text{B}) \end{cases}$$

(1) $(\text{rad}(\alpha), \text{rad}(\beta)) = (1, 2h)$ の場合

このとき $\alpha = 1, \beta = 2^e h^f$ ($e, f > 0$) と書ける.

$$\bar{h}2^e h^f q = 2h\bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} \quad \dots(\text{A}),$$

$$\bar{h}2^e h^f \bar{q} = 2hp + 2hm \quad \dots(\text{B}) \times 2h$$

したがって, $\bar{h}2^e h^f = -2h - (h + 1)m + \bar{h}$ より, $m = \frac{-h - 1 - \bar{h}2^e h^f}{h + 1}$ を得る.

(2) $(\text{rad}(\alpha), \text{rad}(\beta)) = (2, h)$ の場合

このとき $\alpha = 2^e, \beta = h^f$ ($e, f > 0$) と書ける.

$$\bar{h}h^f q = h2^e \bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} \quad \dots(\text{A}),$$

$$\bar{h}h^f \bar{q} = h2^e p + hm \quad \dots(\text{B}) \times 2h$$

したがって, $\bar{h}h^f = -h2^e - m + \bar{h}$ より, $m = -\bar{h}h^f - h2^e + \bar{h}.$

(3) $(\text{rad}(\alpha), \text{rad}(\beta)) = (h, 2)$ の場合

このとき $\alpha = h^f, \beta = 2^e$ ($e, f > 0$) と書ける.

$$\bar{h}2^e q = 2\bar{h}h^f \bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} \quad \dots(\text{A}),$$

$$\bar{h}2^e \bar{q} = 2\bar{h}h^f p + 2\bar{h}m \quad \dots(\text{B}) \times 2\bar{h}$$

したがって, $\bar{h}2^e = -2\bar{h}h^f - \bar{h}m + \bar{h}$ より, $m = -2h^f - 2^e + 1.$

(4) $(\text{rad}(\alpha), \text{rad}(\beta)) = (2h, 1)$ の場合

このとき $\alpha = 2^e h^f, \beta = 1$ ($e, f > 0$) と書ける.

$$\bar{h}q = \bar{h}2^e h^f \bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} \quad \dots(\text{A}),$$

$$\bar{h}\bar{q} = \bar{h}2^e h^f \bar{p} + \bar{h}m \quad \dots(\text{B}) \times \bar{h}$$

しかし, これを引くと $\bar{h} = -\bar{h}2^e h^f + \bar{h}$ を得るが, この式は成立しない. ■

n 次元弱ヘロン三角錐の研究

宮路 伶音（津山高専 5 年），松田 修（津山高専）

1. はじめに

一般に，ヘロン四面体は，辺の長さ，面の面積，体積がすべて整数であるものと定義されている．しかし，本研究では， n 次元三角錐において， n 次元三角錐の体積が整数，かつすべてのファセット（ $n-1$ 次元の胞）の体積が整数であるものを **n 次元弱ヘロン三角錐**と呼び，これについて研究する．

2. ヘロンの三角形について分かっていること

- ヘロンの三角形とは，3 辺の長さ，面積の全てが整数となる三角形である．
- ピタゴラスの三角形はヘロンの三角形である．

定理（ヘロン三角形の 3 辺の一般式）

m, n, k は， $\gcd(m, n, k) = 1$ ， $mn > k^2 \geq \frac{m^2 n}{2m+n}$ ， $m \geq n \geq 1$ を満たす整数とする．このとき，

$$a = n(m^2 + k^2), \quad b = m(n^2 + k^2), \quad c = (m+n)(mn - k^2)$$

と置くと， $\Delta(a, b, c)$ はヘロンの三角形となる．

さらに，任意のヘロン三角形はある $\Delta(a, b, c)$ と相似である．

3. これまでのヘロン四面体の研究

- レオンハルト・オイラーは，全ての面が直角三角形であり，四面体の 3 つの辺が各座標軸に平行であるヘロン四面体を，ヘロン双直角四面体と呼び，これを研究した．
- Buchholz（ブーフホルツ）は，辺の長さが 52, 53, 80, 84, 117 で，面の面積が 1170, 1800, 1890, 2016 で，体積が 18144 であるヘロン四面体を発見している [B]．これは，辺の長さが整数であるヘロン三角錐のうち，最長の辺の長さが最小である例である（1992 年）．

4. n 次元ヘロン・グア三角錐について

記号 $\Delta(n-1)$ は， $n \geq 2$ とし， n 次元空間 \mathbf{R}^n 内の $n-1$ 単体で，各頂点が直交座標系の座標軸上にあるものを表す．

n 次元ピタゴラス三角錐とは， $(n-1)$ に原点 O を加えて作られる n 単体で，

$$\Delta(S_1, S_2, \dots, S_n \mid S_{n+1})$$

と書く．ここで， S_j ($1 \leq j \leq n$) は原点0を含むファセットの体積で， S_{n+1} は原点0を含まないファセットの体積を表す．

n 次元ヘロン・グア三角錐とは， n 次元ピタゴラス三角錐かつ弱ヘロン三角錐のことをいう．

以下の定理が知られている．

De Gua (ド・グア) の定理

任意の3次元ピタゴラス三角錐 $\Delta(S_1, S_2, S_3 | S_4)$ について，

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

が成り立つ．

Conant-Beyer (コナント・ベイヤー) の定理[CB]

任意の n 次元ピタゴラス三角錐 $\Delta(S_1, S_2, \dots, S_n | S_{n+1})$ について，

$$S_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2$$

が成り立つ．

n 次元ピタゴラス三角錐の体積については，以下のことが知られている．

定理 1. 頂点が原点と各座標軸上に載っている n 次元ピタゴラス三角錐を考える．つまり

$$O: (0, 0, \dots, 0), P_1: (x_1, 0, \dots, 0), P_2: (0, x_2, 0, \dots, 0), \dots, P_n: (0, \dots, 0, x_n)$$

とする． V_n を n 次元ピタゴラス三角錐の超体積， S_j をファセットの体積とする．ただし， $1 \leq j \leq n+1$ ．このとき

$$V_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{n!}, S_j = \frac{x_1 x_2 \cdots \hat{x}_j \cdots x_n}{(n-1)!}, S_{n+1}^2 = \sum_{j=1}^n S_j^2$$

が成り立つ．ここで， \hat{x}_j は x_j を除くという記号である．

n 次元ヘロン・グア三角錐が存在することを証明する．

定理 2. 自然数 s_j ($j = 1, 2, \dots, n$)に対して，

$$x_1 = s_1, x_2 = 2s_2, \dots, x_n = ns_n, x_{n+1} = (n+1)!s_{n+1}$$

を各軸の座標とする n 次元ピタゴラス三角錐 $\Delta(S_1, S_2, \dots, S_n | S_{n+1})$ を考えると，全ての j について S_j は整数で， V_n も整数である．したがって，この n 次元ピタゴラス三角錐は n 次元ヘロン・グア三角錐である．

(証明) 定理 1 を用いた計算によって示される． ■

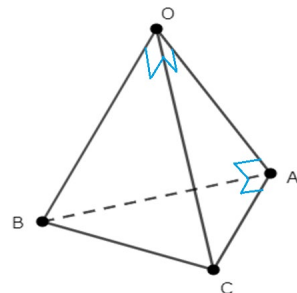
定理 2 によって、 n 次元弱ヘロン三角錐として、 n 元ヘロン・グア三角錐が存在することがわかった。

問題. n 次元ヘロン・グア三角錐以外の n 次元弱ヘロン三角錐は、どのようなものがあるか？

5. 3次元弱ヘロン三角錐の研究

3次元三角錐において、3次元三角錐の体積が整数、かつすべてのファセット（2次元の面）の面積が整数であるものを研究する。

本研究では、3次元の弱ヘロン三角錐の構成として、三角錐OABCのファセット $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OAC$, $\triangle ABC$ が、すべて直角三角形であることを考える。（これは、オイラーが研究したヘロン双直角四面体に関する。）



命題 1. s, t を正の整数 $s > t$ とし、三角錐OABCにおいて、

$$OA = s^2 - t^2, \quad OB = AC = s^2 + t^2, \quad OC = AB = 2st$$

$$BC = \sqrt{s^4 + t^4 + 6s^2t^2}$$

と置くと、ファセット $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBC$, $\triangle ABC$ はすべて直角三角形となる。

証明. $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の各辺は

$$OA = s^2 - t^2, \quad OB = s^2 + t^2, \quad OC = AB = 2st$$

よって、どちらも直角三角形である。

$\triangle OBC$ の各辺は

$$OB = s^2 + t^2, \quad OC = 2st$$

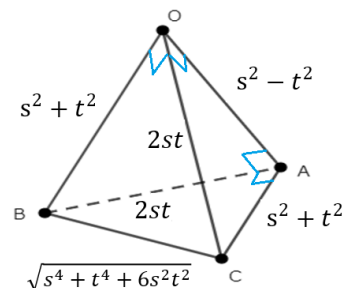
$$(OB)^2 + (OC)^2 = (s^2 + t^2)^2 + (2st)^2 = s^4 + t^4 + 6s^2t^2 = (BC)^2$$

よって、直角三角形である。さらに、 $\triangle ABC$ の各辺も

$$AC = s^2 + t^2, \quad AB = 2st$$

$$(AC)^2 + (AB)^2 = (s^2 + t^2)^2 + (2st)^2 = s^4 + t^4 + 6s^2t^2 = (BC)^2$$

よって、直角三角形である。 ■



命題 2. 命題 1 で得られたファセット（三角錐）OABC で $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBC$, $\triangle ABC$ の面積をそれぞれ, S_1, S_2, S_3, S_4 とし、三角錐OABCの体積を V とすると、

$$S_1 = S_2 = st(s^2 - t^2), \quad S_3 = S_4 = st(s^2 + t^2), \quad V = \frac{2}{3}s^2t^2(s^2 - t^2)$$

となる。

証明. $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ においては, 斜辺がそれぞれ $OB = AC$ であることから,

$$S_1 = S_2 = st(s^2 - t^2)$$

$\triangle OBC$, $\triangle ABC$ においては, 斜辺がそれぞれ BC であることから,

$$S_3 = S_4 = st(s^2 + t^2)$$

三角錐 $OABC$ の体積 V については,

$$\begin{vmatrix} s^2 - t^2 & s^2 - t^2 & s^2 - t^2 \\ 0 & 0 & 2st \\ 0 & 2st & s^2 + t^2 \end{vmatrix} = -4s^2t^2(s^2 - t^2)$$

したがって,

$$V = \frac{2}{3}s^2t^2(s^2 - t^2) \quad \blacksquare$$

定理 3. s, t を正の整数 $s > t$ とし, $OA = s^2 - t^2$, $OB = AC = s^2 + t^2$, $OC = AB = 2st$,

$BC = \sqrt{s^4 + t^4 + 6s^2t^2}$ から得られる三角錐 $OABC$ は, 3次元弱ヘロン三角錐である.

証明. 命題 1 で, 側面はすべて直角三角形であり, 命題 2 より, ファセットの面積はすべて整数である. さらに体積は $V = \frac{2}{3}s^2t^2(s^2 - t^2)$ であるが, どんな $s > t$ を与えても

$$st(s^2 - t^2) \equiv 0 \pmod{3}$$

である. よって, V も整数. したがって, 三角錐 $OABC$ は, M三角錐である. \blacksquare

6. 4次元へ向けての M 三角錐への座標からのアプローチ

前節で, 3次元の弱ヘロン三角錐を, 辺の長さから構成したが, 高次元の弱ヘロン三角錐を研究するためには, 辺の長さから構成するよりも, 頂点の座標から構成した方がよいのではないかと考えた.

定理 4. 自然数 s, t とすると,

$$O: (0,0,0), \quad A: (2st, 0,0), \quad B: (2st, s^2 - t^2, 0), \quad C: (2st, s^2 - t^2, 2st)$$

を頂点にもつ三角錐は, 全てのファセットが直角三角形の 3次元弱ヘロン三角錐である.

証明. $OA \perp AB$ より $\triangle OAB$ が, $OA \perp AC$ より $\triangle OAC$ が, $OB \perp BC$ より $\triangle OBC$ が, $AB \perp BC$ より $\triangle ABC$ が, それぞれ直角三角形である. 各面の面積を S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) と置くと,

$$S_1 = S_3 = st(s^2 - t^2), \quad S_2 = S_4 = st(s^2 + t^2)$$

となり, すべての面は直角三角形がはいえる. さらに, 体積 V は

$$V = \frac{2}{3}s^2t^2(s^2 - t^2)$$

であるが, $st(s^2 - t^2) \equiv 0 \pmod{3}$ がつねに成り立つので V は整数. よって, この三角錐は 3次元弱ヘロン三角錐である. \blacksquare

定理 4 をもとに、高次元 M 三角錐への一般化のために、3 次元 M 三角錐というものを定義した。

定義. O を原点とし、頂点 O, A, B, C で A, B, C の座標が 2 つの整数パラメータ s, t によって、以下のよう
にあらわされているとき、三角錐 $OABC$ を、**3 次元 M 三角錐**と呼ぶ。

$$A: (2st, 0, 0), \quad B: (2st, s^2 - t^2, 0), \quad C: (2st, s^2 - t^2, 2st)$$

注意 Buchholz (ブーフホルツ) が発見した辺の長さが 52,53,80,84,117 で、面の面積が
1170,1800,1890,2016 で、体積が 18144 であるヘロン四面体の座標は、

$$A: (84, 0, 0), \quad B: (36, -80, 0), \quad C: \left(\frac{301}{5}, \frac{112}{5}, \frac{588}{5} \right)$$

定義. 整数 $s > t$ で、2 周期の数列 $\{a_j\}$

$$2st, \quad s^2 - t^2, \quad 2st, \quad s^2 - t^2, \quad \dots$$

を考える。 O を原点とし、頂点 O, A_1, A_2, \dots, A_n で、頂点 A_i の座標成分 x_j が、

$$x_j = \begin{cases} a_j & (1 \leq j \leq i) \\ 0 & (i+1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

となっていたとき、 n 次元三角錐 $OA_1A_2 \dots A_n$ を、 **n 次元 M 三角錐**と呼び、

$$MT_n(s, t)$$

と表す。

n 次元 M 三角錐は、スイスの数学者 Ludwig Schläfli (ルートヴィッヒ・シュレーフリ) によって導入
された Orthoscheme (オルソスキーム) という概念と関係する [OS].

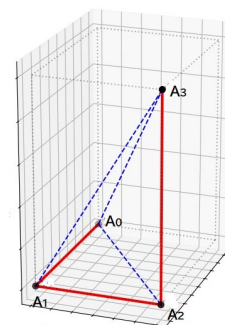
定義. n 次元の $n+1$ 個の頂点 A_0, A_1, \dots, A_n をもつ n 次元三角錐 T で、辺の鎖 (くさり)

$$A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$$

が、以下の直交条件をみたすとき、 T を、 **n 次元 Orthoscheme** という。

「鎖の中の辺は、それより前のすべての辺と直交する」

* 2 次元の Orthoscheme は直角三角形であり、 3 次元の
Orthoscheme は直方体から底面が直角三角形である三角柱を切り
出して、その三角柱を切って得られる三角錐のことである。



定理 5. n 次元 M 三角錐 $MT_n(s, t)$ は, n 次元 Orthoscheme である. さらに, $MT_n(s, t)$ のファセットもすべて $n - 1$ 次元 Orthoscheme である.

証明. 辺の鎖は

$$OA_1 = (2st, 0, 0, \dots, 0), A_1A_2 = (0, s^2 - t^2, 0, \dots, 0), \dots, A_n = (0, 0, 0, \dots, u)$$

ここで, n が偶数なら $u = s^2 - t^2$, n が奇数なら $u = 2st$. したがって, 鎖の中の辺は, それより前のすべての辺と直交することは明らかである. したがって, $MT_n(s, t)$ は, n 次元 Orthoscheme である. $MT_n(s, t)$ のファセットがすべて $n - 1$ 次元 Orthoscheme であることの証明は, 特に, $i \neq 0, n$ のとき A_i を除いて得られるファセットに関する部分に注意が必要で, 具体的に内積計算を行って示される. ■

7. 4次元以上の M 三角錐に関する研究結果

定理 6. 4次元 M 三角錐 $MT_4(s, t)$ は4次元弱ヘロン三角錐である.

証明. $A_1: (2st, 0, 0, 0), A_2: (2st, s^2 - t^2, 0, 0), A_3: (2st, s^2 - t^2, 2st, 0), A_4: (2st, s^2 - t^2, 2st, s^2 - t^2)$

である. これより各ファセットの体積を S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) と置くと,

$$S_1 = \frac{2}{3}s^2t^2(s^2 - t^2), S_2 = S_3 = S_4 = \frac{1}{3}st(s^4 - t^4), S_5 = \frac{1}{3}st(s^2 - t^2)^2$$

超体積 V_4 は

$$V_4 = \frac{1}{6}s^2t^2(s^2 - t^2)^2$$

フェルマーの小定理より $s^2 - t^2 \equiv 0 \pmod{3}$. よって, $st(s^2 - t^2)$ は6の倍数. したがって, この三角錐は4次元弱ヘロン三角錐である. ■

残念ながら, $n \geq 5$ において, n 次元 M 三角錐 $MT_n(s, t)$ は, 弱ヘロン三角錐ではない. 以下, この問題に取り組んだ

定理 7. 5次元 M 三角錐 $MT_5(s^2, t^2)$ は5次元弱ヘロン三角錐である.

証明. $f = 2s^2t^2, g = s^4 - t^4$ と置くと,

$$A_1: (f, 0, 0, 0, 0), A_2: (f, g, 0, 0, 0), A_3: (f, g, f, 0, 0), A_4: (f, g, f, g, 0), A_5: (f, g, f, g, f)$$

である. これより各ファセットの体積を S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) と置くと,

$$S_1 = S_6 = \frac{1}{6}s^4t^4(s^4 - t^4)^2, S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = \frac{1}{6}s^4t^4(s^4 - t^4)(s^4 + t^4)$$

超体積 V_5 は

$$V_5 = \frac{1}{15}s^6t^6(s^4 - t^4)^2$$

フェルマーの小定理より $s^2 - t^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $s^4 - t^4 \equiv 0 \pmod{5}$ である. さらに, $st(s^2 - t^2)$ は 6 の倍数. よって, $MT_5(s^2, t^2)$ は 5 次元弱ヘロン三角錐である. ■

定理 8. 6 次元 M 三角錐 $MT_6(s^2, t^2)$ は 6 次元弱ヘロン三角錐である.

証明. $f = 2s^2t^2$, $g = s^4 - t^4$ と置くと,

$$A_1: (f, 0, 0, 0, 0, 0), A_2: (f, g, 0, 0, 0, 0), A_3: (f, g, f, 0, 0, 0), A_4: (f, g, f, g, 0, 0), \\ A_5: (f, g, f, g, f, 0), A_6: (f, g, f, g, f, g)$$

である. これより各ファセットの体積を S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) と置くと,

$$S_1 = \frac{1}{30} s^4 t^4 (s^4 - t^4)^3, S_7 = \frac{1}{15} s^6 t^6 (s^4 - t^4)^2$$

$$S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{1}{30} s^4 t^4 (s^4 - t^4)^2 (s^4 + t^4)$$

超体積 V_6 は

$$V_6 = \frac{1}{90} s^6 t^6 (s^4 - t^4)^3$$

フェルマーの小定理より $s^2 - t^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $s^4 - t^4 \equiv 0 \pmod{5}$ である. さらに, $st(s^2 - t^2)$ は 6 の倍数. よって, $MT_6(s^2, t^2)$ は 6 次元弱ヘロン三角錐である. ■

定理 9. 7 次元 M 三角錐 $MT_7(s^6, t^6)$ は 7 次元弱ヘロン三角錐である.

証明. $f = 2s^6t^6$, $g = s^{12} - t^{12}$ と置くと,

$$A_1: (f, 0, 0, 0, 0, 0, 0), A_2: (f, g, 0, 0, 0, 0, 0), A_3: (f, g, f, 0, 0, 0, 0), A_4: (f, g, f, g, 0, 0, 0), \\ A_5: (f, g, f, g, f, 0, 0), A_6: (f, g, f, g, f, g, 0), A_7: (f, g, f, g, f, g, f)$$

である. これより各ファセットの体積を S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) と置くと,

$$S_1 = S_8 = \frac{1}{90} s^{18} t^{18} (s^{12} - t^{12})^3$$

$$S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = \frac{1}{90} s^{18} t^{18} (s^{12} - t^{12})^2 (s^{12} + t^{12})$$

超体積 V_7 は

$$V_7 = \frac{1}{315} s^{24} t^{24} (s^{12} - t^{12})^3$$

フェルマーの小定理より $s^2 \equiv t^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $s^4 \equiv t^4 \equiv 1 \pmod{5}$, $s^6 \equiv t^6 \equiv 1 \pmod{7}$. さらに, $st(s^2 - t^2)$ は 6 の倍数. よって, $MT_7(s^6, t^6)$ は 7 次元弱ヘロン三角錐である. ■

定理 1 0. 8 次元 M 三角錐 $MT_8(s^6, t^6)$ は 8 次元弱ヘロン三角錐である.

