Fibonacci

日本フィボナッチ協会
第24回研究集会報告書

2026年8月

日本フィボナッチ協会

フィボナッチ数と初等整数論に関心のある皆様へ

第24 回日本フィボナッチ研究集会

2026 年 8 月28 日(金曜日)に東京理科大学で開催された表記研究集会の発表論文(11編)および報告（２編）を掲載致します．当日に発表し、今回原稿をまとめていただいたご講演者の皆様のご協力に深く感謝致します。なお今回の研究集会は，続けて参加された方が多く、それぞれ以前の結果をより深く一般化した発表内容であり、収穫の多い研究集会になりました。また今回特別に、中川幸一さんが，Fibonacci Quarterlyの問題を訳出してくださった報告と南出大樹さんがイスタンブールで開催された第２２回国際Fibonacci協会に出席された報告の計２編を掲載しております。両報告とも他では見ることのできない貴重なものになっていますので、この機会にぜひお読みいただきたいと思います。お二方のご尽力に改めて感謝いたします。

今後とも研究集会の発展のために皆様のご協力をお願い申し上げます

日本フィボナッチ協会代表 片山 真一

日本フィボナッチ協会／第 24 回研究集会　プログラム

日　　時　　2026 年 8 月 28 日（金曜日）　9 時 25 分～17 時 00 分
場　　所　　東京理科大学（神楽坂校舎）　２号館４階の２４１・２４２教室
アクセス　　飯田橋駅（ＪＲ総武線，東京メトロ 東西線，有楽町線，南北線，
都営大江戸線）徒歩 5 分
参 加 費　 1000 円（中学生・高校生・高専生は無料）
主催：日本フィボナッチ協会
協賛：東京理科大学理数教育研究センター

9：25 開会の辞（片山 真一）
第 1 セッション（座長：中村滋）
9：30　片山 真一（徳島大学)「高次カプレカ数について」
9：50　飯高 茂（元学習院大学）「乗数付き 完全数の研究」
10：10　今井 琥太郎，池田 結菜，松田 修（津山高専）「オイラーのトーシェント関数の一般化に関する研究」
10：40　久保田 和臣（放送大学 教養学部）「$\sqrt{5}$ の求め方 (3)」
11：05　中川 幸一（足利大学）「Fibonacci Quarterly への投稿のすすめ」

昼休み（11：20～12：50）
数学体験館の案内）五感を使って数学の理論を実体験できる施設です。入り口で受け付けの手続きをしてから、ご利用ください。
場所：東京理科大学　近代科学資料館　地下 1 階　（問い合わせ：03-5228-7411）

第 2 セッション（座長：飯高 茂）
12：50　岩淵 勇樹「mod 9 における複素黄金比 $5+i$ とピサノ周期 24」
13：15　鬼頭 秀誓（海城高校）「傍心の織りなす幾何　平面から立体へ 」
13：40　田中 璃久（東京高専）「$|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} F_k|$ の明示公式について」

休憩（14：10～14：40），写真撮影など

第 3 セッション（座長：大関清太）
14：40　中西 真悟（大阪工業大学）「 パスカル三角形における多様な下向き斜面から得られる数列」
15：10　加隈 弘晃 （開智日本橋中学・高等学校）「等差数列を係数にもつ多項式の既約性評価」
15：40　渋川 元樹（北見工業大学）「little μ 函数, Rogers-Ramanujan 連分数, Schur の q-Fibonacci 数」
16：10　中村 滋（元東京海洋大学）「二項係数の和とリュカ数」
16：35　南出 大樹（東京高専）「22nd International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications（イスタンブール）参加報告」

終わりに
16：50　事務連絡 （片山 真一）
16：55　閉会の辞 （アンケート回収）

高次カプレカ定数について

片山 真一　(徳島大学)

第 24 回日本フィボナッチ研究集会 2026 年 8 月 28 日（東京理科大学）

1　ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数

この論文は，昨年本研究集会で報告した [2] の続編にあたる。まず最初にゼッケンドルフの定理と昨年の主結果を再度掲載して，説明を加えておく。

定理 1.1 (ゼッケンドルフの定理) N を任意の正整数とする。このとき $c_{i+1} > c_i + 1$ をみたす正整数 $c_i \geq 2$ の組がただ 1 組存在して

$$N = \sum_{i=0}^{k} F_{c_i} \quad \text{ただし } F_{c-i} \text{ は } c_i \text{ 番目のフィボナッチ数}$$