証明. $f = 2s^6t^6$, $g = s^{12} - t^{12}$ と置くと,

$$\begin{aligned} A_1: (f, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & A_2: (f, g, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & A_3: (f, g, f, 0, 0, 0, 0, 0), \\ A_4: (f, g, f, g, 0, 0, 0, 0), & A_5: (f, g, f, g, f, 0, 0, 0), & A_6: (f, g, f, g, f, g, 0, 0), \\ & A_7: (f, g, f, g, f, g, f, 0), & A_8: (f, g, f, g, f, g, f, g) \end{aligned}$$

である. これより各ファセットの体積を S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) と置くと,

$$S_1 = \frac{1}{630} s^{18} t^{18} (s^{12} - t^{12})^4, \quad S_9 = \frac{1}{315} s^{24} t^{24} (s^{12} - t^{12})^3$$

$$S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = \frac{1}{630} s^{18} t^{18} (s^{12} - t^{12})^3 (s^{12} + t^{12})$$

超体積 V_8 は

$$V_8 = \frac{1}{2520} s^{24} t^{24} (s^{12} - t^{12})^4$$

フェルマーの小定理より $s^2 \equiv t^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $s^4 \equiv t^4 \equiv 1 \pmod{5}$, $s^6 \equiv t^6 \equiv 1 \pmod{7}$. さらに, $st(s^2 - t^2)$ は 6 の倍数. よって, $MT_8(s^6, t^6)$ は 8 次元弱ヘロン三角錐である. ■

定理 1 1. 9 次元 M 三角錐 $MT_9(s^6, t^6)$ は 9 次元弱ヘロン三角錐である.

証明. $f = 2s^6t^6$, $g = s^{12} - t^{12}$ と置くと,

$$\begin{aligned} A_1: (f, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & A_2: (f, g, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & A_3: (f, g, f, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ A_4: (f, g, f, g, 0, 0, 0, 0, 0), & A_5: (f, g, f, g, f, 0, 0, 0, 0), & A_6: (f, g, f, g, f, g, 0, 0, 0), \\ & A_7: (f, g, f, g, f, g, f, 0, 0), & A_8: (f, g, f, g, f, g, f, g, 0), & A_9: (f, g, f, g, f, g, f, g, f) \end{aligned}$$

である. これより各ファセットの体積を S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$) と置くと,

$$S_1 = S_{10} = \frac{1}{2520} s^{24} t^{24} (s^{12} - t^{12})^4$$

$$S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = S_9 = \frac{1}{2520} s^{24} t^{24} (s^{12} - t^{12})^4$$

超体積 V_9 は

$$V_9 = \frac{1}{11340} s^{30} t^{30} (s^{12} - t^{12})^4$$

フェルマーの小定理より $s^2 \equiv t^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $s^4 \equiv t^4 \equiv 1 \pmod{5}$, $s^6 \equiv t^6 \equiv 1 \pmod{7}$. さらに, $st(s^2 - t^2)$ は 6 の倍数. よって, $MT_9(s^6, t^6)$ は 9 次元弱ヘロン三角錐である. ■

8. n 次元 M 三角錐 $MT_n(s^m, t^m)$ が弱ヘロン三角錐となる m の予想

$MT_n(s^m, t^m)$ の超体積 V_n とファセットの体積 S_j の公式は以下である.

命題 3. n 次元 M 三角錐 $MT_n(s^m, t^m)$ の超体積 V_n とファセットの体積 S_j は以下の通り.

(1) $n = 2N - 1$ のとき

$$V_n = \frac{2^N}{(2N-1)!} (st)^{mN} (s^{2m} - t^{2m})^{N-1}$$

$$S_1 = S_{2N} = \frac{2^{N-1}}{(2N-2)!} (st)^{m(N-1)} (s^{2m} - t^{2m})^{N-1}$$

$$S_2 = \dots = S_{2N-1} = \frac{2^{N-1}}{(2N-2)!} (st)^{m(N-1)} (s^{2m} - t^{2m})^{N-2} (s^{2m} + t^{2m})$$

(2) $n = 2N$ のとき

$$V_n = \frac{2^N}{(2N)!} (st)^{mN} (s^{2m} - t^{2m})^N$$

$$S_1 = \frac{2^{N-1}}{(2N-1)!} (st)^{m(N-1)} (s^{2m} - t^{2m})^N, \quad S_{2N+1} = \frac{2^N}{(2N-1)!} (st)^{mN} (s^{2m} - t^{2m})^{N-1}$$

$$S_2 = \dots = S_{2N} = \frac{2^{N-1}}{(2N-1)!} (st)^{m(N-1)} (s^{2m} - t^{2m})^{N-1} (s^{2m} + t^{2m})$$

証明. 数学的帰納法により示される. ■

命題 3 より, n 次元 M 三角錐 $MT_n(s^m, t^m)$ が弱ヘロン三角錐となる m は, 以下のように予想している.

予想. n 次元 M 三角錐 $MT_n(s^m, t^m)$ が弱ヘロン三角錐となる m は,

$$m = \frac{1}{2} \cdot \text{LCM} \left\{ p_j - 1 \mid p_j: \text{prime}, \quad p_j \leq n \right\}$$

である.

参考文献

[B] Buchholz, R. H. "Perfect Pyramids." Bull. Austral. Math. Soc. 45, 353-368, 1992.

Guy, R. K. "Simplexes with Rational Contents." § D22 in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, pp. 190-192, 1994.

[CB] D. R. Conant and W. A. Beyer, "Generalized Pythagorean Theorem," The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 3 (Mar., 1974), pp. 262-265.

[OS] Schläfli orthoscheme, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Schl%C3%A4fli_orthoscheme

黄金比と床関数・天井関数の合成写像が満たす恒等式について

On Identities Satisfied by Composite Mappings of the Golden Ratio with the Floor and Ceiling Functions

岩淵 勇樹

Yuuki IWABUCHI

2025-08-22

Abstract

本稿では、黄金比と床関数・天井関数の合成写像が満たす恒等式について、特に、フィボナッチ数列と六角形状の分岐遷移に着目し、その性質を考察します。

1 フィボナッチと六角形状の分岐遷移

離散グラフにおいて、自然数をその黄金比倍の切り捨て（床関数）、黄金比倍の切り上げ（天井関数）という2つの分岐となる異なる写像の合成写像によって連結されたものと見ると、特殊な構造が存在することが観察されました。

図1のように、任意の自然数について、毎回黄金比倍を伴いつつ、「切り捨て→切り上げ→切り上げ」の合成写像と「切り上げ→切り捨て→切り捨て」の合成写像による経路が一旦別れてから合流することが予想されました。

また、別の観察手法として、両対数極座標による整数（自然数）のプロット手法を導入し、螺旋状に整数が配置される可視化を提案しました [2]。これを「整数螺旋」と呼ぶとします。

図2では、整数螺旋における整数同士の連結を図1と同様に行い、整数螺旋においても（必ずしも凸ではない）六角形が現れることを確認しました。

2 恒等式について

任意の自然数 n について、以下を定義します。

これは後述の図3として可視化されることになります。

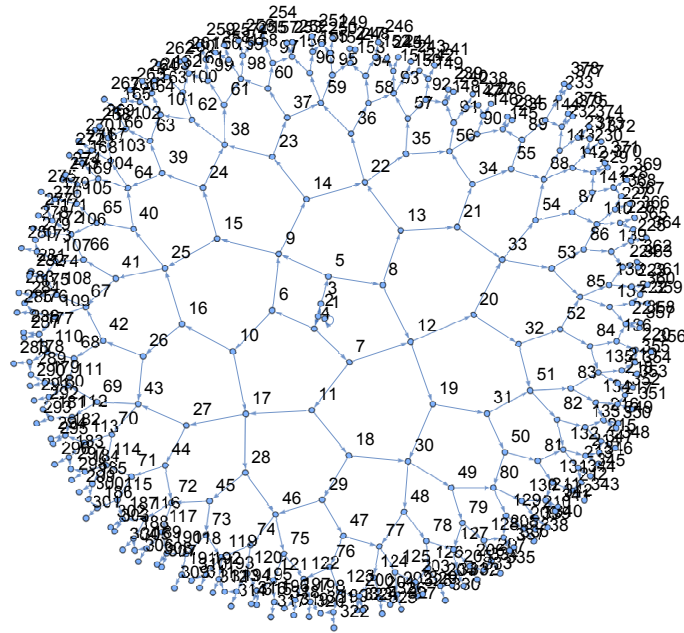


図 1 自然数とその黄金比倍の切り捨てと切り上げを連結した離散グラフ

定義.

$$\Phi := \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (1)$$

$$T_-(x) := \lfloor \Phi \times x \rfloor \quad (2)$$

$$T_+(x) := \lceil \Phi \times x \rceil \quad (3)$$

$$a_n := T_-(n) \quad (4)$$

$$b_n := n + a_n \quad (5)$$

$$c_n := n + 2a_n + 1 \quad (6)$$

このとき、以下の恒等式が成立します。

定理.

$$T_+ \circ T_+ \circ T_-(n) = T_- \circ T_- \circ T_+(n) = c_n \quad (7)$$

証明 以下の 2 つの補題を使って証明します。

補題 1.

$$T_+(a_n) = n + a_n \quad (8)$$

補題 2.

$$T_-(a_n + 1) = n + a_n + 1 \quad (9)$$

ε_n を $\Phi \times n$ の小数部分 ($0 \leq \varepsilon_n < 1$) とすると、 $\Phi \times n = a_n + \varepsilon_n$ より

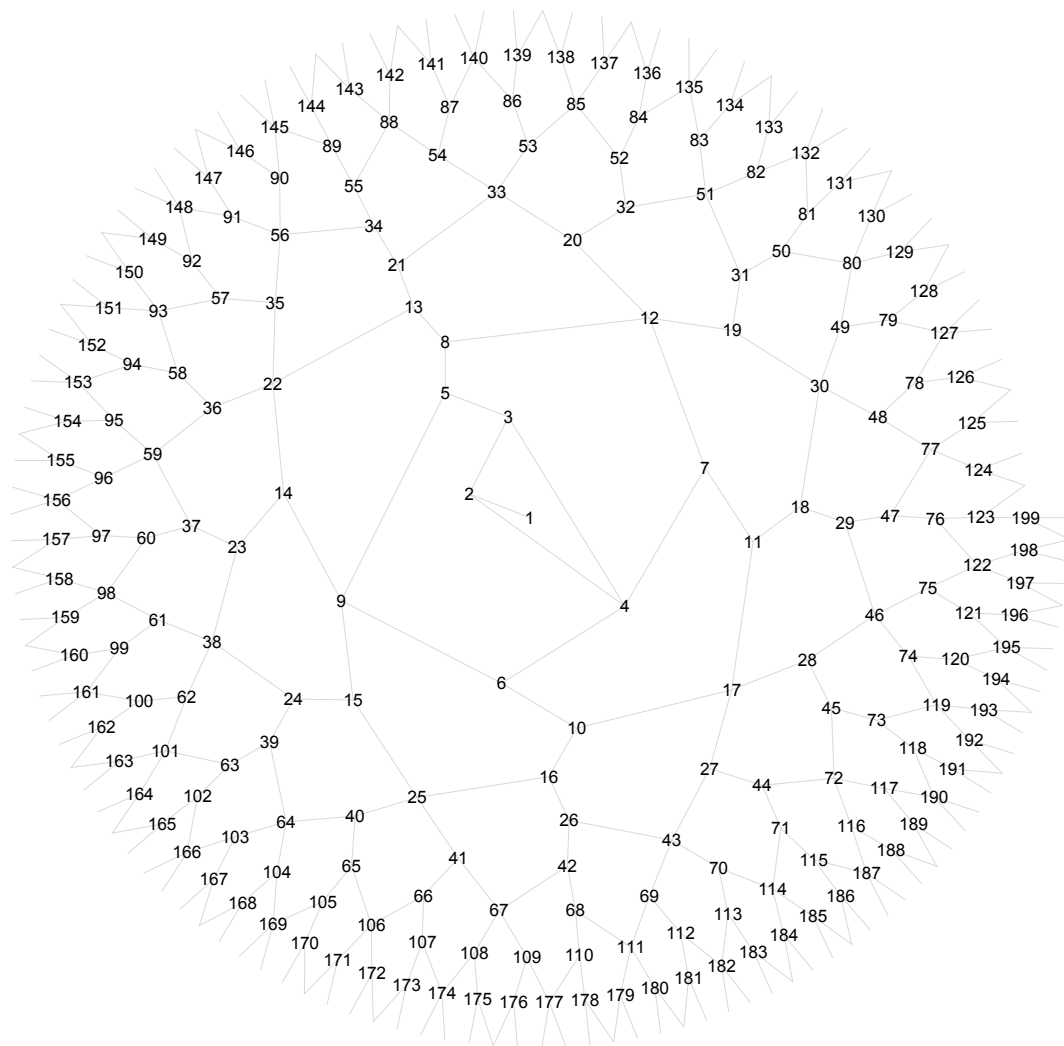


図2 黄金比で整列した整数螺旋に見られる分岐遷移

$$\Phi \times a_n = \Phi(\Phi \times n - \varepsilon_n) \quad (10)$$

$$= \Phi^2 \times n - \Phi \times \varepsilon_n \quad (11)$$

$$= (\Phi + 1)n - \Phi \times \varepsilon_n \quad (12)$$

$$= n + \Phi \times n - \Phi \times \varepsilon_n \quad (13)$$

$$= n + a_n + \varepsilon_n - \Phi \times \varepsilon_n \quad (14)$$

$$= n + a_n - (\Phi - 1)\varepsilon_n \quad (15)$$

$$= n + a_n - \frac{\varepsilon_n}{\Phi} \quad (16)$$

が成立し、式 (16) のうち $\frac{\varepsilon_n}{\Phi}$ は 0 以上 1 未満のため、 $\lceil \Phi \times a_n \rceil = \left\lceil n + a_n - \frac{\varepsilon_n}{\Phi} \right\rceil = n + a_n$ となり、補題 1 が導かれます。

また、式 (16) を使って

$$\Phi(a_n + 1) = \Phi \times a_n + \Phi \quad (17)$$

$$= n + a_n - \frac{\varepsilon_n}{\Phi} + \Phi \quad (18)$$

$$= n + a_n - \frac{\varepsilon_n}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} + 1 \quad (19)$$

$$= n + a_n + 1 + \frac{1 - \varepsilon_n}{\Phi} \quad (20)$$

が成立し、式 (20) のうち $\frac{1 - \varepsilon_n}{\Phi}$ は 0 以上 1 未満のため、 $\lceil \Phi(a_n + 1) \rceil = \left\lceil n + a_n + 1 + \frac{1 - \varepsilon_n}{\Phi} \right\rceil = n + a_n + 1$ となり、補題 2 が導かれます。

左辺

$$T_+ \circ T_+ \circ T_-(n) = \lceil \Phi \times \lceil \Phi \times a_n \rceil \rceil \quad (21)$$

$$= \lceil \Phi(n + a_n) \rceil \quad (22)$$

$$= \lceil \Phi \times n + \Phi \times a_n \rceil \quad (23)$$

$$= \left\lceil (a_n + \varepsilon_n) + \left(n + a_n - \frac{\varepsilon_n}{\Phi}\right) \right\rceil \quad (24)$$

$$= \left\lceil n + 2a_n + \varepsilon_n \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) \right\rceil \quad (25)$$

$$= \left\lceil n + 2a_n + \frac{\varepsilon_n}{\Phi^2} \right\rceil \quad (26)$$

$\frac{\varepsilon_n}{\Phi^2}$ は 0 以上 1 未満のため、左辺 $\lceil \Phi \times \lceil \Phi \times a_n \rceil \rceil = \left\lceil n + 2a_n + \frac{\varepsilon_n}{\Phi^2} \right\rceil = n + 2a_n + 1$ が導かれます。

右辺 $\Phi \times n$ は整数でないため、 $\lceil \Phi \times n \rceil = a_n + 1$ となり、

$$T_- \circ T_- \circ T_+(n) = \lfloor \Phi \times \lfloor \Phi(a_n + 1) \rfloor \rfloor \quad (27)$$

$$= \lfloor \Phi(n + a_n + 1) \rfloor \quad (28)$$

$$= \left\lfloor \left(n + 2a_n + \frac{\varepsilon_n}{\Phi^2} \right) + \Phi \right\rfloor \quad (29)$$

$$= \left\lfloor n + 2a_n + 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} \right) \right\rfloor \quad (30)$$

$\frac{\varepsilon_n}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} < \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = 1$ なので、右辺 $\lfloor \Phi \times \lfloor \Phi(a_n + 1) \rfloor \rfloor = \left\lfloor n + 2a_n + 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} \right) \right\rfloor = n + 2a_n + 1$ が導かれます。

以上より、両辺とも $n + 2a_n + 1$ に等しく、等式が成立します。

□

3 諸性質

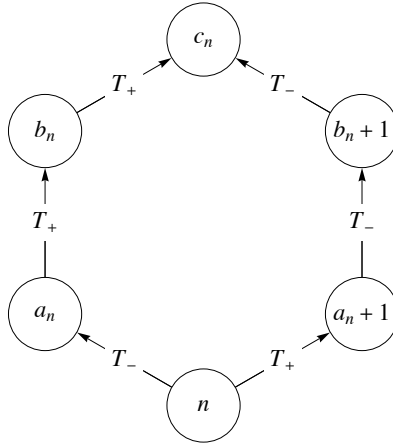


図3 フィボナッチの分岐写像の遷移図

	4		9		12		17		22		25		30		33	
2		3		5		6		7		8		10		11		13
1		2		3		4		4		5		6		7		8
	1		2		3		4		5		6		7		8	

図4 フィボナッチの分岐写像の具体例 (1 から 8 まで)

定理と補題に現れた数列を網羅的に図示すると、図3のように一般化されます。

また、配置を同じくして $n = 1, 2, 3, \dots$ とそれぞれに写像を適用すると図4になります。

a_n, b_n, c_n は具体的に表1のような列です。

a_n は、特に下ワイソフ列 (Lower Wythoff sequence) と呼ばれる列です [4]。

b_n は、特に上ワイソフ列 (Upper Wythoff sequence) と呼ばれる列です [5]。

表 1 各数列の一覧表 (1 から 15 まで)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	...
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	...
c_n	4	9	12	17	22	25	30	33	38	43	46	51	56	59	64	...

c_n は、フィボナッチ列 [1] [3] の 1 が連続する場所を表す列としても知られています [6]。

$$s_n = 1, 0, 1, \mathbf{1}, 0, 1, 0, 1, \mathbf{1}, 0, 1, \mathbf{1}, 0, 1, 0, 1, \mathbf{1}, 0, 1, 0, 1, \mathbf{1}, 0, 1, \mathbf{1}, \dots \quad (31)$$

実際、太字で表した部分が 4 番目、9 番目、12 番目、…となっています。

4 まとめ

本研究では、フィボナッチの分岐写像に関する新たな性質を明らかにしました。合成写像から得られるそれぞれの列がどのように生成されるかを示しました。また、これらの列が持つ数学的な性質や、フィボナッチの分岐写像における役割についても考察しました。

参考文献

- [1] 岩淵 勇樹 『フィボナッチ列とそれを応用した黄金比の近似』, 日本フィボナッチ協会 第 15 回研究集会 (2017)
- [2] 岩淵 勇樹 『フィボナッチの放射と螺旋』, 日本フィボナッチ協会 第 22 回研究集会 (2024)
- [3] “The binary complement of the infinite Fibonacci word A003849. Start with 1, apply 0- \rightarrow 1, 1- \rightarrow 10, iterate, take limit.”, <https://oeis.org/A005614> (最終閲覧日: 2025 年 8 月 22 日)
- [4] “Lower Wythoff sequence (a Beatty sequence): $a(n) = \text{floor}(n \cdot \phi)$, where $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = \text{A001622}$.”, <https://oeis.org/A000201> (最終閲覧日: 2025 年 8 月 22 日)
- [5] “Upper Wythoff sequence (a Beatty sequence): $a(n) = \text{floor}(n \cdot \phi^2)$, where $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.”, <https://oeis.org/A001950> (最終閲覧日: 2025 年 8 月 22 日)
- [6] “Indices n at which blocks (1;1) occur in infinite Fibonacci word, i.e., such that $\text{A005614}(n-1) = \text{A005614}(n-2) = 1$.”, <https://oeis.org/A089910> (最終閲覧日: 2025 年 8 月 22 日)

Kaprekar's Constant in the Zeckendorf representation

片山 真一 (徳島大学) 第 23 回日本フィボナッチ研究集会

2025 年 8 月 22 日 (東京理科大学)

1. カプレカ操作

b を 2 以上の正整数とし, N を b 進 n 桁の与えられた数とする. N に対して次のような操作を行う.

Step 1. N の各桁の数を降順に並べ替えた数を $M(N)$ とし, 昇順に並べ替えた数を $m(N)$ とする.

Step 2. $M(N)$ と $m(N)$ の差を取り, $K(N)$ を $K(N) = M(N) - m(N)$ と定める.

以上の操作をカプレカ操作と呼び, $K(N) \neq N$ のとき, 新しく得られた $K(N)$ に対して, 繰り返しカプレカ操作を行う. もし $K(N) = N$ となる n 桁の数 N があれば, N を b を底とする カプレカ定数 と呼ぶことにする.

2. カプレカ定数小史

カプレカ定数は, D. R. Kaprekar によって 1949 年に導入された. 彼の挙げた例は, 10 進表記で 6174 がカプレカ定数であるということで, 実際 $N = 6174$ のとき, $K(6174) = M(6174) - m(6174) = 7641 - 1467 = 6174$ なので 6174 はカプレカー数である.

一例として $N = 9861$ から始めて繰り返しカプレカー操作を行ってみると

$$K(9861) = 9861 - 1689 = 8172, K(8172) = 8721 - 1278 = 6443,$$

$$K(6443) = 6443 - 3446 = 2997, K(2997) = 9972 - 2799 = 8173,$$

$$K(8173) = 8731 - 1378 = 7353, K(7353) = 7533 - 3357 = 4176,$$

$$K(4176) = 6174 \text{ となり } K^7(9861) = 6174 \text{ がわかる.}$$

10 進表記でのカプレカ定数については, 1981 年にプリチェットらにより『G. D. Prichett, A. L. Ludington, and J. F. Lapenta, The determination of all decadic Kaprekar constants, The Fibonacci Quarterly, 19.1 (1981), 45–52』でカプレカー数を 4 つのタイプに分類されたことになっていたが, 実はこの分類には一部に重複があった.

2024 年, 嵐山数学研究会 (主宰 弥永健一) の岩崎春男氏は『A new classification of the Kaprekar Numbers, The Fibonacci Quarterly 62.4 (2024), 275–281』で, ある自然数 N がカプレカー数になるためには, その自然数 N が, 7 種類の数 495, 6174, 36, 27, 09 123456789, 124578 の組み合わせで構成される全部で 5 種類の集合のいずれかに所属することが必要十分であることを示した. またこの 5 種類の集合による新しい分類は, 上の挙げたプリチェットの分類の訂正を含むことも示した. 従って底 10 のカプレカ定数に関しては, ある程度最終的な結果が得られたと言って良い.

一方 10 進以外の他の底のカプレカ定数も研究されている. 例えばオンライン整数列辞典 (OEIS) によれば, 底 $b = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ についても桁数の低い場合のカプレカ定数の計算結果がリストアップされている. 参考までに, OEIS の対応番号をリストにしておく.

A163205(底 2), A164997(底 3), A165016(底 4), A165036(底 5), A165055(底 6), A165075(底 7), A165094(底 8), A165114(底 9).

3. ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数

この研究集会で, 我々が紹介するのは, ゼッケンドルフ表現でのカプレカ操作の類似を考えたことの第 1 次報告である. 具体的には, カプレカ定数と呼ぶべきものが存在するかどうか

かである。まずは、ゼッケンドルフ表現について基本的な性質を思い出しておこう。

定理 0.1 (ゼッケンドルフの定理) N を任意の正整数とする。このとき $c_{i+1} > c_i + 1$ をみたす正整数 $c_i \geq 2$ の組がただ 1 組存在して

$$N = \sum_{i=0}^k F_{c_i} \quad \text{ただし } F_{c-i} \text{ は } c_i \text{ 番目のフィボナッチ数}$$

と表せる。このような N の表示をゼッケンドルフ表現と呼ぶ。

ゼッケンドルフ表現は、1972 年 E. Zeckendorf により、『Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas』, Bull. Soc. R. Sci. Liège 41, (1972), 179–182, で発表された。以下 N をゼッケンドルフ表現で表したときのカプレカ操作を例示してみよう。

$N = 10$ を次のようにゼッケンドルフ表現で表しておく。

$$N = 10 = 8 + 2 = F_6 + F_3 = 10010_{(Z)}$$

ここで $10010_{(Z)}$ はゼッケンドルフ表現で $1 \times F_6 + 0 \times F_5 + 0 \times F_4 + 1 \times F_3 + 0 \times F_2$ であることを表す記号とする。このように N をゼッケンドルフ表現で 5 桁の数で、各桁の数が 1 が 2 個、0 が 3 個の数と考えておく。 N の各桁の 1, 0 を並び替えてゼッケンドルフ表現で 5 桁で最大の数を $M(N)$, 最小の数を $m(N)$ とすると

$$M(N) = 10100_{(Z)}, m(N) = 00101_{(Z)} \quad \text{なので}$$

$$K(N) = (F_6 + F_4) - (F_4 + F_2) = F_6 - F_2 = F_5 + F_3 = 01010_{(Z)}$$

これを N のゼッケンドルフ表現に関するカプレカ操作とする。さらに $N_1 = 01010_{(Z)}$ として、このカプレカ操作を N_1 に適用すると $M(N_1) = M(N), m(N_1) = m(N)$ なので $K(N_1) = N_1$ でここで定義したカプレカ操作で不変となる。しかし $N_1 = 01010_{(Z)}$ は、このカプレカ操作の際に、実際は、ゼッケンドルフ表現で 4 桁の数を 5 桁の数と見なして扱っているので、 $N_1 = 01010_{(Z)}$ はカプレカ操作で不変ではあるものの、カプレカ定数とは呼ばないことにする。一方で $N = 14 = 13 + 1 = F_7 + F_2 = 100001_{(Z)}$ の場合には、

$$M(N) = 101000_{(Z)}, m(N) = 000101_{(Z)} \quad \text{なので}$$

$$K(N) = (F_7 + F_5) - (F_4 + F_2) = F_7 + (F_5 - F_4 - F_2) = F_7 + F_2 = 100001_{(Z)}$$

が成立するので、 $14 = 100001_{(Z)}$ は、ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数であると考ええる。実際には、より一般に次のことが成立することをゼッケンドルフ表現での 1 の数に関する場合分けにより容易に示すことができる。

定理 0.2 ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数 N は、偶数桁 n , $n = 4r + 2s - 2$, ($r \geq 2, s \geq 0$) (従って $n \geq 6$) 桁の場合に存在し、次の形に表される。

$$N = \overbrace{1010 \cdots 10}^{2r-2} 00 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2s} 00 \cdots 0 \overbrace{01}^{2r-4}_{(Z)}$$

従ってゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数は次のように表される。

$$N = (F_{n+1} + F_{n-1} + \cdots + F_{2r+2s+3}) + (F_{2r+2s-1} + \cdots + F_{2r+1}) + F_2$$

ここで $(F_{a+2(b-1)} + F_{a+2(b-2)} + \cdots + F_{a+2} + F_a) + F_{a-1} = (F_{a+2(b-1)} + F_{a+2(b-2)} + \cdots + F_{a+2}) + F_{a+1} = F_{a+2b-1}$ なので N の簡単な表記は次のようになる。

$$\begin{aligned} N &= (F_{4r+2s} - F_{2r+2s+2}) + (F_{2r+2s} - F_{2r}) + F_2 = (F_{4r+2s} - F_{2r+2s+2}) + (F_{2r+2s} - F_{2r}) + 1 \\ &= F_{4r+2s} - F_{2r+2s+1} - F_{2r} + 1 \end{aligned}$$

ここでは、上の形のカプレカ定数を (r, s) 型と呼び $K_{(Z)}(r, s)$ と表す。すなわち

$$K_{(Z)}(r, s) = F_{4r+2s} - F_{2r+2s+1} - F_{2r} + 1$$

また n が $n \geq 4$ の偶数桁の場合には、次のようなカプレカループが存在する。

定理 0.3 $a = \overbrace{0100 \cdots 0}^{n-2}_{(Z)}, b = \overbrace{0101 \cdots 01}^n_{(Z)}$ とすると $K(a) = b, K(b) = a$ となる。

一方で n が奇数の場合は、カプレカ定数は存在しないが、各桁でカプレカ操作で不変な次のような数がただ 1 つ存在する。

定理 0.4 $n = 2r + 1$ 桁のゼッケンドルフ表現のうち、次の形の数 N は、カプレカ操作で不変なただ 1 つの数である。 $N = 0 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2r}_{(Z)}$

ここで

$$0 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2r}_{(Z)} = F_{2r+1} + F_{2r-1} + \cdots + F_3 = F_{2r+2} - 1$$

ゼッケンドルフ表現でのカプレカ数の表を小さなものから少し載せておく。

表 1 (ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数)

N	(r, s)	$4r + 2s$	$2r + 2s + 1$	$2r$	2	カプレカ定数
6	(2, 0)	8	5	4	2	14
8	(2, 1)	10	7	4	2	40
10	(2, 2)	12	9	4	2	108
10	(3, 0)	12	7	6	2	124
12	(2, 3)	14	11	4	2	286
12	(3, 1)	14	9	6	2	336
14	(2, 4)	16	13	4	2	752
14	(3, 2)	16	11	6	2	891
14	(4, 0)	16	9	8	2	933
16	(2, 5)	18	15	4	2	1972
16	(3, 3)	18	13	6	2	2344
16	(4, 1)	18	11	8	2	2475

注意 0.5 Zeckendorf representation および Kaprekar constant, Kaprekar number 等いくつかの単語を組み合わせでネット検索しても、文献等は見つかっていない。また OEIS で上の数列を検索してもヒットしないので、ここで述べたゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数を考察するという試みは、新しい試みであると考えられる。

注意 0.6 2進カプレカ定数および Zeckendorf 表現でのカプレカ操作は、共に位取り記数法に表れる 1 の総数に関する同値類上の操作である。以下で概略は述べるが、2 を底とするカプレカ定数（無限系列）とここで得られた Zeckendorf 表現でのカプレカ定数（無限系列）には自然な全単射が定まる。一見双方の同値類の対応から定まる自明な全単射に見えるのだが、カプレカ操作自体は双方でまったく異なる動きが起きる。カプレカ操作で不変な同値類に限ることで、双方でのカプレカ操作の違いが見えなくなって得られる全単射であって、かなり非自明な現象であると考えている。

注意 0.7 最後に触れているが、底 2 の第 2 カプレカ定数（準カプレカ定数？）と、Zeckendorf representation での第 2 カプレカ定数は、共に無限個の系列を持つ。実は 1 個だけの例外が現れるが、それを除けば、無限系列どうしの全単射が定まる。この例外のカプレカ定数が生じたことは、双方での同値類の対応のズレが、第 1 カプレカ操作で不変なものでは現れなかったが、第 2 カプレカ操作で不変なものでは、現れたということに他ならない。

次にゼッケンドルフ表現と 2 進数表示でのカプレカ定数の関係について、まず 2 次節以降で考察を行うことにしよう。

4. 2 進カプレカ定数

定理 0.8 $n = 2r + s$, ($r \geq 2, s \geq 0$) 桁の 2 進数のカプレカ定数は、次のように表せる。

$$N = \overbrace{11 \cdots 1}^{r-1} 0 \overbrace{11 \cdots 1}^s \overbrace{00 \cdots 0}^{r-1} 1_{(2)}$$

ここで、上の形の 2 進カプレカ定数を (r, s) 型と呼ぶことにする。

$$N = (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^{r+s+1}) + (2^{r+s-1} + \cdots + 2^r) + 1$$

公比 2 の等比数列の和の公式を用いれば

$$N = (2^n - 2^{r+s+1}) + (2^{r+s} - 2^r) + 1 = 2^n - 2^{r+s} - 2^r + 1$$

この $n = 2r + s$ 桁の (r, s) 型の 2 進カプレカ定数を $K_{(2)}(r, s)$ で表す。すなわち

$$K_{(2)}(r, s) = 2^n - 2^{r+s+1} + 2^{r+s} - 2^r + 1$$

さらに 2 進カプレカ定数 $K_{(2)}(r, s)$ は次のように変形できる。

$$K_{(2)}(r, s) = 2^n - 2^{r+s+1} + 2^{r+s} - 2^r + 1 = 2^n - 2^{r+s} - 2^r + 1 = (2^r - 1)(2^{r+s} - 1)$$

また $n \geq 3$ のとき次のようなカプレカ操作で不変な（カプレカ定数でない）数が各桁でただ 1 つだけ存在することも容易に示すことができる。

定理 0.9 $N = 0 \overbrace{11 \cdots 1}^{n-1} 1_{(2)}$ はカプレカ操作 K で不変である。

証明) $M(N) = \overbrace{11 \cdots 1}^{n-1} 0_{(2)} = 2^{n-1} + \cdots + 2$, $m(N) = 0 \overbrace{11 \cdots 1}^{n-1} 1_{(2)} = 2^{n-2} + \cdots + 1$ なので

$$K(N) = M(N) - m(N) = 2^{n-2} + \cdots + 1 = N = 2^{n-1} - 1, \text{Q.E.D.}$$

表 2 n けたの 2 進カプレカ定数の表 ($4 \leq n \leq 12$)

n	r	s	2 進カプレカ定数
4	2	0	9
5	2	1	21
6	2	2	45
6	3	0	49
7	2	3	93
7	3	1	105
8	2	4	189
8	3	2	217
8	4	0	225
9	2	5	381
9	3	3	441
9	4	1	465
10	2	6	765

n	r	s	2 進カプレカ定数
10	3	4	889
10	4	2	945
10	5	0	961
11	2	7	1533
11	3	5	1785
11	4	3	1905
11	5	0	1953
12	2	8	3069
12	3	6	3577
12	4	4	3825
12	5	2	3937
12	6	0	3969

5. ゼッケンドルフ表現と 2 進表現のカプレカ定数の関係

一般に $a \neq b$, $\text{GCD}(a, b) = 1$ であれば, 整数の a 進表現と b 進表現は, 独立性がある。中国剰余定理の示すところは, その独立性の端的な例である。さてゼッケンドルフ表現と 2 進表現は, 各桁の数が 0, 1 で表せる事実には類似があるとも言えないこともないものの, 同じ数を 2 つの表現で表すと, 当たり前だが全く異なる表示になる。例えば 7 を双方の表現で表すと次の通りである。

$$111_{(2)} = 4 + 2 + 1 = 7 = F_5 + F_3 = 1010_{(Z)}$$

実際カプレカ操作に関しては, ゼッケンドルフ表現では, ループが無数に現れるのに対し, 2 進表現では, ループはまったく現れない。カプレカー操作に関して位取り記数法としてのゼッケンドルフ表現と 2 進表現は, まったく異なる表現であることは, このことから明らかである。しかしながらカプレカ操作で不変な数 (カプレカ定数を含む) に限ってみれば, 両者には次のように密接な関係が存在することが発見できた。ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数全体の集合 $K_{(Z)}$ は, $n = 4r + 2s - 2$ の偶数けたの数からなる $K_{(Z)} = \{K_{(Z)}(r, s) \mid r \geq 2, s \geq 0\}$ である。

2 進表現でのカプレカ定数全体の集合 $K_{(2)}$ は, $n = 2r + s$ のけたの数からなる $K_{(2)} = \{K_{(2)}(r, s) \mid r \geq 2, s \geq 0\}$ である。

$$K_{(Z)}(r, s) = (F_{4r+2s} - F_{2r+2s+2}) + (F_{2r+2s} - F_{2r}) + 1$$

$$K_{(2)}(r, s) = (2^n - 2^{r+s+1}) + (2^{r+s} - 2^r) + 1$$

なので, 写像 $f: K_{(Z)} \rightarrow K_{(2)}$ を上の表示で

$$f(1) = 1, f(F_{2t}) = 2^t \text{ で定めると}$$

$$f(K_{(Z)}(r, s)) = K_{(2)}(r, s)$$

となりゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数 $K_{(Z)}$ と 2 進表現でのカプレカ定数 $K_{(2)}$ の間に自然な全単射 f を定めることができる。また $K_{(Z)}(r, s)$ のゼッケンドルフ表現自体からの

直接対応を決めることによって、次に述べるように全単射 f が説明できる。今ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数 $K_{(Z)}(r, s)$ のゼッケンドルフ表現での表示を $F_2 = F_1 = 1$ を用いて最後の項だけ変形しておくとな次のように表せる。

$$\begin{aligned} K_{(Z)}(r, s) &= (F_{4r+2s-1} + F_{4r+2s-3} + \cdots + F_{2r+2s+3}) + (F_{2r+2s-1} + F_{2r+2s-3} + \cdots + F_{2r+1}) + F_2 \\ &= (F_{4r+2s-1} + F_{4r+2s-3} + \cdots + F_{2r+2s+3}) + (F_{2r+2s-1} + F_{2r+2s-3} + \cdots + F_{2r+1}) + F_1 \end{aligned}$$

すなわちカプレカ一定数を次のように表示したとき

$$K_{(Z)}(r, s) = \overbrace{1010 \cdots 10}^{2r-2} 00 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2s} \overbrace{00 \cdots 00}^{2r-4} 01_{(Z)}$$

その最後の $0 \times F_3 + 1 \times F_2$ を $0 \times F_3 + 0 \times F_2 + 1 \times F_2 + 0 \times F_0$ と表すことにより F_0 からの係数として次のように表すことにして、仮に“変形ゼッケンドルフ表現”と呼び、その表現を新たに $\tilde{K}_{(\tilde{Z})} = (*)_{(\tilde{Z})}$ という記号で表しておく

$$\tilde{K}_{(\tilde{Z})}(r, s) = \overbrace{1010 \cdots 10}^{2r-2} 00 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2s} \overbrace{00 \cdots 00}^{2r-2} 10_{(\tilde{Z})}$$

一方 2 進表示でのカプレカ定数 $K_{(2)}(r, s)$ の 2 進表示は

$$\begin{aligned} K_{(2)}(r, s) &= (2^{2r+s-1} + 2^{2r+s-1} + \cdots + 2^{r+s+1}) + (2^{r+s-1} + 2^{r+s-2} + \cdots + 2^r) + 1 \\ &= \overbrace{11 \cdots 1}^{r-1} 0 \overbrace{11 \cdots 1}^s \overbrace{00 \cdots 0}^{r-1} 1_{(2)} \end{aligned}$$

対応を $f: F_{2k+1} \rightarrow 2^k$ としても全単射写像 f は得られることが分かる。また次の表示で $f: 10 \rightarrow 1, f: 00 \rightarrow 0$ と機械的に縮めることによって全単射写像 f が導かれる。

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{(\tilde{Z})}(r, s) &= \overbrace{1010 \cdots 10}^{2r-2} 00 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2s} \overbrace{00 \cdots 00}^{2r-2} 10_{(\tilde{Z})} \\ K_{(2)}(r, s) &= \overbrace{11 \cdots 1}^{r-1} 0 \overbrace{11 \cdots 1}^s \overbrace{00 \cdots 0}^{r-1} 1_{(2)} \end{aligned}$$

全単射写像 f の対応を図示しておくとな次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} K_{(Z)}(r, s) & = & (F_{4r+2s} - F_{2r+2s+2}) & + & (F_{2r+2s} - F_{2r}) & + & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_{(2)}(r, s) & = & (2^{2r+s} - 2^{r+s+1}) & + & (2^{r+s} - 2^r) & + & 1 \end{array}$$

写像 f を“変形ゼッケンドルフ表現”と 2 進表示との関係で示せば次のように表せる。

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{K}_{(\tilde{Z})}(r, s) & = & \overbrace{1010 \cdots 10}^{2r-2} & 00 & \overbrace{1010 \cdots 10}^{2s} & \overbrace{00 \cdots 00}^{2r-2} & 10 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ K_{(2)}(r, s) & = & \overbrace{11 \cdots 1}^{r-1} & 0 & \overbrace{11 \cdots 1}^s & \overbrace{00 \cdots 0}^{r-1} & 1 \end{array}$$

同じようにゼッケンドルフ表現と 2 進表示でカプレカ操作で不変な数の間にも全単射が存在することが次のようにしてわかる。ゼッケンドルフ表現において、カプレカ操作で不変な $2n-1$ 桁の数 $L_{(Z)}(2n-1)$ は次のように表される。

$$L_{(Z)}(2n-1) = 0 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2n-2}_{(Z)}$$

ここで

$$0 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2n-2}_{(Z)} = F_{2n-1} + F_{2n-3} + \cdots + F_3 = F_{2n} - 1$$

一方で 2 進表現でカプレカ定数ではないが、カプレカ操作で不変となる n 桁の数 $L_{(2)}(n)$ は次のように表された。

$$L_{(2)}(n) = 0 \overbrace{11 \cdots 1}^{n-1}_{(2)} = 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 1 = 2^{n-1} - 1$$

$L_{(Z)} = \{L_{(Z)}(2n-1) \mid n \geq 2\}$ をゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数でないカプレカ操作で不変な数 $L_{(Z)}(2n-1)$ 全体の集合とする。同様に $L_{(2)} = \{L_{(2)}(n) \mid n \geq 2\}$ を 2 進法でのカプレカ定数でないカプレカ操作で不変な数 $L_{(2)}(n)$ 全体の集合とする。

$g: F_{2k+1} \rightarrow 2^{k-1}$ と対応させることによって

$$g(F_{2n-1} + F_{2n-3} + \cdots + F_3) = 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 1$$

従って $g(K_{(Z)}(2n-1)) = K_{(2)}(n)$ で、 g は $L_{(Z)}$ から $L_{(2)}$ への全単射となる。

なお $g: 10 \rightarrow 1$ という対応で 10 を 1 に機械的に縮めていく操作を行って、ゼッケンドルフ表現と 2 進表示の対応を書き直すと

$$g(0 \overbrace{1010 \cdots 10}^{2n-2}_{(Z)}) = 0 \overbrace{11 \cdots 1}^{n-1}_{(2)}$$

g の対応を図示しておくと次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} L_{(Z)}(2n-1) & = & F_{2n-1} & + & F_{2n-3} & + & \cdots & + & F_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ L_{(2)}(n) & = & 2^{n-2} & + & 2^{n-3} & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