と表せる。このような N の表示をゼッケンドルフ表現と呼ぶ。

ここでゼッケンドルフ表現を次のように $0, 1$ からなる位取り記数法と見なす。一例として $N = 14$ を用いて説明する。まず $N = 14 = 13 + 1 = F_7 + F_2$ とゼッケンドルフ表現で表す場合に

$$N = 1 \times F_7 + 0 \times F_6 + 0 \times F_5 + 0 \times F_4 + 0 \times F_3 + 1 \times F_2$$

と各桁がフィボナッチ数である位取り記数法と見なす。このようにゼッケンドルフ表現を位取り記数法として扱う場合の表記を次のように表す。

$$N = 100001_{(Z)}$$

このとき N の各桁の数を位取り記数法に倣って並べ替えて最大となる数を $M(N)$，最小となる数を $m(N)$ とするとき

$$M(N) = 101000_{(Z)}, m(N) = 000101_{(Z)} \text{ なので}$$

カプレカ操作 $K(N) = M(N) - m(N)$ によって

$$K(N) = (F_7 + F_5) - (F_4 + F_2) = F_7 + (F_5 - F_4 - F_2) = F_7 + F_2 = 100001_{(Z)}$$

となる。カプレカ操作 $K(N)$ で $K(N) = N$ となるので，$14 = 100001_{(Z)}$ は，ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数と見なせる。実際には，最小のカプレカ定数である。昨年の本研究集会では，このゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数について，次の主結果を得て報告した。

定理 1.2 (2,3) ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数 N は，偶数桁 $n = 4r + 2s - 2$ $(r \geq 2, s \geq 0,$ 従って $n \geq 6)$ 桁の場合に存在し，次の形に表される。

$$N = \overbrace{1010\cdots10}^{2r-2}00\overbrace{1010\cdots10}^{2s}\overbrace{00\cdots0}^{2r-4}01_{(Z)}$$

上の形のカプレカ定数を (r, s) 型と呼び $K_{(Z)}(r, s)$ と表す。すなわち $n = 4r + 2s - 2, (r \geq 2, s \geq 0)$ 桁のゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数 $K_{(Z)}(r, s)$ は，次のように表される。

$K_{(Z)}(r, s) - 1 = (F_{4r+2s-1} + F_{4r+2s-3} + \cdots + F_{2r+2s+3}) + (F_{2r+2s-1} + F_{2r+2s-3} + \cdots + F_{2r+1})$

一方で 2 進カプレカ数については，次のことが知られていた。

定理 1.3 $n = 2r + s$, $(r \geq 2, s \geq 0)$ 桁の 2 進数のカプレカ定数は，次のように表せる。

$$N = \overbrace{11\cdots1}^{r-1}0\overbrace{11\cdots1}^{s}\overbrace{00\cdots0}^{r-1}1_{(2)}$$

ここでは，上の形の 2 進カプレカ定数を (r, s) 型と呼 $K_{(2)}(r, s)$ と表しておく。このとき $K_{(2)}(r, s)$ の 2 進表示は次のとおりである。

$$K_{(2)}(r,s) - 1 = (2^{2r+s-1} + 2^{2r+s-1} + \cdots + 2^{r+s+1}) + \ (2^{r+s-1} + 2^{r+s-2} + \cdots + 2^r) + 1$$

ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数 $K_{(Z)}(r, s)$ から 2 進表現でのカプレカ定数 $K_{(2)}(r, s)$ への全単射写像 f が，$K_{(Z)}(r, s) - 1$ の F_{2k+1} を　$K_{(2)}(r, s) - 1$ の 2^k へ

$$f : F_{2k+1} \to 2^k$$

として得られる。 このように写像 f は，単に全単射というだけでなく，それぞれの位取り記数法としての構造を保つ対応になっている。

注意 1.4 昨年の本研究集会では，上記の全単射の性質と次セクションで述べる第 2 次カプレカ定数についての成果を報告し，より高次のカプレカ定数においては，ゼッケンドルフ表現と 2 進表現での違いが大きくなると予測した。次章では，次数を上げると両者の違いが顕著になったことを報告する。

2　高次カプレカ定数

昨年の本研究集会では，徳島の富岡西高校の阿部 靖史, 成松 悠汰, 米 聖梧の 3 名の高校生が，SSH での成果として，第 2 カプレカ定数（注意：彼らはカプレカ数と呼称）の概念を導入し， 10 進 3 桁から 6 桁までの第 2 カプレカ定数について彼らの得た成果を報告した ([1])。