ゼッケンドルフ表現と 2 進表示で g の対応を表し直すと

$$\begin{array}{ccccccc} L_{(Z)}(2n-1) & = & 0 & \overbrace{1010 \cdots 10}^{2n-2}_{(Z)} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ L_{(2)}(n) & = & 0 & \overbrace{11 \cdots 1}^{n-1}_{(2)} \end{array}$$

6. 第2カプレカ定数（富岡西の命名では、第2カプレカ数）の可能性について

k を自然数とする。 b を底とする第 k カプレ操作でまず、 b 進 $n \geq 2k - 1$ 桁以上の整数 N に対し $N = aa \dots a_b$ に対しては、値 0 を取るものとする。その他の $N \neq aa \dots a_b$ に対しては、 N の 10 進表示の各桁の数を並べ替えて得られる数を大小順序に並べる。このとき上から k 番目の数を $M_k(N)$ とし、最小の数から数えて下から k 番目の数を $m_k(N)$ とするとき、その差を取る操作

$$K_k(N) = M_k(N) - m_k(N)$$

を第 k カプレカ操作と呼ぶ。特に $K_k(N) = N$ となる N を第 k カプレカ定数と呼ぶことにする。以降では、第2カプレカ定数について考察する。

Zeckendorf 表現での第2カプレカ定数は、次のように表せる

定理 0.10 ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数 N は、例外の 8 桁の 1 つと、 $N = 4r + 1$, ($r \geq 2$) (従って $n \geq 9$) 桁の場合に存在し、次の形に表される。

$N = 100000010_{(Z)}$ 2 進第2カプレカ定数と対応のない第2カプレカ定数

$$N = \overbrace{1010 \dots 10}^{2r-2} 0010 \overbrace{1010 \dots 10}^{2r-2} 0_{(Z)} \quad r \geq 2 \text{ の無限系列}$$

上の定理での第2カプレカ定数の無限系列は、次のように表せる

$$\begin{aligned} N &= (F_{4r+2} + F_{4r} + \dots + F_{2r+6} + \dots + F_{2r+2}) + F_2 \\ &= F_{4r+3} - F_{2r+5} + F_{2r+1} + 1 \end{aligned}$$

上の形のカプレカ定数を r 型と呼び $K_2^{(Z)}(r)$ と表す。

2 進第2カプレカ定数

定理 0.11 $n = 2r + 2$, ($r \geq 2$) 桁の 2 進数のカプレカ定数は、次のように表せる。

$$N = \overbrace{11 \dots 1}^{r-1} 010 \overbrace{00 \dots 0}^{r-1} 1_{(2)}$$

ここで、上の形の 2 進カプレカ定数を r 型と呼ぶことにする。

$$N = (2^{2r+1} + 2^{2r} + \dots + 2^{r+3}) + 2^{r+1} + 1$$

この $n = 2r + 2$ 桁の r 型の 2 進カプレカ定数を $K_2^{(2)}(r)$ で表す。すなわち

$$K_2^{(2)}(r) = 2^n - 2^{r+3} + 2^{r+1} + 1$$

Zeckendorf 表現での 8 桁の第2カプレカ数を除けば、すべての $K_2^{(Z)}(r) - 1$ と $K_2^{(2)}(r) - 1$ との間には

$$f : F_{2k} \longrightarrow 2^k$$

により全単射が決まる。

注意 0.12 第2カプレカ定数の可能性としては、2 進表現なら無限系列があることが分かる。元々の富岡西の研究では、10 進表記で考察していたが、他の底 b でも通常のカプレカ定数と同様の性質があることが期待できる。またこの節での観察結果は、ゼッケンドルフ表現と 2 進でのカプレカ定数の間では、全単射が存在し強い類似性が生じたが、第2カプレカ定数までみると全単射性は保たれないことを意味している。 k を大きくした k t h カプレカ定数どうしでは、両者のずれはさらに大きくなっていくと思われる。

第2カプレカ数の可能性

徳島県立富岡西高等学校
阿部靖史 成松悠汰 米崎聖梧

カプレカ数とは

n 桁の数 N の各桁の数を並べ替えて得られる最大の数を $M(N)$ 、最小の数を $m(N)$ として、

$$M(N) - m(N)$$

という操作を繰り返すと、複数の数で循環、または一つの数に収束する。

2025/9/8

2

カプレカ数とは

特に、

$$M(N) - m(N) = N$$

となるとき、 N をカプレカ数と呼ぶ。

3桁のカプレカ数は 495

4桁のカプレカ数は 6174

2025/9/8

3

2024の場合

$$4220 - 0224 = 3996$$

$$9963 - 3699 = 6264$$

$$6642 - 2466 = 4176$$

$$7641 - 1467 = \mathbf{6174}$$

$$7641 - 1467 = \mathbf{6174}$$

カプレカ数の紹介

2桁 81→63→27→45→09→81→...

3桁 495

4桁 6174

5桁 74943→62964→71973→83952→74943→...
75933→63954→61974→82962→75933→...
59994→53955→59994→...

カプレカ数の拡張

私たちは「最大の数－最小の数」ではなく

「 **k 番目に大きい数－ k 番目に小さい数**」

ではどうなるのかに興味を持ち、

第 **k カプレカ数**と名付けて

その存在を調べることにした。

9/8/2025

4

定義

k を自然数とする。

第 k カプレカ数とは、 $2k-1$ 桁以上の整数 N で

$N = aa \cdots a_{(10)}$ に対しては、値 0 を取るものとする。

その他の $N \neq aa \cdots a_{(10)}$ に対しては、 N の 10 進表示の各桁の数を並び替えて得られる数を大小順序に並べる。

定義

このとき上から k 番目の数を $M_k(N)$ とし、下から k 番目の数を $m_k(N)$ とするとき、その差を取る操作

$$K_k(N) = M_k(N) - m_k(N)$$

を第 k カプレカ操作と呼ぶ。

特に $K_k(N) = N$ となる N を第 k カプレカ数と呼ぶ。

私達は、 $k = 2$ として
第 2 カプレカ数について
考察した。

3 桁の第 2 カプレカ数

3 桁の各桁の数を大きい順に
 a 、 b 、 c として、
次に示す各場合について
考察する。

a, b, c で考えられる全ての場合
(3 桁)

$$a > b > c$$

$$a = b > c$$

$$a > b = c$$

$$a = b = c$$

$a > b > c$ のとき

$$M_2(N) = 100a + 10c + b$$

$$- m_2(N) = 100c + 10a + b$$

$$90(a - c)$$

90(a-c)の取り得る値

	1 8 0	2 7 0	
3 6 0	4 5 0	5 4 0	
6 3 0	7 2 0	8 1 0	

90(a-c)の取り得る値

	1 8 0	2 7 0	
3 6 0	4 5 0	5 4 0	
6 3 0	7 2 0	8 1 0	

a=b>c のとき

$$M_2(N) = 100a + 10c + a$$

$$- m_2(N) = 100a + 10c + a$$

0**a>b=c のとき**

$$M_2(N) = 100b + 10a + b$$

$$- m_2(N) = 100b + 10a + b$$

0**結果**

3桁の自然数に第2カプレカ操作を1回行った際にできる3つの数字の組み合わせは

5通りに絞り込むことができる。

すべての3桁の自然数は、操作を繰り返すと

4 5 0 という数字に収束した。

3桁の第2カプレカ数

$$K_2(450) = 504 - 054$$

$$= \underline{450}$$

よって、3桁の第2カプレカ数は

4 5 0

4桁の第2カプレカ数

4桁の各桁の数を大きい順に
a、b、c、dとして、
次に示す各場合について
考察する。

a,b,c,dで考えられる全ての場合 (4桁)

$a > b > c > d$	$a = b > c > d$
$a > b = c > d$	$a > b > c = d$
$a = b = c > d$	$a = b > c = d$
$a > b = c = d$	$a = b = c = d$

$a > b > c > d$ のとき

$$M_2(N) = 1000a + 100b + 10d + c$$

$$- m_2(N) = 1000d + 100c + 10a + b$$

$$99\{10(a-d) + (b-c)\}$$

a-d	b-c
9	7から1
8	6から1
7	5から1
6	4から1
5	3から1
4	2から1
3	1

$\{10(a-d) + (b-c)\}$ の取り得る値

9 7	9 6	9 5	9 4	9 3	9 2	9 1
	8 6	8 5	8 4	8 3	8 2	8 1
		7 5	7 4	7 3	7 2	7 1
			6 4	6 3	6 2	6 1
				5 3	5 2	5 1
					4 2	4 1
これらの数に99をかけると…						3 1

$99\{10(a-d) + (b-c)\}$ の取り得る値

9603	9504	9405	9306	9207	9108	9009
	8514	8415	8316	8217	8118	8019
		7425	7326	7227	7128	7029
			6336	6237	6138	6039
				5247	5148	5049
					4158	4059
						3069

対になる数の組合せが
対になる数も合わせると、
1 3通り 対称

$a > b = c > d$ のとき

$$M_2(N) = 1000a + 100b + 10d + b$$

$$\text{--- } m_2(N) = 1000d + 100b + 10a + b$$

$$990(a-d)$$

990(a-d)の取り得る値

	1 9 8 0	2 9 7 0
3 9 6 0	4 9 5 0	5 9 4 0
6 9 3 0	7 9 2 0	8 9 1 0

990(a-d)の取り得る値

	1 9 8 0	2 9 7 0
3 9 6 0	4 9 5 0	5 9 4 0
6 9 3 0	7 9 2 0	8 9 1 0

9603	9504	9405	9306	9207	9108	9009
8514	8415	8316	8217	8118	8019	
	7425	7326	7227	7128	7029	
		6336	6237	6138	6039	
			5247	5148	5049	
				4158	4059	
					3069	

$a > b > c > d$ の場合に同じ数の組み合わせがある

$a = b > c > d$ のとき

$$M_2(N) = 1000a + 100a + 10d + c$$

$$\text{--- } m_2(N) = 1000d + 100a + 10c + a$$

$$9\{100(a-d) + 10(a-d) + (a-c)\}$$

a-d	a-c
9	8から1
8	7から1
7	6から1
6	5から1
5	4から1
4	3から1
3	2から1
2	1

$a > b > c = d$ のとき

$$M_2(N) = 1000a + 100c + 10b + c$$

$$-m_2(N) = 1000c + 100c + 10a + b$$

$$9\{100(a-c) + 10(a-c) + (b-c)\}$$

a-c	b-c
9	8から1
8	7から1
7	6から1
6	5から1
5	4から1
4	3から1
3	2から1
2	1

$$\{100(a-d) + 10(a-d) + (a-c)\}$$

$$\{100(a-c) + 10(a-c) + (b-c)\}$$

の取り得る値

998 997 996 995 994 993 992 991
 887 886 885 884 883 882 881
 776 775 774 773 772 771
 665 664 663 662 661
 554 553 552 551
 443 442 441
 332 331
 221

9を掛けた値

8982 8973 8964 8955 8946 8937 8928 8919
 7983 7974 7965 7956 7947 7938 7929
 6984 6975 6966 6957 6948 6939
 5985 5976 5967 5958 5949
 4986 4977 4968 4959
 3987 3978 3969
 2988 2979
 1989

1 1 通りの組み合わせがあり

これらは全て新しい組み合わせ

 $a = b > c = d$ のとき

$$M_2(N) = 1000a + 100c + 10a + c$$

$$-m_2(N) = 1000c + 100a + 10c + a$$

$$909(a-c)$$

909(a-c)の取り得る値

909

1818

2727

3636

4545

5454

6363

7272

8181

1 通りの新しい組み合わせ

$a=b=c>d$ のとき

$$M_2(N) = 1000a + 100a + 10d + a$$

$$- m_2(N) = 1000a + 100d + 10a + a$$

$$90(a-d)$$

$a>b=c=d$ のとき

$$M_2(N) = 1000b + 100a + 10b + b$$

$$- m_2(N) = 1000b + 100b + 10a + b$$

$$90(a-b)$$

90(a-d)と90(a-b)の取り得る値

9 0	1 8 0	2 7 0
3 6 0	4 5 0	5 4 0
6 3 0	7 2 0	8 1 0

これらの5通りは新しい組み合わせ

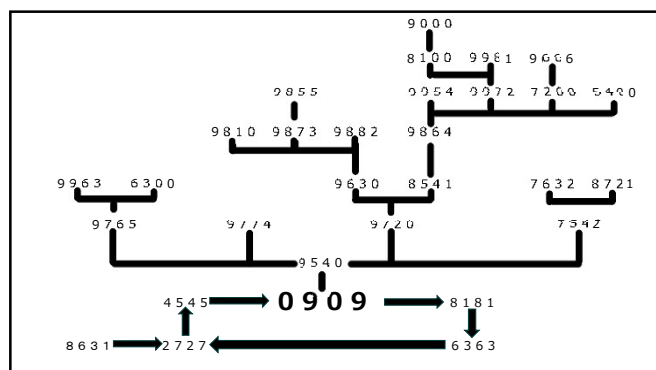
結果

4桁の自然数に第2カブレカ操作を1回行った際にできる4つの数字の組み合わせは

3 1 通りに絞りが込むことができる。

すべての4桁の自然数は、操作を繰り返すと

0909→8181→6363→2727→4545→0909→...でループする。



4桁の第2カブレカ数

0909→8181→6363→2727→4545

2桁のカブレカ数

09→81→63→27→45

4桁の第2カブレカ数のループと2桁のカブレカ数のループは完全に対応している

5桁、6桁の第2カプレカ数

5桁 73926

6桁 949905

5桁の第2カプレカ数

$$K_2(73926) = 97623 - 23697 \\ = \underline{73926}$$

よって、5桁の第2カプレカ数は
73926

5桁の第2カプレカ数

83916 \rightleftharpoons 84915
というループもある。

6桁の第2カプレカ数

$$K_2(949905) = 999504 - 49599 \\ = \underline{949905}$$

よって、6桁の第2カプレカ数は
949905

考察

1. 第2カプレカ数もカプレカ数と同様に無限に存在する。
2. カプレカ数と第2カプレカ数には、よく似た性質がある。

今後の展望

1. 第3カプレカ数に挑戦する。
2. 第2カプレカ数について、ほかの性質や規則性が無いか調べる。
3. n進法の場合でも試してみる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、多大なるご指導と
ご助言を賜りました徳島大学教授片山真一先生
に心より感謝申し上げます。

Ladder and Matrix Calculations for Various Sequences

Shingo Nakanishi, Osaka Institute of Technology, Japan

Annual meeting of the Japan Fibonacci Association, August 22, 2025

1. Introduction

In this study, we would like to confirm some ladder calculations using matrix forms for displaying various sequences. “Hashigo-san” which is called ladder calculation in Japanese is used as another arithmetic concept. On the other hand, there might not be existed as ladder calculations in English although we have searched for that. Therefore, we would like to name the title of this study as that for understanding the meaning easily. These concepts come from the original Fibonacci matrices [2,3] to extend that systematically and concretely. We would like to show several illustrations of various sequences such as skipped weighted Gibonacci sequences [4] and generalized Padovan sequences throughout this study.

2. Definition of Weighed Gibonacci ladders

If we use the original Fibonacci sequence as the following equation

$$F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2), \quad (1)$$

we can also estimate the weighted Gibonacci sequence with the weights a and b as follows

$$G_{(a,b),0} = g_0, G_{(a,b),1} = g_1, G_{(a,b),j} = a \cdot G_{(a,b),j-1} + b \cdot G_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (2)$$

where g_0 , g_1 , a , and b are integer numbers.

As we know, we can show the original Fibonacci matrix from Equation (1) simply. That is

$$\begin{pmatrix} F_{(1,1),0} & F_{(1,1),1} \\ F_{(1,1),1} & F_{(1,1),2} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} F_{(1,1),l} \\ F_{(1,1),l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{(1,1),l+j} \\ F_{(1,1),l+j+1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

or

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} F_{(1,1),l} \\ F_{(1,1),l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{(1,1),l+j} \\ F_{(1,1),l+j+1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

In the same manner, we can show the weighted Gibonacci matrix from Equation (2) clearly. That is

$$\begin{pmatrix} b \cdot F_{(a,b),0} & F_{(a,b),1} \\ b \cdot F_{(a,b),1} & F_{(a,b),2} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} G_{(a,b),l} \\ G_{(a,b),l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{(a,b),l+j} \\ G_{(a,b),l+j+1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

or

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} G_{(1,1),l} \\ G_{(1,1),l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{(1,1),l+j} \\ G_{(1,1),l+j+1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Therefore, we can make the table as the tendencies from Equations (3), and (4) shown in Table 1 and that from Equations (5), and (6) shown in Table 2 to compare that easily. From Tables 1 and 2, we can imagine the ladder calculations using matrices. From table 2, we can also understand the sequence with red letters on the table 1 means the weighted Fibonacci sequence with the weight a and b times b , and the sequence with green letters means the weighted Fibonacci sequence if we estimate $g_0 = 0$ nad $g_1 = 1$ based on Equation (2).

From above mentioned, we can imagine the ladder calculation of the fundamental weighed Gibonacci sequence.

Table 1 One of the ladder calculations for the original Fibonacci sequence

j			Original Fibonacci Sequence
0	1	0	$F_{(1,1),0} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
1	0	1	$F_{(1,1),1} = 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$
2	1	1	$F_{(1,1),2} = 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1$
3	1	2	$F_{(1,1),3} = 1 \times 0 + 2 \times 1 = 2$
4	2	3	$F_{(1,1),4} = 1 \times 0 + 3 \times 1 = 3$
5	3	5	$F_{(1,1),5} = 1 \times 0 + 5 \times 1 = 5$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Table 1 One of the ladder calculations for the weighted Gibonacci sequence

j			Original Fibonacci Sequence
0	1	0	$G_{(a,b),0} = 1 \times g_0 + 0 \times g_0 = g_0$
1	0	1	$G_{(a,b),1} = 0 \times g_0 + 1 \times g_1 = g_1$
2	$1 \cdot b$	a	$G_{(a,b),2} = 1 \cdot b \times g_0 + a \times g_1$
3	$a \cdot b$	$a^2 + b$	$G_{(a,b),3} = a \cdot b \times g_0 + (a^2 + b) \times g_1$
4	$(a^2 + b) \cdot b$	$a^3 + 2ab$	$G_{(a,b),4} = (a^2 + b) \cdot b \times g_0 + (a^3 + 2ab) \times g_1$
5	$(a^3 + 2ab) \cdot b$	$a^4 + 3a^2b + b^2$	$G_{(a,b),5} = (a^3 + 2ab) \cdot b \times g_0 + (a^4 + 3a^2b + b^2) \times g_1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

3. Definition of Skipped Weighted Gibonacci ladders

If we think the original Fibonacci sequence as $(k - 2)$ skipped Fibonacci sequences using the addition theorem as follows

$$\begin{aligned} F_{(1,1),0} &= 0, F_{(1,1),1} = 1, \dots, F_{(1,1),k-1} = F_{(1,1),k-2} + F_{(1,1),k-3} \quad (k \geq 3), \\ F_{(1,1),j} &= (F_{(1,1),k}) \cdot F_{(1,1),j-(k-1)} + (F_{(1,1),k-1}) \cdot F_{(1,1),j-k} \quad (j \geq k), \end{aligned} \quad (7)$$

we can also change the weighted Gibonacci sequences to the equations in the same way. That is

$$\begin{aligned} G_{(a,b),0} &= g_1, G_{(a,b),1} = g_2, \dots, G_{(a,b),k-1} = a \cdot G_{(a,b),k-2} + b \cdot G_{(a,b),k-3} \quad (k \geq 3), \\ G_{(a,b),j} &= (F_{(a,b),k}) \cdot G_{(a,b),j-(k-1)} + b \cdot (F_{(a,b),k-1}) \cdot G_{(a,b),j-k} \quad (j \geq k). \end{aligned} \quad (8)$$

Based on Equation (7), we would like to create the table as shown in Table 3. In Table 3, we can estimate the equation

$$G_{(a,b),k} = A_0 g_0 + A_1 g_1 + \dots + A_{k-2} g_{k-2} + A_{k-1} g_{k-1} \quad (9)$$

should be composed of the Equation (8) or some combinations of the Equation (8) concretely. We can calculate the ladder calculations using the matrix form as follows. That is

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} G_{(a,b),l} \\ G_{(a,b),l+1} \\ \vdots \\ G_{(a,b),l+k-2} \\ G_{(a,b),l+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{(a,b),l+m} \\ G_{(a,b),l+m+1} \\ \vdots \\ G_{(a,b),l+m+k-2} \\ G_{(a,b),l+m+k-1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Table 2 Illustrative example of the ladder calculations for the skipped weighted Gibonacci sequence

j	0				$k-1$	Skipped Weighted Gibonacci Sequence
0	1	0	0	$G_{(a,b),0} = g_0$
1	0	1	\ddots		\vdots	$G_{(a,b),1} = g_1$
\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\ddots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots		\ddots	1	0	\vdots
$k-1$	0	0	1	$G_{(a,b),k-1} = g_{k-1}$
k	A_0	A_{k-2}	A_{k-1}	$G_{(a,b),k} = A_0 g_0 + A_1 g_1 + \dots + A_{k-2} g_{k-2} + A_{k-1} g_{k-1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Therefore, we can display several illustrative examples. For example 1, 2 kipped Pell-Lucas sequence is calculated as

$$G_{(2,1),0} = 2, G_{(2,1),1} = 2, G_{(2,1),2} = 6, G_{(2,1),3} = 14, G_{(2,1),j} = 12 \cdot G_{(2,1),j-3} + 5 \cdot G_{(2,1),j-4} \quad (j \geq 4). \quad (11)$$

From Equation (11), we can show the equation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{(2,1),m} \\ G_{(2,1),m+1} \\ G_{(2,1),m+2} \\ G_{(2,1),m+3} \end{pmatrix} \quad (l = 0, k = 4). \quad (12)$$

For example 2, if we think of 1 skipped Fibonacci sequence

$$F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),j} = 2 \cdot F_{(1,1),j-2} + 1 \cdot F_{(1,1),j-3} \quad (j \geq 3)$$

as

$$\begin{aligned} F_{(1,1),0} &= 0, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),1} = 2, F_{(1,1),1} = 3, \\ F_{(1,1),j} &= 2 \cdot F_{(1,1),j-3} + 3 \cdot F_{(1,1),j-4} + 1 \cdot F_{(1,1),j-5} \quad (j \geq 5), \end{aligned} \quad (13)$$

we may estimate that as the basic rule of 3 skipped sequence as follows

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{(1,1),m} \\ F_{(1,1),m+1} \\ F_{(1,1),m+2} \\ F_{(1,1),m+3} \\ F_{(1,1),m+4} \end{pmatrix} \quad (l = 0, k = 5). \quad (14)$$

4. Definition of Generalized Padovan ladders

If we consider plastic ratio ρ based on the equations

$$\rho^3 = \rho + 1, \rho^5 = \rho^4 + 1, \rho^8 = \rho^4 + \rho^3 + \rho^2 + \rho + 1, \quad (15)$$

The related generalized Padovan sequence

$$P_{(1,1),0}^{(g_0, g_1, g_2)} = g_0, P_{(1,1),1}^{(g_0, g_1, g_2)} = g_1, P_{(1,1),2}^{(g_0, g_1, g_2)} = g_2, P_{(1,1),j}^{(g_0, g_1, g_2)} = P_{(1,1),j-2}^{(g_0, g_1, g_2)} + P_{(1,1),j-3}^{(g_0, g_1, g_2)} \quad (j \geq 3) \quad (16)$$

should be also estimated as

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(g_0, g_1, g_2)} &= g_0, P_{(1,1),1}^{(g_0, g_1, g_2)} = g_1, P_{(1,1),2}^{(g_0, g_1, g_2)} = g_2, P_{(1,1),3}^{(g_0, g_1, g_2)} = g_3, P_{(1,1),4}^{(g_0, g_1, g_2)} = g_4, \\ P_{(1,1),j}^{(g_0, g_1, g_2)} &= P_{(1,1),j-1}^{(g_0, g_1, g_2)} + P_{(1,1),j-5}^{(g_0, g_1, g_2)} \quad (j \geq 5) \end{aligned} \quad (17)$$

and

$$\begin{aligned}
P_{(1,1),0}^{(g_0,g_1,g_2)} &= g_0, P_{(1,1),1}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_1, P_{(1,1),2}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_2, P_{(1,1),3}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_3, \\
P_{(1,1),4}^{(g_0,g_1,g_2)} &= g_4, P_{(1,1),5}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_5, P_{(1,1),6}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_6, P_{(1,1),7}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_7, \\
P_{(1,1),j}^{(g_0,g_1,g_2)} &= P_{(1,1),j-4}^{(g_0,g_1,g_2)} + P_{(1,1),j-5}^{(g_0,g_1,g_2)} + P_{(1,1),j-6}^{(g_0,g_1,g_2)} + P_{(1,1),j-7}^{(g_0,g_1,g_2)} + P_{(1,1),j-8}^{(g_0,g_1,g_2)} \quad (j \geq 8).
\end{aligned} \tag{18}$$

Interestingly, generalized Padovan ladders can be used with the same concept of the previous section.

From Equation (16) as we know, it is possible to describe the equation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} P_{(1,1),l}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+1}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+2}^{(g_0,g_1,g_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{(1,1),l+m}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+1}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+2}^{(g_0,g_1,g_2)} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

In the same concept, Equation (17) should be rewritten as

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} P_{(1,1),l}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+1}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+2}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+3}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+4}^{(g_0,g_1,g_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{(1,1),l+m}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+1}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+2}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+3}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+4}^{(g_0,g_1,g_2)} \end{pmatrix} \quad (k = 5). \tag{20}$$

This is how Equation (18) should be also shown as

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} P_{(1,1),l}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+1}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+2}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+3}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+4}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+5}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+6}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+7}^{(g_0,g_1,g_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{(1,1),l+m}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+1}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+2}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+3}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+4}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+5}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+6}^{(g_0,g_1,g_2)} \\ P_{(1,1),l+m+7}^{(g_0,g_1,g_2)} \end{pmatrix} \quad (k = 8). \tag{21}$$

5. Conclusions

In this study, we can show the concept of ladder and matrix calculations for various sequences such as skipped weighted Gibonacci sequences and generalized Padovan sequences throughout some illustrative examples. If you use the proper matrix form defined by this study, we can estimate the target sequences with the designated ladders systematically and easily. Moreover, if you would like to compute the negative orders of the target sequences using this concept, you can use the power of matrix m is less than 0 to get that accurately.

Acknowledgments

I would like to express my sincere gratitude to the many researchers who have encouraged and supported my research.

References

- [1] "Hashigo-san", <https://note.com/torieda/n/n9e27653077a3>, (Access date: August 19, 2025) in Japanese.
- [2] Thomas Koshy, "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2, Second edition", Wiley, (2018).
- [3] Gilbert Strang, "Linear Algebra and Its Applications, Fourth edition", Springer, (2005).

- [4] Shingo Nakanishi, “Modified calculations and visualizations for skipped, weighted, or right-upward typed Gibonacci sequences using related Pascal triangles and these matrices (Evolution of Mathematical Decision-Making in Uncertain Environments)”, RIMS Kôkyûroku, Kyoto university, No.2034-13, 114-126, (2025).

$\left| \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right|, \left| \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|$ の明示公式について

田中 璃久^{*}(東京高専 3 年), 南出 大樹[†](東京高専), 中川 幸一[‡]

第 23 回 日本フィボナッチ協会 研究集会

概要

本稿では, 大塚氏による等式 $\left| \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| = F_{\lceil n/2 \rceil} \sqrt{F_{2\lfloor n/2 \rfloor + 1}}$ における 1 の原始 4 乗根 i の部分を拡張し, 原始 3 乗根, 原始 6 乗根について n で閉じた形の明示公式を導出する.

1 序論

本研究は, The Fibonacci Quarterly 2023 年 5 月号に掲載された大塚氏による問題 B-1326 [FQ] から着想を得て行ったものである. この問題は以下の等式の成立を問うものであった.

$$\left| \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| = F_{\lceil n/2 \rceil} \sqrt{F_{2\lfloor n/2 \rfloor + 1}}.$$

本稿の目的は, この問題を出発点として, $m = 3, 6$ の場合について, 1 の原始 m 乗根 $\zeta_m = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$ に対して

$$\left| \sum_{k=0}^n \zeta_m^k F_k \right|$$

を n で閉じた形で明示することである. また, $m = 4$ の場合についても別表示を得たので合わ

^{*} s23109(at)tokyo.kosen-ac.jp

[†] minamide(at)tokyo-ct.ac.jp

[‡] k-nakagawa(at)h6.dion.ne.jp

せて報告する.

主結果.

(1) $\omega = \zeta_3 := \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ とする. 任意の非負整数 n に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\left| 2 \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right|^2 = 2F_n^2 + (-1)^n + 1 + F_{n+1} \cos \frac{2(n-1)}{3}\pi + F_{n-1} \cos \frac{2(n+1)}{3}\pi.$$

(2) $\zeta_6 := \exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)$ とする. 任意の非負整数 n に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\left| 2 \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 = 2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} + 1 - 2F_{n+2} \cos \frac{2n}{6}\pi + 2F_n \cos \frac{2(n-1)}{6}\pi.$$

(3) $\zeta_4 := \exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right)$ とする. 任意の非負整数 n に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\left| \sqrt{5} \sum_{k=0}^n i^k F_k \right|^2 = F_{n+1}L_n + (-1)^{n+1} + 1 - 2F_{n+1} \cos \frac{2n}{4}\pi + 2F_n \cos \frac{2(n-1)}{4}\pi.$$

2 予備知識と補題

主結果を示すために, いくつかの補題を用意しておく.

2.1 基本恒等式

補題 2.1. 任意の非負整数 n に対して, 以下の恒等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (1) \quad F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= F_{2n}, & (2) \quad F_{n+2} + F_{n-2} &= 3F_n, & (3) \quad F_{n+2} - F_{n-2} &= L_n, \\ (4) \quad F_n L_n &= F_{2n}, & (5) \quad L_n^2 &= 5F_n^2 + 4(-1)^n & (6) \quad F_{n+1}F_{n-1} &= F_n^2 + (-1)^n \end{aligned}$$

Proof. これらの恒等式は, フィボナッチ数列の一般項を用いて直接的に証明できる. 詳細は [Ko] Cor. 5.4, 5.5, Thm. 5.8 の証明および Example 33.8 を参照されたい. \square

2.2 重要な関係式

まずは, 先の補題を組み合わせて, 重要となる関係式を作っておく.

補題 2.2. 任意の非負整数 n に対して、次の等式が成り立つ。

$$F_{n+2}^2 + 3F_{n-1}^2 = F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2 = L_n^2 + 3F_n^2 = 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right).$$

Proof. 補題 2.1 の等式を組み合わせてることにより証明する。

まず、最初の等式 $F_{n+2}^2 + 3F_{n-1}^2 = F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2$ を示す。補題 2.1 (2), (3) より、

$$F_{n+2}^2 - F_{n-2}^2 = (F_{n+2} + F_{n-2})(F_{n+2} - F_{n-2}) = 3F_n \cdot L_n.$$

補題 2.1 (4) より $F_n L_n = F_{2n}$ であり、また同補題 (1) より $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ であるから、

$$F_{n+2}^2 - F_{n-2}^2 = 3F_{2n} = 3 \left(F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \right).$$

これを整理すると、

$$F_{n+2}^2 + 3F_{n-1}^2 = F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2.$$

次に、 $F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2 = L_n^2 + 3F_n^2$ を示す。

$$\begin{aligned} L_n^2 - F_{n-2}^2 &= (F_{n+1} + F_{n-1})^2 - (F_n - F_{n-1})^2 \\ &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 + 2F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 \\ &= F_{n+1}^2 - F_n^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} + 2F_{n-1}F_n \\ &= F_{n+1}^2 - F_n^2 + 2F_{n-1}(F_{n+1} + F_n) \\ &= F_{n+1}^2 - F_n^2 + 2(F_{n+1} - F_n)(F_{n+1} + F_n) \\ &= 3F_{n+1}^2 - 3F_n^2. \end{aligned}$$

したがって $F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2 = L_n^2 + 3F_n^2$ が得られる。最後に、補題 2.1 (5) より、

$$L_n^2 + 3F_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n + 3F_n^2 = 8F_n^2 + 4(-1)^n = 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right).$$

以上により補題 2.2 が証明された。 □

2.3 フィボナッチ数の周期和公式

主結果を示すために必要となる, フィボナッチ数の周期的和に関する一般公式を示す.

補題 2.3. 任意の正整数 m, n および i に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^n F_{mk-i} = \frac{F_{mn+m-i} - F_{m-i} - (-1)^m F_{mn-i} + (-1)^m F_{-i}}{L_m - (-1)^m - 1}.$$

Proof. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ と置くと, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ である. また, $\sum_{k=1}^n r^k = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1}$ ($r \neq 1$) に注意すると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{mk-i} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^n (\alpha^{mk-i} - \beta^{mk-i}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{-i} \sum_{k=1}^n (\alpha^m)^k - \beta^{-i} \sum_{k=1}^n (\beta^m)^k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{-i} \cdot \frac{\alpha^m (\alpha^{mn} - 1)}{\alpha^m - 1} - \beta^{-i} \cdot \frac{\beta^m (\beta^{mn} - 1)}{\beta^m - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^{m-i} (\alpha^{mn} - 1)}{\alpha^m - 1} - \frac{\beta^{m-i} (\beta^{mn} - 1)}{\beta^m - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^{m-i} (\alpha^{mn} - 1) (\beta^m - 1) - \beta^{m-i} (\beta^{mn} - 1) (\alpha^m - 1)}{(\alpha^m - 1) (\beta^m - 1)} \right). \end{aligned}$$

括弧内の分子は, $\alpha^m \beta^m = (\alpha\beta)^m = (-1)^m$ を用いて項を整理すると,

$$\begin{aligned} &\alpha^{mn+m-i} \beta^m - \alpha^{m-i} \beta^m + \alpha^{m-i} - \alpha^{mn+m-i} - \beta^{mn+m-i} \alpha^m + \beta^{m-i} \alpha^m - \beta^{m-i} + \beta^{mn+m-i} \\ &= \alpha^m \beta^m (\alpha^{mn-i} - \beta^{mn-i}) - \alpha^m \beta^m (\alpha^{-i} - \beta^{-i}) + (\alpha^{m-i} - \beta^{m-i}) - (\alpha^{mn+m-i} - \beta^{mn+m-i}) \\ &= (-1)^m \sqrt{5} F_{mn-i} - (-1)^m \sqrt{5} F_{-i} + \sqrt{5} F_{m-i} - \sqrt{5} F_{mn+m-i}. \end{aligned}$$

また, 分母は,

$$\begin{aligned} (\alpha^m - 1) (\beta^m - 1) &= \alpha^m \beta^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1 \\ &= (-1)^m - L_m + 1. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{mk-i} &= \frac{\sqrt{5}((-1)^m F_{mn-i} - (-1)^m F_{-i} + F_{m-i} - F_{mn+m-i})}{\sqrt{5}((-1)^m - L_m + 1)} \\ &= \frac{F_{mn+m-i} - F_{m-i} - (-1)^m F_{mn-i} + (-1)^m F_{-i}}{L_m - (-1)^m - 1}. \end{aligned}$$

これで補題 2.3 が証明された. □

補題 2.4. 任意の正整数 n に対して, 次の等式が成り立つ.

$$L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{n+1}L_n + 5(-1)^{n+1}.$$

Proof. 補題 2.1 (5), (6) より

$$\begin{aligned} L_{n+1}^2 + L_n^2 &= 5F_{n+1}^2 + 4(-1)^{n+1} + 5F_n^2 + 4(-1)^n \\ &= 5(F_{n+1}^2 + F_n^2) \\ &= 5(F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n-1} - (-1)^n) \\ &= 5(F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n-1}) - (-1)^n) \\ &= 5(F_{n+1}L_n + (-1)^{n+1}). \end{aligned}$$

□

3 主要な命題とその証明

本節では, 主結果を導くために必要な命題を示す.

3.1 原始 3 乗根 ω -重み付き和の絶対値

命題 3.1. $a_n = 2F_n^2 + (-1)^n + 1$ とおくと, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\left| 2 \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right| = \begin{cases} \sqrt{a_n - L_n}, & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ \sqrt{a_n + F_{n+2}}, & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ \sqrt{a_n - F_{n-2}}, & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

Proof. $n = 1, 2$ のとき, 直接計算により容易に確認できる. 以降, $n \geq 3$ とする.

- $n \equiv 0 \pmod{3}$ の場合まずは項を三種類に分けて計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega^k F_k &= \omega (F_1 + F_4 + \cdots + F_{n-2}) + \omega^2 (F_2 + F_5 + \cdots + F_{n-1}) + (F_3 + F_6 + \cdots + F_n) \\ &= \omega \frac{F_n - F_0}{2} + \omega^2 \frac{F_{n+1} - F_1}{2} + \frac{F_{n+2} - F_2}{2} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{F_n - 0}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{F_{n+1} - 1}{2} + \frac{F_{n+2} - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_n - F_{n+1} + 2F_{n+2} + 1 - 2 \cdot 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_n - F_{n+1} + 1}{2} \right). \end{aligned}$$

このとき,

$$-F_n - F_{n+1} + 2F_{n+2} = -F_{n+2} + 2F_{n+2} = F_{n+2}$$

$$F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega^k F_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_n - F_{n+1} + 2F_{n+2} + 1 - 2 \cdot 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_n - F_{n+1} + 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{F_{n+2} - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{-F_{n-1} + 1}{2} \right) \\ &= \frac{F_{n+2} - 1}{4} + \frac{-F_{n-1} + 1}{4} \sqrt{3} i \end{aligned}$$

と分かる．和が実部と虚部に分かれたので，絶対値が計算できる．

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right| &= \sqrt{\left(\frac{F_{n+2} - 1}{4} \right)^2 + \left(\frac{(-F_{n-1} + 1) \sqrt{3}}{4} \right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(F_{n+2}^2 - 2F_{n+2} + 1) + (F_{n-1}^2 - 2F_{n-1} + 1) \cdot 3} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{F_{n+2}^2 + 3F_{n-1}^2 - 2F_{n+2} - 6F_{n-1} + 4}. \end{aligned}$$

このとき，補題 2.2 より $F_{n+2}^2 + 3F_{n-1}^2 = 4(2F_n^2 + (-1)^n)$ が成り立ち，また，

$$\begin{aligned} -2F_{n+2} - 6F_{n-1} &= -2(F_{n+1} + F_n) - 6(F_{n+1} - F_n) \\ &= -8F_{n+1} + 4F_n \\ &= -4F_{n+1} - 4F_{n-1} \\ &= -4L_n \end{aligned}$$

が成り立つので， $a_n = 2F_n^2 + (-1)^n + 1$ とおけば，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right| &= \frac{1}{4} \sqrt{F_{n+2}^2 + 3F_{n-1}^2 + 2F_{n+2} - 6F_{n-1} + 4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4(2F_n^2 + (-1)^n) - 4L_n + 4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n - L_n} \end{aligned}$$

と求まる．

- $n \equiv 1 \pmod{3}$ の場合 $n \equiv 0 \pmod{3}$ の場合と手順は同様に， ω^k が $\omega, \omega^2, 1$ のどれで表せるかによって項を分けて計算する．

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega^k F_k &= \omega(F_1 + F_4 + \cdots + F_n) + \omega^2(F_2 + F_5 + \cdots + F_{n-2}) + (F_3 + F_6 + \cdots + F_{n-1}) \\ &= \omega \frac{F_{n+2} - F_0}{2} + \omega^2 \frac{F_n - F_1}{2} + \frac{F_{n+1} - F_2}{2} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{F_{n+2} - 0}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{F_n - 1}{2} + \frac{F_{n+1} - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_{n+2} - F_n + 2F_{n+1} + 0 + 1 - 2 \cdot 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_{n+2} - F_n - 0 + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

この式が得られる。ここで,

$$-F_{n+2} - F_n + 2F_{n+1} = -F_n + F_{n-1} = -F_{n-2}$$

$$F_{n+2} - F_n = F_{n+1}$$

という式を用いて,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega^k F_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_{n+2} - F_n + 2F_{n+1} + 1 - 2 \cdot 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_{n+2} - F_n + 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_{n-2} - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_{n+1} + 1}{2} \right) \\ &= \frac{-F_{n-2} - 1}{4} + \frac{F_{n+1} + 1}{4} \sqrt{3} i \end{aligned}$$

と分かる。和を実部と虚部に分けたので絶対値を計算する。

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right| &= \sqrt{\left(\frac{-F_{n-2} - 1}{4} \right)^2 + \left(\frac{(F_{n+1} + 1) \sqrt{3}}{4} \right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(F_{n-2}^2 + 2F_{n-2} + 1) + (F_{n+1}^2 + 2F_{n+1} + 1) \cdot 3} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2 + 2F_{n-2} + 6F_{n+1} + 4}. \end{aligned}$$

このとき, 補題 2.2 より, $F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2 = 4(2F_n^2 + (-1)^n)$ が成り立ち, また,

$$\begin{aligned} 6F_{n+1} + 2F_{n-2} &= 6(F_n + F_{n-1}) + 2(F_n - F_{n-1}) \\ &= 8F_n + 4F_{n-1} \\ &= 4F_{n+1} + 4F_n \\ &= 4F_{n+2} \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right| &= \frac{1}{4} \sqrt{F_{n-2}^2 + 3F_{n+1}^2 + 2F_{n-2} + 6F_{n+1} + 4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4(2F_n^2 + (-1)^n) + 4F_{n+2} + 4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n + F_{n+2}} \end{aligned}$$

と結論できる.

- $n \equiv 2 \pmod{3}$ の場合この場合も同様に計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega^k F_k &= \omega(F_1 + F_4 + \cdots + F_{n-1}) + \omega^2(F_2 + F_5 + \cdots + F_n) + (F_3 + F_6 + \cdots + F_{n-2}) \\ &= \omega \frac{F_{n+1} - F_0}{2} + \omega^2 \frac{F_{n+2} - F_1}{2} + \frac{F_n - F_2}{2} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{F_{n+1} - 0}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{F_{n+2} - 1}{2} + \frac{F_n - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_{n+1} - F_{n+2} + 2F_n + 0 + 1 - 2 \cdot 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_{n+1} - F_{n+2} - 0 + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで, $F_{n+1} - F_{n+2} = -F_n$ が成り立ち, また,

$$\begin{aligned} -F_{n+1} - F_{n+2} + 2F_n &= -F_{n+1} - F_{n+2} + (F_{n+2} - F_{n+1}) + F_n \\ &= -2F_{n+1} + F_n \\ &= -F_{n+1} - F_{n-1} \\ &= -L_n \end{aligned}$$

が成り立つ. この式を用いれば,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega^k F_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_{n+1} - F_{n+2} + 2F_n + 0 + 1 - 2 \cdot 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_{n+1} - F_{n+2} - 0 + 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-L_n - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{-F_n + 1}{2} \right) \\ &= \frac{-L_n - 1}{4} + \frac{-F_n + 1}{4} \sqrt{3}i \end{aligned}$$

と分かる．実部と虚部に分かれた形になったので次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right| &= \sqrt{\left(\frac{-L_n - 1}{4} \right)^2 + \left(\frac{(-F_n + 1)\sqrt{3}}{4} \right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(L_n^2 + 2L_n + 1) + (F_n^2 - 2F_n + 1) \cdot 3} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{L_n^2 + 3F_n^2 + 2L_n - 6F_n + 4}. \end{aligned}$$

ここで，補題 2.2 より $L_n^2 + 3F_n^2 = 4(2F_n^2 + (-1)^n)$ が成り立ち，

$$\begin{aligned} 2L_n - 6F_n &= 2(F_{n+1} + F_{n-1}) - 6(F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= -4F_{n+1} + 8F_{n-1} \\ &= 4F_{n-1} - 4F_n \\ &= -4F_{n-2} \end{aligned}$$

も成り立つので，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right| &= \frac{1}{4} \sqrt{L_n^2 + 3F_n^2 + 2L_n - 6F_n + 4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4(2F_n^2 + (-1)^n) - 4F_{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n - F_{n-2}} \end{aligned}$$

というように求まる．これで三つの場合についてそれぞれ和が求まった．

□

主結果 (1) の証明

関係式

$$L_{n+1} = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad F_{n+2} = 2F_{n+1} - F_{n-1}, \quad F_{n-2} = F_{n+1} - 2F_{n-1}$$

を用いて得られた定理を書き換えると,

$$\left| 2 \sum_{k=0}^n \omega^k F_k \right|^2 = \begin{cases} a_n - F_{n+1} - F_{n-1} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ a_n - F_{n+1} + 2F_{n-1} & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ a_n + 2F_{n+1} - F_{n-1} & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

となるから, $-1, -1, 2$ を繰り返す数列 $b_n = 2 \cos \frac{2\pi n}{3}$ を用いることで, 主結果 (1) が従う.

3.2 原始 6 乗根 ζ_6 -重み付き和の絶対値

命題 3.2. $a_n := 2F_n^2 + (-1)^n + 1$ とおく. このとき, $\zeta_6 := \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)$ に対して, 次の等式が成立する.

$$\left| 2 \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 = \begin{cases} a_{n+1} - F_{n+3} & (n \equiv 0 \pmod{6}) \\ a_{n+1} - F_{n-1} & (n \equiv 1 \pmod{6}) \\ a_{n+1} + L_{n+1} & (n \equiv 2 \pmod{6}) \\ a_{n+1} + F_{n+3} & (n \equiv 3 \pmod{6}) \\ a_{n+1} + F_{n-1} & (n \equiv 4 \pmod{6}) \\ a_{n+1} - L_{n+1} & (n \equiv 5 \pmod{6}) \end{cases}$$

Proof. $n = 1, 2, 3, 4, 5$ については直接計算で確かめられる. 以下, $n \geq 6$ とする.

- $n \equiv 0 \pmod{6}$ ζ_6^k が $\zeta_6, \zeta_6^2, 1$ のどれで表せるかによって項を分けて計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k &= \zeta_6 \sum_{k=1}^{\frac{n}{6}} (F_{6k-5} - F_{6k-2}) + \zeta_6^2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{6}} (F_{6k-4} - F_{3k-1}) + \sum_{k=1}^{\frac{n}{6}} (F_{6k} - F_{6k-3}) \\ &= \zeta_6 \frac{(F_{n-2} - F_{-2}) - (F_{n+1} - F_1)}{4} + \zeta_6^2 \frac{(F_{n-1} - F_{-1}) - (F_{n+2} - F_2)}{4} + \frac{(F_{n+3} - F_2) - (F_n - F_0)}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2F_{n-1} + 2F_n + 4F_{n+1} - 2}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{-2F_{n-1} - 2F_n + 2}{4} \right) \\ &= \frac{L_{n+1} - 1}{4} + \frac{(1 - F_{n+1})\sqrt{3}}{4} i. \end{aligned}$$

以上の結果より，絶対値を求めることで希望の結果が得られる．補題 2.2 より，

$$\begin{aligned}
 \left| 4 \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 &= (L_{n+1} - 1)^2 + 3 \cdot (1 - F_{n+1})^2 \\
 &= L_{n+1}^2 + 3F_{n+1}^2 - 2L_{n+1} - 6F_{n+1} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) - 2(F_{n+2} + F_n) - 6(F_{n+2} - F_n) + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) - 8F_{n+2} + 4F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) - 4F_{n+2} - 4F_{n+1} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) - 4F_{n+3} + 4.
 \end{aligned}$$

• $n \equiv 1 \pmod{6}$ の場合

前の場合と同様の方針で進める．補題 2.3 より，

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k &= \zeta_6 \left(\sum_{k=1}^{\frac{n+5}{6}} F_{6k-5} - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{6}} F_{6k-2} \right) + \zeta_6^2 \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{6}} (F_{6k-4} - F_{3k-1}) + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{6}} (F_{6k} - F_{6k-3}) \\
 &= \zeta_6 \frac{(F_{n+3} - F_{-2}) - (F_n - F_1)}{4} + \zeta_6^2 \frac{(F_{n-2} - F_{-1}) - (F_{n+1} - F_2)}{4} + \frac{(F_{n+2} - F_2) - (F_{n-1} - F_0)}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{F_{n+1} + F_{n-1} + 2F_n - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_{n+1} - F_{n-1} + 1}{2} \right) \\
 &= \frac{F_{n+3} - 1}{4} + \frac{(F_n + 1)\sqrt{3}}{4} i
 \end{aligned}$$

この式から，絶対値を評価すればよい．補題 2.2 を用いると，

$$\begin{aligned}
 \left| 4 \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 &= (F_{n+3} - 1)^2 + 3 \cdot (F_n + 1)^2 \\
 &= F_{n+3}^2 + 3F_n^2 + 6F_n - 2F_{n+3} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 6(F_{n+2} - F_{n+1}) - 2(F_{n+2} + F_{n+1}) + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4F_{n+2} - 8F_{n+1} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) - 4F_{n+1} + 4F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) - 4F_{n-1} + 4.
 \end{aligned}$$

• $n \equiv 2 \pmod{6}$ の場合

この場合も同様に示す．補題 2.3 を用いて,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k &= \zeta_6 \left(\sum_{k=1}^{\frac{n+4}{6}} F_{6k-5} - \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{6}} F_{6k-2} \right) + \zeta_6^2 \left(\sum_{k=1}^{\frac{n+4}{6}} F_{6k-4} - \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{6}} F_{6k-1} \right) + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{6}} (F_{6k} - F_{6k-3}) \\
 &= \zeta_6 \frac{(F_n - F_{-2}) - (F_{n+3} - F_1)}{4} + \zeta_6^2 \frac{(F_{n+3} - F_{-1}) - (F_n - F_2)}{4} + \frac{(F_{n+1} - F_2) - (F_{n-2} - F_0)}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{F_n - F_{n+1} + 2F_{n-1} - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_n + F_{n+1} + 1}{2} \right) \\
 &= \frac{F_{n-1} - 1}{4} + \frac{(F_{n+2} + 1) \sqrt{3}}{4} i
 \end{aligned}$$

が得られるので, この絶対値を求める．補題 2.2 より,

$$\begin{aligned}
 \left| 4 \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 &= (F_{n-1} - 1)^2 + 3 \cdot (F_{n+2} + 1)^2 \\
 &= F_{n-1}^2 + 3F_{n+2}^2 - 2F_{n-1} + 6F_{n+2} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) - 2(F_{n+1} - F_n) + 6(F_{n+1} + F_n) + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4F_{n+1} + 8F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4F_{n+2} + 4F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4L_{n+1} + 4.
 \end{aligned}$$

• $n \equiv 3 \pmod{6}$ の場合

補題 2.3 の結果より,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k &= \zeta_6 \left(\sum_{k=1}^{\frac{n+3}{6}} F_{6k-5} - \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{6}} F_{6k-2} \right) + \zeta_6^2 \left(\sum_{k=1}^{\frac{n+3}{6}} F_{6k-4} - \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{6}} F_{6k-1} \right) + \sum_{k=1}^{\frac{n+3}{6}} (F_{6k} - F_{6k-3}) \\
 &= \zeta_6 \frac{(F_{n+1} - F_{-2}) - (F_{n-2} - F_1)}{4} + \zeta_6^2 \frac{(F_{n+2} - F_{-1}) - (F_{n-1} - F_2)}{4} + \frac{(F_n - F_2) - (F_{n+3} - F_0)}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{F_{n-1} - F_n - 2F_{n+1} - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{F_{n-1} + F_n + 1}{2} \right) \\
 &= \frac{-L_{n+1} - 1}{4} + \frac{(F_{n+2} + 1) \sqrt{3}}{4} i.
 \end{aligned}$$

以上の計算から、実部と虚部にわかれたので絶対値を求めればよい。補題 2.2 より、

$$\begin{aligned}
 \left| 4 \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 &= (-L_{n+1} - 1)^2 + 3 \cdot (1 + F_{n+1})^2 \\
 &= L_{n+1}^2 + 3F_{n+1}^2 + 2L_{n+1} + 6F_{n+1} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) + 2(F_{n+2} + F_n) + 6(F_{n+2} - F_n) + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) + 8F_{n+2} - 4F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) + 4F_{n+2} + 4F_{n+1} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_n^2 + (-1)^n \right) + 4F_{n+3} + 4.
 \end{aligned}$$

• $n \equiv 4 \pmod{6}$ の場合

ここでも基本方針は同じである。補題 2.3 より、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k &= \zeta_6 \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{6}} (F_{6k-5} - F_{6k-2}) + \zeta_6^2 \left(\sum_{k=1}^{\frac{n+2}{6}} F_{6k-4} - \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{6}} F_{6k-1} \right) + \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{6}} (F_{6k} - F_{6k-3}) \\
 &= \zeta_6 \frac{(F_n - F_{-2}) - (F_{n+3} - F_1)}{4} + \zeta_6^2 \frac{(F_{n+1} - F_{-1}) - (F_{n-2} - F_2)}{4} + \frac{(F_{n-1} - F_2) - (F_{n+2} - F_0)}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_{n+1} - F_{n-1} - 2F_n - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{-F_{n+1} + F_{n-1} + 1}{2} \right) \\
 &= \frac{-F_{n+3} - 1}{4} + \frac{(-F_n + 1)\sqrt{3}}{4} i
 \end{aligned}$$

が得られるので、この絶対値を求める。補題 2.2 を用いて、

$$\begin{aligned}
 \left| 4 \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 &= (-F_{n+3} - 1)^2 + 3 \cdot (-F_n + 1)^2 \\
 &= F_{n+3}^2 + 3F_n^2 - 6F_n + 2F_{n+3} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) - 6(F_{n+2} - F_{n+1}) + 2(F_{n+2} + F_{n+1}) + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) - 4F_{n+2} + 8F_{n+1} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4F_{n+1} - 4F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4F_{n-1} + 4.
 \end{aligned}$$

• $n \equiv 5 \pmod{6}$ の場合

ここでも同様に示す．補題 2.3 を適用し，

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k &= \zeta_6 \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{6}} (F_{6k-5} - F_{6k-2}) + \zeta_6^2 \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{6}} (F_{6k-4} - F_{6k-1}) + \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{6}} (F_{6k} - F_{6k-3}) \\
 &= \zeta_6 \frac{(F_{n-1} - F_{-2}) - (F_{n+2} - F_1)}{4} + \zeta_6^2 \frac{(F_n - F_{-1}) - (F_{n+3} - F_2)}{4} + \frac{(F_{n-2} - F_2) - (F_{n+2} - F_0)}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{-F_{n+1} - F_{n-1} - 2F_n - 1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{-F_{n+1} + F_{n-1} + 1}{2} \right) \\
 &= \frac{F_{n-1} - 1}{4} + \frac{(F_{n+2} + 1) \sqrt{3}}{4} i
 \end{aligned}$$

が得られるので，この絶対値は補題 2.2 より次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
 \left| 4 \sum_{k=1}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 &= (F_{n-1} - 1)^2 + 3 \cdot (F_{n+2} + 1)^2 \\
 &= F_{n-1}^2 + 3F_{n+2}^2 - 2F_{n-1} + 6F_{n+2} + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) - 2(F_{n+1} - F_n) + 6(F_{n+1} + F_n) + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4F_{n+1} + 8F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4F_{n+2} + 4F_n + 4 \\
 &= 4 \left(2F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \right) + 4L_{n+1} + 4.
 \end{aligned}$$

これで全ての場合が示された．

□

主結果 (2) の証明

関係式

$$L_{n+2} = F_{n+2} + F_n, \quad F_{n+3} = 2F_{n+2} - F_n, \quad F_{n-1} = F_{n+2} - 2F_n$$

を用いて得られた定理を書き換えると,

$$\left| 2 \sum_{k=0}^n \zeta_6^k F_k \right|^2 = \begin{cases} a_{n+1} - 2F_{n+2} - F_n & (n \equiv 0 \pmod{6}) \\ a_{n+1} - F_{n+2} - 2F_n & (n \equiv 1 \pmod{6}) \\ a_{n+1} + F_{n+2} + F_n & (n \equiv 2 \pmod{6}) \\ a_{n+1} + 2F_{n+2} + F_n & (n \equiv 3 \pmod{6}) \\ a_{n+1} + F_{n+2} + 2F_n & (n \equiv 4 \pmod{6}) \\ a_{n+1} - F_{n+2} - F_n & (n \equiv 5 \pmod{6}) \end{cases}$$

. となるから, $-2, -1, 1, 2, 1, -1$ を繰り返す数列 $b_n = 2 \cos \frac{2\pi n}{6}$ を用いることで, 主結果 (2) が従う.

3.3 原始 4 乗根 i -重み付き和の絶対値

命題 3.3. 次の等式が成り立つことを述べる.

$$\left| \sqrt{5} \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| = \begin{cases} F_{2n+1} - 2F_{n+1} + 1 & (n \equiv 0 \pmod{4}) \\ F_{2n+1} + 2F_n + 1 & (n \equiv 1 \pmod{4}) \\ F_{2n+1} + 2F_{n+1} + 1 & (n \equiv 2 \pmod{4}) \\ F_{2n+1} - 2F_n + 1 & (n \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

Proof. $n = 1, 2, 3$ のときは直接計算で容易に確かめられる. 以降, $n \geq 4$ とする.

- $n \equiv 0 \pmod{4}$ の場合

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n i^k F_k &= i(F_1 - F_3 + \cdots + F_{n-3} - F_{n-1}) + 1(-F_2 + F_4 + \cdots - F_{n-2} + F_n) \\ &= i \frac{L_{n-1} - L_{-1} - L_{n+1} + L_1}{5} + \frac{L_{n+2} - L_2 - L_n + L_0}{5} \\ &= \frac{-L_n + 2}{5} i + \frac{L_{n+1} - 1}{5} \end{aligned}$$

と分かる.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \sqrt{\left(\frac{L_{n+1}-1}{5} \right)^2 + \left(\frac{-L_n+2}{5} \right)^2} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_{n+1}^2 - 2L_{n+1} + 1) + (L_n^2 - 4L_n + 4)}. \end{aligned}$$

ここで, $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$, および補題 2.4 が成り立つので,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{5} \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_{n+1}^2 - 2L_{n+1} + 1) + (L_n^2 - 4L_n + 4)} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{5F_{n+1}L_n + 5(-1)^{n+1} - 10F_{n+1} + 5} \end{aligned}$$

となる.

- $n \equiv 1 \pmod{4}$ の場合

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n i^k F_k &= i(F_1 - F_3 + \cdots + F_n - F_{n-2}) + 1(-F_2 + F_4 + \cdots - F_{n-3} + F_{n-1}) \\ &= i \frac{L_{n+2} - L_{-1} - L_n + L_1}{5} + \frac{L_{n+1} - L_{-2} - L_{n-1} + L_0}{5} \\ &= \frac{L_n - 1}{5} + \frac{L_{n+1} + 2}{5} i \end{aligned}$$

と分かる.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \sqrt{\left(\frac{L_n-1}{5} \right)^2 + \left(\frac{L_{n+1}+2}{5} \right)^2} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_n^2 - 2L_n + 1) + (L_{n+1}^2 + 4L_{n+1} + 4)}. \end{aligned}$$

また, $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ と補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{5} \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_n^2 - 2L_n + 1) + (L_{n+1}^2 + 4L_{n+1} + 4)} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{5F_{n+1}L_n + 5(-1)^{n+1} + 10F_n + 5} \end{aligned}$$

となる.

- $n \equiv 2 \pmod{4}$ の場合

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n i^k F_k &= i(F_1 - F_3 + \cdots + F_{n-1} - F_{n-3}) + 1(-F_2 + F_4 + \cdots - F_n + F_{n-2}) \\ &= i \frac{L_{n+1} - L_{-1} - L_{n-1} + L_1}{5} + \frac{L_n - L_2 - L_{n+2} + L_0}{5} \\ &= \frac{L_n + 2}{5} i + \frac{-L_{n+1} - 1}{5} \end{aligned}$$

と分かる.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \sqrt{\left(\frac{-L_{n+1} - 1}{5} \right)^2 + \left(\frac{L_n + 2}{5} \right)^2} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_{n+1}^2 + 2L_{n+1} + 1) + (L_n^2 + 4L_n + 4)}. \end{aligned}$$

さらに, $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ と補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{5} \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_{n+1}^2 + 2L_{n+1} + 1) + (L_n^2 + 4L_n + 4)} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{5F_{n+1}L_n + 5(-1)^{n+1} + 10F_{n+1} + 5} \end{aligned}$$

となる.

- $n \equiv 3 \pmod{4}$ の場合

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n i^k F_k &= i(F_1 - F_3 + \cdots + F_n - F_{n-2}) + 1(-F_2 + F_4 + \cdots - F_{n-3} + F_{n-1}) \\ &= i \frac{L_n - L_{-1} - L_{n+2} + L_1}{5} + \frac{L_{n-1} - L_{-2} - L_{n+1} + L_0}{5} \\ &= \frac{-L_n - 1}{5} + \frac{-L_{n+1} + 2}{5} i \end{aligned}$$

と分かる.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \sqrt{\left(\frac{-L_n - 1}{5} \right)^2 + \left(\frac{-L_{n+1} + 2}{5} \right)^2} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_n^2 + 2L_n + 1) + (L_{n+1}^2 - 4L_{n+1} + 4)}. \end{aligned}$$

このときも, $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ と補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{5} \sum_{k=0}^n i^k F_k \right| &= \frac{1}{5} \sqrt{(L_n^2 - 2L_n + 1) + (L_{n+1}^2 + 4L_{n+1} + 4)} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{5F_{n+1}L_n + 5(-1)^{n+1} - 10F_n + 5} \end{aligned}$$

となる.

□

主結果 (3) の証明

命題 3.3 の結果をまとめると,

$$\left| \sqrt{5} \sum_{k=0}^n i^k F_k \right|^2 = \begin{cases} F_{n+1}L_n + (-1)^{n+1} + 1 - 2F_{n+1} & (n \equiv 0 \pmod{4}) \\ F_{n+1}L_n + (-1)^{n+1} + 1 + 2F_n & (n \equiv 1 \pmod{4}) \\ F_{n+1}L_n + (-1)^{n+1} + 1 + 2F_{n+1} & (n \equiv 2 \pmod{4}) \\ F_{n+1}L_n + (-1)^{n+1} + 1 - 2F_n & (n \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

. となるから, $2, 0, -2, 0$ を繰り返す数列 $b_n = 2 \cos \frac{2\pi n}{4}$ を用いることで, 主結果 (3) が従う.

謝辞

本研究の遂行にあたり, 大塚氏には, 草稿を一読していただき, 貴重な助言を賜りました. 深く感謝申し上げます. また, 第 23 回日本フィボナッチ協会研究集会において, 有益なコメントを頂いた方々に感謝いたします.

参考文献

- [FQ] H. Ohtsuka, Problem B-1326, Fibonacci Quarterly, 61(2) (2023), 178.
- [Ko] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume I, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2019. (和訳: フィボナッチ数・リュカ数大鑑 (上), 共立出版, 2024)

Some remarks on Faulhaber-type formulas, Lucas and Fibonacci polynomials

渋川元樹* (北見工大工)

概要

2変数の Lucas 多項式, Fibonacci 多項式を用い, $f_{\pm}(c-x) = \pm f_{\pm}(x)$ を満たす多項式 $f_{\pm}(x) = \sum_{k=0}^n c_k^{\pm} x^k$ もしくは $\tilde{f}_{\pm}(cz^{-1}) = \pm \tilde{f}_{\pm}(z)$ を満たす Laurent 多項式 $\tilde{f}_{\pm}(z) = \sum_{k=-n}^n \tilde{c}_k^{\pm} z^k$ について, $f_{+}(x)$ と $f_{-}(x)/(2x-c)$ を $x(x-c)$ の多項式で, $\tilde{f}_{+}(z)$ と $\tilde{f}_{-}(z)/(z-cz^{-1})$ を $z+cz^{-1}$ の多項式で, 明示公式を与える. これはベキ乗和公式 (Bernoulli 多項式) に関する Faulhaber の定理 (公式) [2], [3], [4] の一般化, 変奏にあたる.

1 Introduction

有名な自然数のベキ乗和

$$S_m(n) := \sum_{j=1}^n j^m$$

とその和公式に関しては, 以下のことが知られている.

Theorem 1 (Faulhaber の定理).

$$N := \frac{n(n+1)}{2}$$

とする.

- (1) $S_{2k+1}(n)$ は N の有理数係数多項式である.
- (2) $S_{2k}(n)/(2n+1)$ は N の有理数係数多項式である.

小さい所の例をあげると, 以下の通りである:

$$S_1(n) = N, S_2(n) = \frac{2n+1}{3}N, S_3(n) = N^2, S_4(n) = \frac{2n+1}{15}N(6N-1), S_5(n) = \frac{N^2(4N-1)}{3}, \dots$$

この定理は 17 世紀に Faulhaber [2] により発見され, 19 世紀に Jacobi [3] に証明された. 更に Knuth [4] はこの定理を精密化し, 定理 1 (1), (2) の N の有理数係数多項式 (特に $N=0$ 周りでの展開係数) を以下のように具体的に書き下した.

*g-shibukawa@mail.kitami-it.ac.jp

Theorem 2 (Faulhaber の公式). 任意の正整数 l について

$$S_{2l-1}(n) = \frac{1}{4l} \sum_{k=1}^l (2N)^k \sum_{m=0}^{2l-k} \binom{m}{k} \binom{2l}{m+k} B_{2l-m-k} \\ + \frac{1}{4l} \sum_{k=1}^l (2N)^k \sum_{m=0}^{2l-k-1} \binom{m}{k-1} \binom{2l}{m+k+1} B_{2l-m-k-1}, \quad (1)$$

$$S_{2l}(n) = \frac{2n+1}{4l+2} \sum_{k=0}^l (2N)^k \sum_{m=0}^{2l-k} \binom{m}{k} \binom{2l+1}{m+k+1} B_{2l-m-k}. \quad (2)$$

ただし, B_k は

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k$$

で定まる Bernoulli 数である.

一般にベキ乗和公式は Bernoulli 多項式:

$$\frac{ue^{xu}}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} u^k$$

を用いて

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} (B_{m+1}(n+1) - B_{m+1})$$

と書ける (関-Bernoulli). なので 定理 1 は

$$B_{2N}(x) \in \mathbb{Q}[x(x-1)], \quad \frac{B_{2N+1}(x)}{2x-1} \in \mathbb{Q}[x(x-1)],$$

定理 2 は $B_{2N}(x)$, $B_{2N+1}(x)/(2x-1)$ を $x(x-1)$ の多項式として具体的に書き下すことから従う.

本稿は 2 変数の Lucas 多項式と Fibonacci 多項式を用いて, これらの結果を次のように拡張する.

Theorem 3. 標数が 2 でない体 K 上の多項式環を $K[x]$, Laurent 多項式環を $K[z^{\pm 1}]$ とする.

(1) n 次多項式 $f_{\pm}(x) = \sum_{k=0}^n c_k^{\pm} x^k \in K[x]$ が複合同順で

$$f_{\pm}(c-x) = \pm f_{\pm}(x) \quad (c \in K) \quad (3)$$

を満たすとする.

このとき

$$f_+(x), \quad \frac{f_-(x)}{2x-c} \in K[x(x-c)].$$

より精密に以下のような表示をもつ:

$$f_+(x) = c_0^+ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{m=0}^{n-k} \binom{m}{k} c_{m+k}^+ + \sum_{m=0}^{n-k-1} \binom{m}{k-1} c_{m+k+1}^+ \right\} c^{n-2k} (x(x-c))^k, \quad (4)$$

$$f_{-}(x) = \frac{2x-1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{n-k-1} \binom{m}{k} c_{m+k+1}^{-} c^{n-2k} (x(x-c))^k. \quad (5)$$

(2) n 次 Laurent 多項式 $\tilde{f}_{\pm}(z) = \sum_{k=-n}^n \tilde{c}_k^{\pm} z^k \in K[z^{\pm 1}]$ が複合同順で

$$\tilde{f}_{\pm}(cz^{-1}) = \pm \tilde{f}_{\pm}(z) \quad (c \in K^{\times}) \quad (6)$$

を満たすとする.

このとき

$$\tilde{f}_{+}(z), \quad \frac{\tilde{f}_{-}(z)}{z - cz^{-1}} \in K[z + cz^{-1}].$$

より精密に以下のような表示をもつ:

$$\tilde{f}_{+}(z) = \tilde{c}_0^{+} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{m=0}^{n-k} \binom{m}{k} \tilde{c}_{m+k}^{+} + \sum_{m=0}^{n-k-1} \binom{m}{k-1} \tilde{c}_{m+k+1}^{+} \right\} (z + cz^{-1})^{n-2k} (-c)^k, \quad (7)$$

$$\tilde{f}_{-}(z) = \frac{z - cz^{-1}}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{n-k-1} \binom{m}{k} \tilde{c}_{m+k+1}^{-} (z + cz^{-1})^{n-2k} (-c)^k. \quad (8)$$

この定理の応用として, Barnes 型の多重 Bernoulli 多項式

$$\begin{aligned} \frac{u^r e^{xu}}{(e^{a_1 u} - 1) \cdots (e^{a_r u} - 1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{r,n}(x \mid \mathbf{a})}{n!} u^n, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r), \\ B_{r,n}(x \mid \mathbf{a}) &:= \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k}(\mathbf{a})}{k!} x^k, \\ B_{n-k}(\mathbf{a}) &:= \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \sum_{k_1 + \cdots + k_r = n-k} \frac{B_{k_1} \cdots B_{k_r}}{k_1! \cdots k_r!} a_1^{k_1-1} \cdots a_r^{k_r-1} \end{aligned}$$

と多重 Euler 多項式

$$\begin{aligned} \frac{2^r e^{xu}}{(e^{a_1 u} + 1) \cdots (e^{a_r u} + 1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{r,n}(x \mid \mathbf{a})}{n!} u^n, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r), \\ E_{r,n}(x \mid \mathbf{a}) &:= \sum_{k=0}^n \frac{E_{n-k}(\mathbf{a})}{k!} x^k, \\ E_{n-k}(\mathbf{a}) &:= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \sum_{k_1 + \cdots + k_r = n-k} \frac{E_{k_1} \cdots E_{k_r}}{k_1! \cdots k_r!} a_1^{k_1-1} \cdots a_r^{k_r-1}, \\ \frac{2}{e^u + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} u^n \end{aligned}$$

について次の公式を得る.

Theorem 4. 任意の正整数 l に対し,

$$B_{r,2l}(x \mid \mathbf{a}), \frac{B_{r,2l-1}(x \mid \mathbf{a})}{2x - |\mathbf{a}|} \in \mathbb{Q}[\mathbf{a}^{\pm 1}][x(x - |\mathbf{a}|)], \quad |\mathbf{a}| := a_1 + \cdots + a_r$$

であり, 更に

$$\begin{aligned} B_{r,2l}(x \mid \mathbf{a}) &= B_{r,2l}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \sum_{m=0}^{2l-k} \binom{m}{k} \frac{B_{2l-m-k}(\mathbf{a})}{(m+k)!} |\mathbf{a}|^{2l-2k} (x(x - |\mathbf{a}|))^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \sum_{m=0}^{2l-k-1} \binom{m}{k-1} \frac{B_{2l-m-k-1}(\mathbf{a})}{(m+k+1)!} |\mathbf{a}|^{2l-2k} (x(x - |\mathbf{a}|))^k, \end{aligned} \quad (9)$$

$$B_{r,2l-1}(x \mid \mathbf{a}) = \frac{2x - |\mathbf{a}|}{2} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{2l-k-2} \binom{m}{k} \frac{B_{2l-m-k-2}(\mathbf{a})}{(m+k+1)!} |\mathbf{a}|^{2l-2k-1} (x(x - |\mathbf{a}|))^k, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E_{r,2l}(x \mid \mathbf{a}) &= E_{r,2l}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \sum_{m=0}^{2l-k} \binom{m}{k} \frac{E_{2l-m-k}(\mathbf{a})}{(m+k)!} |\mathbf{a}|^{2l-2k} (x(x - |\mathbf{a}|))^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \sum_{m=0}^{2l-k-1} \binom{m}{k-1} \frac{E_{2l-m-k-1}(\mathbf{a})}{(m+k+1)!} |\mathbf{a}|^{2l-2k} (x(x - |\mathbf{a}|))^k, \end{aligned} \quad (11)$$

$$E_{r,2l-1}(x \mid \mathbf{a}) = \frac{2x - |\mathbf{a}|}{2} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{2l-k-2} \binom{m}{k} \frac{E_{2l-m-k-2}(\mathbf{a})}{(m+k+1)!} |\mathbf{a}|^{2l-2k-1} (x(x - |\mathbf{a}|))^k. \quad (12)$$

公式 (9), (10) において $r = 1$, $a_1 = 1$ とすると, 定理 1 と定理 2 を得る.

2 Proofs of the main results

次数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の 2 変数のベキ和多項式 $p_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ と 完全斉次多項式 $h_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ を

$$p_n(x, y) := x^n + y^n, \quad h_n(x, y) := \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$$

とし, 更に Lucas 多項式 $L_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ と Fibonacci 多項式 $F_{n+1}(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ を

$$\begin{aligned} L_n(x, y) &:= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right\} x^{n-2k} (-y)^k \quad (n > 0), \quad L_0(x, y) := 2, \\ F_{n+1}(x, y) &:= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} (-y)^k \quad (n \geq 0), \quad F_0(x, y) := 0 \end{aligned}$$

とする. ただし, $\binom{n}{k}$ は二項係数:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & (k \neq 0) \\ 1 & (k = 0) \end{cases}$$

である.

Lemma 5. 任意の非負整数 n に対し,

$$p_n(\alpha, \beta) = L_n(\alpha + \beta, \alpha\beta), \quad (13)$$

$$h_n(\alpha, \beta) = F_{n+1}(\alpha + \beta, \alpha\beta). \quad (14)$$

Proof. 公式 (13) については母函数を用いて以下のように証明できる.

まず $h_n(\alpha, \beta)$ の定義と等比級数の和の公式より, 母函数を

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(\alpha, \beta) u^n = \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) u^n = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha u} - \frac{\beta}{1 - \beta u} \right)$$

と変形する.

この最右辺は更に変形できて

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha u} - \frac{\beta}{1 - \beta u} \right) &= \frac{1}{(1 - \alpha u)(1 - \beta u)} \\ &= \frac{1}{1 - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta u^2} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha\beta u^2} \frac{1}{1 - (\alpha + \beta) \frac{u}{1 + \alpha\beta u^2}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} ((\alpha + \beta)u)^l \frac{1}{(1 + \alpha\beta u^2)^{l+1}} \end{aligned} \quad (15)$$

となる. ただし, 最後の等号は再び等比級数の和の公式を用いた.

ここで一般二項級数

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

を用いると, (15) は

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} ((\alpha + \beta)u)^l \frac{1}{(1 + \alpha\beta u^2)^{l+1}} &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{-l-1}{k} (\alpha + \beta)^l (\alpha\beta)^k u^{l+2k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{-n+2k-1}{k} (\alpha + \beta)^{n-2k} (\alpha\beta)^k u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} (\alpha + \beta)^{n-2k} (-\alpha\beta)^k u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(\alpha + \beta, \alpha\beta) u^n \end{aligned}$$

となって結論を得る.

公式 (13) (2 変数の Waring の公式) の証明についても同様である.

□

Lemma 5 の系として, 次が直ちにわかる.

Lemma 6. (1) 整数 n に対し,

$$x^n + (c - x)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right\} c^{n-2k} (x(x-c))^k \quad (n > 0), \quad (16)$$

$$x^{n+1} - (c - x)^{n+1} = (2x - c) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} c^{n-2k} (x(x-c))^k \quad (n \geq 0), \quad (17)$$

$$(18)$$

(2) 整数 n に対し,

$$z^n + (cz^{-1})^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right\} (z + cz^{-1})^{n-2k} (-c)^k \quad (n > 0), \quad (19)$$

$$z^{n+1} - (cz^{-1})^{n+1} = (z - cz^{-1}) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} (z + cz^{-1})^{n-2k} (-c)^k \quad (n \geq 0). \quad (20)$$

Remark 7. Lemma 6 の公式 (19), (20) で $c = 1$, $z = e^{\sqrt{-1}\theta}$ とすると

$$2 \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right\} (2 \cos \theta)^{n-2k} (-1)^k \quad (n > 0), \quad (21)$$

$$\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} (2 \cos \theta)^{n-2k} (-1)^k \quad (n \geq 0) \quad (22)$$

となり, 第一種と第二種 Chebyshev 多項式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left\{ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right\} x^{n-2k}, \quad (23)$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} \quad (24)$$

を得る.

Proof of Theorem 3. (1) 対称性 $f_+(x) = f_+(c-x)$ より

$$f_+(x) = \frac{1}{2} (f_+(x) + f_+(c-x)) = c_0^+ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n c_m^+ \{x^m + (c-x)^m\}.$$

ここで Lemma 6 の (16) より

$$f_+(x) = c_0^+ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n c_m^+ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left\{ \binom{m-k}{k} + \binom{m-k-1}{k-1} \right\} c^{m-2k} (x(x-c))^k$$

$$\begin{aligned}
&= c_0^+ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{m=k}^n \binom{m-k}{k} c_m^+ + \sum_{m=k+1}^n \binom{m-k-1}{k-1} c_m^+ \right\} c^{n-2k} (x(x-c))^k \\
&= c_0^+ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{m=0}^{n-k} \binom{m}{k} c_{m+k}^+ + \sum_{m=0}^n \binom{m}{k-1} c_{m+k+1}^+ \right\} c^{n-2k} (x(x-c))^k.
\end{aligned}$$

他方, $f_-(x)$ に関しても対称性 $f_-(x) = -f_-(c-x)$ より

$$\begin{aligned}
f_-(x) &= \frac{1}{2} (f_-(x) - f_-(c-x)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n c_m^- \{x^m - (c-x)^m\}
\end{aligned}$$

と変形して, Lemma 6 の (17) を同様に用いる.

(2) 対称性 $\tilde{f}_\pm(cz^{-1}) = \pm \tilde{f}_\pm(z)$ より

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_+(z) &= \frac{1}{2} (\tilde{f}_+(z) + \tilde{f}_+(cz^{-1})) = \tilde{c}_0^+ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \tilde{c}_m^+ \{z^m + (cz^{-1})^m\}, \\
\tilde{f}_-(z) &= \frac{1}{2} (\tilde{f}_-(z) - \tilde{f}_-(cz^{-1})) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \tilde{c}_m^- \{z^m - (cz^{-1})^m\}
\end{aligned}$$

と変形して, Lemma 6 の (19), (20) より結論を得る. □

Proof of Theorem 4. 多重 Bernoulli 多項式と多重 Euler 多項式についての対称性

$$B_{r,n}(|\mathbf{a}| - z \mid |\mathbf{a}|) = (-1)^n B_{r,n}(z \mid |\mathbf{a}|), \quad E_{r,n}(|\mathbf{a}| - z \mid |\mathbf{a}|) = (-1)^n E_{r,n}(z \mid |\mathbf{a}|) \quad (25)$$

に注意して, 公式 (4), (5) を適用すれば直ちに得られる. □

Remark 8. Knuth は定理 2 を証明するために, Bernoulli 多項式の対称性 (25) ($r = 1$) 以外の性質をいくつも用いていた複雑な証明をしているが, 上述のように対称性 (25) だけで十分である.

Acknowledgments

本研究は JSPS 科研費 (Grant Number 21K13808) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] A. W. F. Edwards, *A Quick route to sums of powers*, Amer. Math. Monthly **93** (1986), no. 6, pp451–455.
- [2] J. Faulhaber, *Academia Algebra*, Darinnen die miraculosische Inventiones zu den höchsten Cossen weiters continuirt und profitiert werden, call number QA154.8 F3 1631a fMATHat Stanford University Libraries, Johann Ulrich Schonigs, Augspurg [sic], 1631.

- [3] C. G. J. Jacobi, *De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae*, J. Reine Angew. Math. **12** (1834), no. 6, pp263–272.
- [4] D. E. Knuth, *Johann Faulhaber and sums of powers*, Math. Comp. **61** (1993), no. 203, pp277–294.

Genki Shibukawa
Kitami Institute of Technology
165 Koencho, Kitami, 090-8507, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@mail.kitami-it.ac.jp

フィボナッチ数を係数にもつ多項式の 零点の配置と既約性について

日本フィボナッチ協会 第23回研究集会

加隈 弘晃 (開智日本橋学園中学・高等学校)

August 22, 2025

1 / 28

① 研究の動機

② 零点の配置の解析

③ 既約性の証明

④ 今後の展望

2 / 28

① 研究の動機

② 零点の配置の解析

③ 既約性の証明

④ 今後の展望

3 / 28

研究の動機

3年前に勤務していた開智未来高校の住吉莉玖くんから

$$f_n^m(x) = F_n x^m + F_{n+1} x^{m-1} + \cdots + F_{n+m-1} x + F_{n+m}$$

の実数の零点についての研究の相談を受けた。最初はあまりいい結果は導けないのではないかと考えていたが…

4 / 28

研究の動機

実数の零点に関する研究で、住吉君が東京理科大学の第14回坊っちゃん科学賞の最優秀賞を受賞

色々調べると、最高次の係数が初項から始まるケースは先行研究があったが([1],[2],[3]), 複素数の零点について調べているものは見つけられなかった.

自分でも研究を続けて、その結果をまとめた論文がFibonacci Quarterly にアクセプト [4] されたので、その内容を発表します.

5 / 28

① 研究の動機

② 零点の配置の解析

③ 既約性の証明

④ 今後の展望

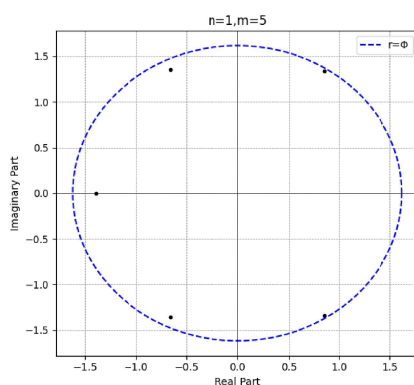
6 / 28

数値実験より

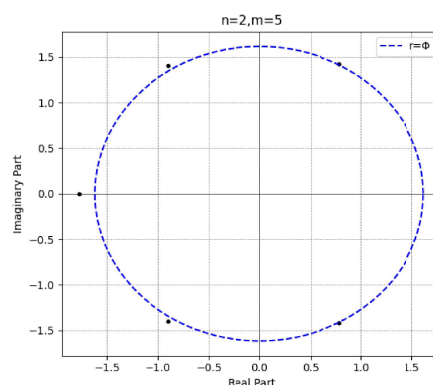
n と m の値を変えて数値実験を行ったところ…

- 零点は中心0, 半径 ϕ (黄金比) の円周上にほぼ等間隔に並ぶ
- 零点は n が奇数のとき円の内部, 偶数のとき円の内部にある
- n が大きくなると, 零点は $\phi\zeta_{m+1}^k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) に近づく (ζ_{m+1} は1の原始 $m+1$ 乗根)

7 / 28



$f_1^5(x)$ の零点



$f_2^5(x)$ の零点

8 / 28

掛谷-Eneström の定理

定理

正数の列 $\{a_n\}$ を係数にもつ多項式 $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}$ の零点 z について, 次の不等式が成り立つ.

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{a_{j+1}}{a_j} \right\} \leq |z| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{a_{j+1}}{a_j} \right\}$$

$$\frac{F_2}{F_1} < \frac{F_4}{F_3} < \cdots < \phi < \cdots < \frac{F_5}{F_4} < \frac{F_3}{F_2}$$

が成り立つことから, $f_n^m(x)$ の零点は複素平面上の円環領域に存在する.

9 / 28

1 次分数関数との関係

定理

z が $f_n^m(x)$ の零点か, $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるとき, 次が成り立つ.

$$z^{m+1} = \frac{F_{n+m+1}z + F_{n+m}}{F_nz + F_{n-1}} \quad (\text{右辺の式を } g(z) \text{ とおく})$$

$n = 5, m = 3$ で例示する. 次の (母関数と似た) 計算から示せる.

$$\begin{aligned} 0 &= (z^2 - z - 1)(5z^3 + 8z^2 + 13z + 21) \\ &= 5z^5 + 8z^4 + 13z^3 + 21z^2 \\ &\quad - 5z^4 - 8z^3 - 13z^2 - 21z \\ &\quad - 5z^3 - 8z^2 - 13z - 21 = z^4(5z + 3) - 34z - 21 \end{aligned}$$

10 / 28

$g(z)$ の性質

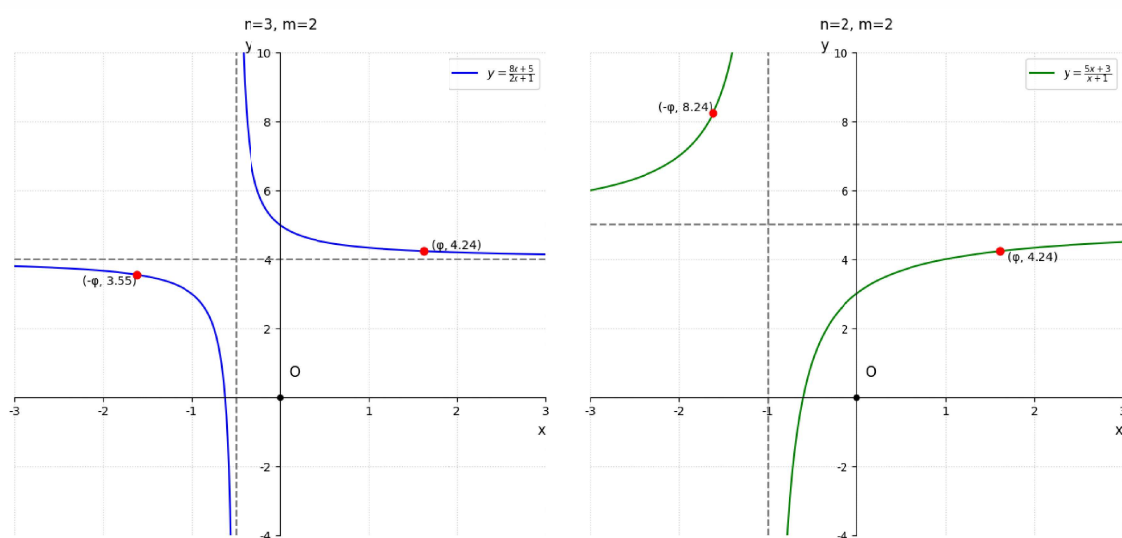
$$g(z) = \frac{F_{n+m+1}}{F_n} - \frac{F_{n+m-1}F_{n-1} - F_{n+m}F_n}{F_n z + F_{n-1}}$$

カッシーニの公式から

$$F_{n+m-1}F_{n-1} - F_{n+m}F_n = (-1)^n F_{m+1}$$

なので, $y = g(x)$ のグラフは n の偶奇で傾向が変わる.

11 / 28



12 / 28

零点の n の偶奇による振る舞いの違い

定理

n が奇数, z が $f_n^m(x)$ の零点のとき, $|z| \leq \phi$

証明.

$|z| > \phi$ と仮定する. $\overline{g(z)} = g(\bar{z})$ なので, g によって図形の実軸に関する対称性は保たれる. g は円 $|z| = \phi$ の外部を直径の両端が $g(\phi)$ と $g(-\phi)$ である円の内部に移す. このとき, グラフから $0 < g(-\phi) < g(\phi) = \phi^{m+1}$ なので, $|z|^{m+1} = |g(z)| \leq \phi^{m+1}$ が成り立つが, これは仮定に反する. \square

13 / 28

定理

n が偶数, z が $f_n^m(x)$ の零点のとき, $|z| \geq \phi$

証明.

掛谷の定理から $|z| \geq \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} (= a_1)$ で, g はこの領域を直径の両端が $g(a_1)$ と $g(-a_1)$ である円の内部に移すため, $|z|^{m+1} = |g(z)| \geq g(a_1)$.

$$g(a_1) = \frac{F_{n+m+1}F_{n+2} + F_{n+m}F_{n+1}}{F_{n+2}F_n + F_{n+1}F_{n-1}} = \frac{F_{2n+m+2}}{F_{2n+1}}$$

であるから, $\frac{F_{2n+m+2}}{F_{2n+1}} = \frac{F_{2n+m+2}}{F_{2n+m+1}} \frac{F_{2n+m+1}}{F_{2n+m}} \cdots \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} \geq \left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} \right)^{m+1}$ より

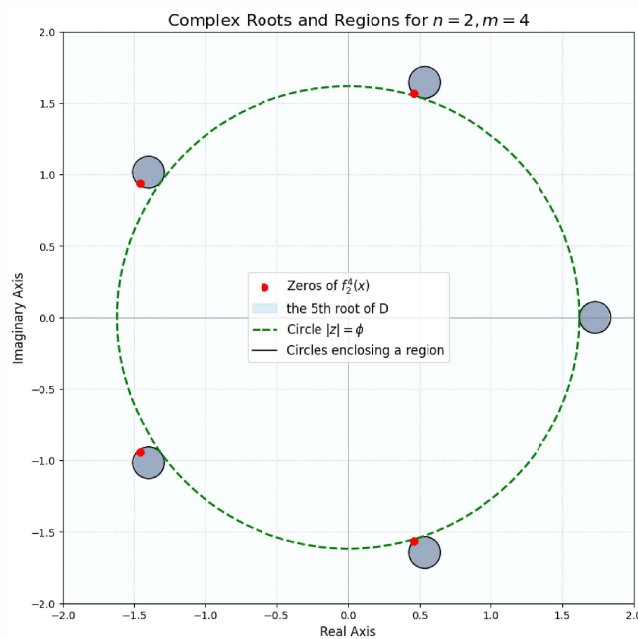
$|z| \geq g(a_1)^{\frac{1}{m+1}} \geq \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} (= a_2)$. この手順を繰り返すことで示せる. \square

14 / 28

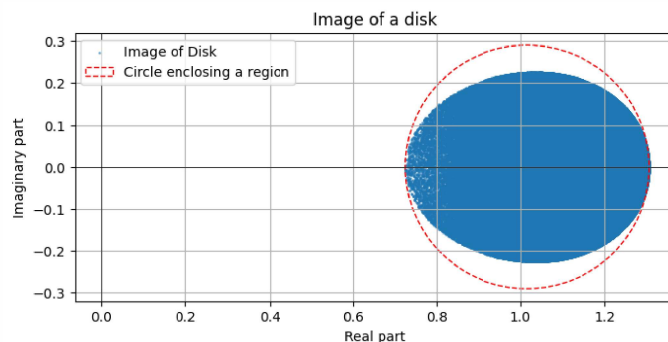
零点の配置

n が偶数, z が $f_n^m(x)$ の零点のときは, $g(z) = z^{m+1}$ は直径の両端が $g(\phi)$ と $g(-\phi)$ である円の周および内部にあるので, この領域に含まれる複素数の $m+1$ 乗根の作る領域に零点が存在する. この $m+1$ 乗根のつくる領域は, 原点中心で半径が ϕ の円周上に等間隔に並ぶ $m+1$ 個の円に含まれる領域になることが示せる. この円を D_0, D_1, \dots, D_m とおく.

15 / 28



16 / 28



例：中心 2, 半径 1.8 の円の 5 乗根の分枝の 1 つがつくる像.
 特定の条件を満たす円のべき乗根の各分枝のつくる像は, 実軸上の直径の両端のべき乗根を直径の両端とする円, またはその円を原点中心に $\frac{2\pi k}{m+1}$ だけ回転させた円に含まれる.

17 / 28

円のべき乗根が円に含まれる条件

定理

a と b を $0 < a < b$ を満たす実数とし, k を 2 以上の整数とする. もし

$$(k - 1) \arcsin \left(\frac{b - a}{b + a} \right) < \pi$$

ならば, a^k と b^k を直径の両端とする円の内部は, a と b を直径の両端とする円の内部に含まれる複素数を k 乗して得られる像に含まれる.

18 / 28

零点は円周上にほぼ等間隔に並ぶ

定理

n を偶数とする. $G_k : D_k \rightarrow D_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) を,

$$G_k(z) = \exp \left(\frac{\operatorname{Log} g(z) + 2\pi ki}{m+1} \right) \quad (g(z)^{\frac{1}{m+1}} \text{ の分枝の一つ})$$

とおくと, G_k は縮小写像である.

この定理から, 各 D_k に1つずつ G_k の不動点, つまり $f_n^m(x)$ の零点が存在することが示せる. n が奇数の場合は $|z| \geq \frac{F_{n+1}}{F_n}$ が成り立つことを用いることで, 同様のことが証明できる. この零点を含む円の直径は, n に対して F_n^{-2} 程度のオーダーで変化する.

19 / 28

❶ 研究の動機

❷ 零点の配置の解析

❸ 既約性の証明

❹ 今後の展望

20 / 28

主定理

定理

$n \geq m - 1$ のとき, $f_n^m(x)$ は $\mathbb{Z}[x]$ で既約である.

条件 $n \geq m - 1$ は, $f_n^m(x)$ の零点と $\phi\zeta_{m+1}^k$ が, この証明の議論に必要なだけ近くなるための条件である. ただし, この条件を満たしていない多項式 $f_n^m(x)$ で可約なものは今のところ見つかっていない.

21 / 28

証明の流れ①

$f_n^m(x)$ の零点を z_1, z_2, \dots, z_m とすると, 解と係数の関係から $F_n \prod_{k=1}^m |z_k| = F_{n+m}$ が成り立つ.

$$F_{n+m} - F_n \phi^m = F_m (-\phi)^{-n} = \frac{(-1)^n F_m}{F_n \phi + F_{n-1}}$$

となることから, $n \geq m - 1$ ならば

$$\frac{F_m}{F_n \phi + F_{n-1}} < \frac{F_m}{F_n + F_{n-1}} = \frac{F_m}{F_{n+1}} \leq 1$$

だから, さらに n が奇数ならば $\lfloor F_n \phi^m \rfloor = F_{n+m}$, n が偶数ならば $\lceil F_n \phi^m \rceil = F_{n+m}$ である.

22 / 28

証明の流れ②

もし $f_n^m(x) = P(x)Q(x)$ となる定数でない整数係数多項式 $P(x), Q(x)$ があると仮定する. 次数は p, q , 最高次係数は a, b , 定数項は c, d とすると $m = p + q$, $F_n = ab$, $F_{n+m} = cd$ である. $P(x), Q(x)$ の零点は $f_n^m(x)$ の零点なので, 同様の議論によって n が奇数なら $\lfloor a\phi^p \rfloor = c, \lfloor b\phi^q \rfloor = d$ が示せる. ゆえに,

$$\lfloor a\phi^p \rfloor \lfloor b\phi^q \rfloor = \lfloor F_n \phi^m \rfloor = F_{n+m}.$$

が成り立つ. n が偶数の場合も同様に次が示せる.

$$\lceil a\phi^p \rceil \lceil b\phi^q \rceil = \lceil F_n \phi^m \rceil = F_{n+m}.$$

しかし, 打ち切り (または切り上げ) による誤差が大きいため, このような式は決して成り立ちえない.

23 / 28

$\lfloor a\phi^p \rfloor \lfloor b\phi^q \rfloor = F_{n+m}$ について

右辺と左辺の差が小さいのは次のようなケース.

$$\begin{aligned} \lfloor \phi^6 \rfloor - \lfloor \phi^3 \rfloor \lfloor \phi^3 \rfloor &= 1, \quad \lfloor \phi^{10} \rfloor - \lfloor \phi^5 \rfloor \lfloor \phi^5 \rfloor = 1, \dots \\ \lfloor F_5 \phi^6 \rfloor - \lfloor \phi^5 \rfloor \lfloor F_5 \phi \rfloor &= 1, \quad \lfloor F_9 \phi^{10} \rfloor - \lfloor \phi^9 \rfloor \lfloor F_9 \phi \rfloor = 1, \dots \end{aligned}$$

証明では, k を正の整数, $F_{2k-1} \leq n < F_{2k+1}$ とするとき,

$$n\phi - \lfloor n\phi \rfloor \geq \frac{1}{\phi^{2k-1}}$$

が成り立つことを用いた.

24 / 28

- ① 研究の動機
- ② 零点の配置の解析
- ③ 既約性の証明
- ④ 今後の展望





25 / 28

今後の展望

- 係数を他の数列に変更して議論を展開できるか検証する
リュカ数だと, 偶奇による零点の振る舞いが逆転
線形回帰数列であれば, n が大きいときはほぼ同様?
- 既約性の条件を緩和する
もっと細かい評価を行えば, $n \geq m - 1$ を外せるかも
"等比数列に近い"数列が係数であるような多項式は既約?
- 既存の理論との関係性を探す
円周等分多項式との類似性など

26 / 28

参考文献

-  D. Garth, D. Mills and P. Mitchell, *Polynomials generated by the Fibonacci sequence*, Journal of Integer Sequence, **10**(2007), Art. 07.6.8.
-  F. Mátyás, *On the generalization of the Fibonacci-coefficient polynomials*, Annales Mathematicae et Informaticae, **34** (2007), 71 – 75.
-  F. Mátyás, L. Szalay, *A note on Tribonacci-coefficient polynomials*, Annales Mathematicae et Informaticae, **38** (2011), 95 – 98.
-  K.Hiroaki, The Location of Zeros and Irreducibility of Fibonacci-Coefficient Polynomials. The Fibonacci Quarterly, (2025) 1 – 18. <https://doi.org/10.1080/00150517.2025.2484766>

27 / 28

ご清聴ありがとうございました
hiroakikakuma@gmail.com

28 / 28

$3 \cdot F_n^2$ のアーク・コタンジェントの和について**On the sum of $\operatorname{arccot}(3 \cdot F_n^2)$**

東京海洋大学名誉教授 中村 滋 (Shigeru NAKAMURA)

We introduce a solution to the problem proposed by H.Ohtsuka in “Problems and Solutions” corner of American Mathematical Monthly.

1 はじめに

昨年の研究集会における発表では、フィボナッチ数に関するレーマー公式を図形的に解く方法を紹介しました。これはレーマー (D. H. Lehmer ; 1905–1991) が見つけたフィボナッチ数のアーク・コタンジェントと円周率の間に成り立つ美しい式です (1938)。以下においても、タンジェントの逆数であるコタンジェントの逆関数＝アーク・コタンジェントを使います。このアーク・コタンジェント関数を簡単に $\operatorname{Ac}(x) = \operatorname{Arccot} x = \operatorname{Arctan}(1/x)$ と書くと、レーマー公式は次のように書けます： $(\tan(\pi/4)=1 \text{ より}, \operatorname{Ac}(1)=\pi/4)$

$$\pi/4 = \operatorname{Ac}(F_3) + \operatorname{Ac}(F_5) + \operatorname{Ac}(F_7) + \operatorname{Ac}(F_9) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ac}(F_{2n+1})$$

これは、 $\operatorname{Ac}(F_{2n}) = \operatorname{Ac}(F_{2n+1}) + \operatorname{Ac}(F_{2n+2}) \cdots (*)$ という公式の右辺の最後の $\operatorname{Ac}(F_{2n+2})$ を、 n を $n+1$ としたときの $(*)$ の右辺： $\operatorname{Ac}(F_{2n+3}) + \operatorname{Ac}(F_{2n+4})$ で置き換えることを繰り返し、最後に極限值を取ることによって得られます。

前回はこの話の最後に、大塚さんが Fibonacci Quarterly の Elementary Problem に提出した問題とその解を紹介しました。:

$$\pi^2/8 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ac}(F_n) \cdot \operatorname{Ac}(F_{n+1}) \cdots (**).$$

今回は大塚さんの別の問題とその解を紹介します。なお、私の都合でプログラムに載せたタイトルを変更しました。

2 大塚さんの問題とその解

大塚さんが American Math. Monthly の Problems and Solutions corner に提出したのは次の問題です (American Math. Monthly, vol. 132, no. 2, pp.188~89 ; Solutions 12396)。

$$\pi/4 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ac}(3 \cdot F_n^2).$$

(証明) コタンジェントの加法定理 $\cot(\alpha - \beta) = (\cot \alpha \cot \beta + 1) / (\cot \alpha - \cot \beta)$ より、

$\alpha = \operatorname{Ac}(x)$, $\beta = \operatorname{Ac}(y)$ とおくと、 $\cot\{\operatorname{Ac}(x) - \operatorname{Ac}(y)\} = (1 + xy) / (y - x)$ 。

$\therefore \operatorname{Ac}\{(1 + xy) / (y - x)\} = \operatorname{Ac}(x) - \operatorname{Ac}(y)$ 。いま $G_n = 3 \cdot F_n F_{n+1} + (-1)^n$ とおくと、

$$G_n - G_{n-1} = \{3 \cdot F_n F_{n+1} + (-1)^n\} - \{3 \cdot F_{n-1} F_n + (-1)^{n-1}\} = 3 \cdot F_n (F_{n+1} - F_{n-1})$$

$$+2 \cdot (-1)^n = 3 \cdot F_n^2 + 2 \cdot (-1)^n \text{ となる.}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } 1 + G_n G_{n-1} &= 1 + \{3 \cdot F_n F_{n+1} + (-1)^n\} \{3 \cdot F_n F_{n-1} + (-1)^{n-1}\} \\ &= 9 \cdot F_n^2 F_{n+1} F_{n-1} + 3(-1)^n \cdot F_n (F_{n-1} - F_{n+1}). \end{aligned}$$

ここで、ケプラー・カッシーニ・シムソンの定理： $F_{n-1} F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ とフィボナッチ数の定義式によって、

$$\begin{aligned} 1 + G_n G_{n-1} &= 3 \cdot F_n^2 \{3 \cdot F_{n+1} F_{n-1} - (-1)^n\} = 3 \cdot F_n^2 \{3 \cdot (F_n^2 + (-1)^n) - (-1)^n\} \\ &= 3 \cdot F_n^2 \{3 \cdot (F_n^2 + 2 \cdot (-1)^n)\} = 3 \cdot F_n^2 (G_n - G_{n-1}). \end{aligned}$$

$x = G_{n-1}$, $y = G_n$ とおけば、 $1 + x y = 3 \cdot F_n^2 (y - x)$ なので、

$$3 \cdot F_n^2 = (1 + x y) / (y - x) = \cot \{ \text{Ac}(x) - \text{Ac}(y) \}.$$

よって、 $\text{Ac}(3 \cdot F_n^2) = \text{Ac}(x) - \text{Ac}(y) = \text{Ac}(G_{n-1}) - \text{Ac}(G_n)$.

そこで $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Ac}(3 \cdot F_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \text{Ac}(G_{n-1}) - \text{Ac}(G_n) \}$ は望遠鏡級数であり、 $n \geq 1$ で加えれば、初項は $\text{Ac}(G_0) = \text{Ac}(1)$, $G_n = 3 \cdot F_n F_{n+1} + (-1)^n$ なので、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $G_n \rightarrow \infty$ となる。よって $\text{Ac}(G_n) \rightarrow 0$ となるから、この級数は収束し、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Ac}(3 \cdot F_n^2) &= \{ \text{Ac}(G_0) - \text{Ac}(G_1) \} + \{ \text{Ac}(G_1) - \text{Ac}(G_2) \} + \{ \text{Ac}(G_2) - \text{Ac}(G_3) \} \\ &\quad + \cdots + \{ \text{Ac}(G_{n-1}) - \text{Ac}(G_n) \} + \cdots = \pi / 4 \end{aligned}$$

となる。なお、この数列 $G_n = 3 \cdot F_n F_{n+1} + (-1)^n$ は、OEIS (Online Encyclopedia of Integers Sequence) の A014742 に一致する。□

今回予定していた「フィボナッチ数の逆数和について」は勘違いがあつて、論文にまとめられなかったので、大塚問題の一つの紹介に変更しました。

なお、今回の話の最後にチェビシエフ関数 $\theta(x)$ の評価式の間違いについて 注意しました。これは以前良く見掛けた間違いですが、最近も同じ間違いが続いていることが分かったので 少し時間を取ったのでした。これを (付論) として載せておきます。

(付論) チェビシエフ関数 $\theta(x)$ の評価式の間違いについての注意

30 年以上前のことですが, オレゴン州立大学で開かれた West Coast Number Theory Conference で素数分布について発表した折, 第 1 種チェビシエフ関数 $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$ (p : 素数) の評価式について, 当時よく見掛けた間違いを指摘しました. ところが, この間違った評価式が今でも使われていることがあります. そこで, ここで注意喚起をしておきます.

シェンフェルド [S] の評価式: $|\theta(x) - x| < 0.000077629x$ ($x > 1.04 \times 10^7$)
を使った n 番目の素数 p_n についての ロバン [R] の改良評価式について,

$$\text{(正)} \quad p_n > n(\ln n + \ln \ln n - 1.00007\textcolor{red}{7}629x) \quad (n > 2)$$

$$\text{(誤)} \quad p_n > n(\ln n + \ln \ln n - 1.00007\textcolor{red}{2}629x) \quad (n > 2)$$

と, 小数点 6 桁目が違っているのです(アンダーラインの 7 が 2 になっている). ご注意ください.

[Reference]

[S] Shoenfeld, L : Sharper bounds for the Chebyshev function $\theta(x)$ and $\psi(x)$, Math. Comp., 30 (1976) ; pp. 337–360.

[R] Robin, G : Estimation de la fonction de **Tchebychef** θ sur le k -ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ **nombre de diviseurs premiers de n** , Acta Arith., 42 (1983) ; pp. 367–389.