ここで高次プレカ操作およびカプレカ定数の定義を述べる。

第 k 次カプレカ操作

k を自然数とする。b を底とする第 k カプレ操作を次のように定める。

b 進 $n \geq 2k - 1$ 桁以上の整数 N に対し，$N = aa\ldots a_{(b)}$ に対しては，値 0 を取るものとする。その他の $N \neq aa\ldots a_{(b)}$ に対しては，N の b 進表示の各桁の数を並べ替えて得られる数全体を考え，得られる数の全体の集合を $A(N)$ と表すことにする。 次に $A(N)$ の数を大きい数から小さい数に順番に並べる。このとき $A(N)$ の中で上から数えて k 番目に大きな数を $M_k(N)$ とし，下から数えて k 番目に小さな数を $m_k(N)$ と著す。その差を取る操作を k 次カプレカ操作と呼び，次のように K_k と表す。

$$K_k(N) = M_k(N) - m_k(N)$$

第 k 次カプレカ定数

この k 次カプレカ操作で，$K_k(N) = N$ と不変な n 桁の数 N を第 k カプレカ定数と呼ぶ。

注意 2.1 第 1 カプレカ操作が，通常のカプレカ操作なので，第 1 カプレカ定数は，通常のカプレカ定数に他ならない。

まず 2 進表現での高次カプレカ定数に関して，任意の $k \geq 2$ に対して，k 次カプレカ定数は無限に存在することが次のようにして示せる。

定理 2.2 任意の $k \geq 2, r \geq 2$ に対して，次の N は，$n = 2r + 2k - 2$ 桁の k 次カプレカ定数である。

$$N = \overbrace{11\cdots1}^{r+k-3}\overbrace{00\cdots0}^{k-1}1\overbrace{00\cdots0}^{r}1_{(2)} = (2^{n-1} + \cdots + 2^{r+k+1}) + 2^{r+1} + 1$$

証明. 上の N にカプレカ操作を行う。

$$M_k(N) = \overbrace{11\cdots1}^{r+k-2}\overbrace{00\cdots0}^{k-1}1\overbrace{00\cdots0}^{r}{}_{(2)},\ m_k(N) = \overbrace{00\cdots0}^{r+k-2}\overbrace{11\cdots1}^{k-1}0\overbrace{11\cdots1}^{r}{}_{(2)}.$$

$$\text{従って，}\quad K_k(N) = M_k(N) - m_k(N) = \overbrace{11\cdots1}^{r+k-3}\overbrace{00\cdots0}^{k-1}1\overbrace{00\cdots0}^{r}1_{(2)} = N.$$

従って N は，2 を底とする $n = 2r + 2k - 2$ 桁の k 次カプレカ定数であることが確かめられた。

これに対し，ゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数については，次のような結果が得られる。

定理 2.3 (2 次) ゼッケンドルフ表現での第 2 カプレカ定数 N は，ただ 1 つの例外の 8 桁の $N = 100000010_{(Z)}$ (2 進第 2 カプレカ定数と対応のない第 2 カプレカ定数) と，$n = 4r + 1$, $(r \geq 2,$ 従って $n \geq 9)$ 桁の次の無限系列が存在する。

$$N = \overbrace{1010\cdots10}^{2r-2}0010\overbrace{00\cdots00}^{2r-2}1_{(Z)} \quad \text{無限系列} \quad (r \geq 2)$$

さらに，$k \geq 3$ の場合のゼッケンドルフ表現での高次カプレカ操作とカプレカ定数については，次のような結果が得られる。

定理 2.4 (3 次) 任意の $r \geq 3$ に対して $n = 4r + 4$ 桁の 3 次カプレカ定数 N が存在して次のように表される。

$$N = \overbrace{1010\cdots10}^{2r-2}010100\overbrace{00\cdots0}^{2r-1}1_{(Z)}$$
$$= (F_{4r+5} + \cdots + F_{2r+9}) + F_{2r+6} + F_{2r+4} + F_2$$

証明. 定理の N に対して，

$$M_3(N) = \overbrace{1010\cdots10}^{2r-2}101000\overbrace{100\cdots0}^{2r-1}{}_{(Z)}, m_3(N) = \overbrace{0000\cdots00}^{2r-2}00101001\overbrace{010\cdots01}^{2r-1}{}_{(Z)}$$

したがって

$$K_3(N) = M_3(N) - m_3(N) = N,\ \text{QED.}$$

定理 2.5 (4 次) 任意の $r \geq 1$ に対して，$n = 4r + 7$ 桁の 4 次カプレカ定数 N が存在して次のように表される。

$$N = \overbrace{1010\cdots10}^{2r}0010001\overbrace{00\cdots0}^{2r-1}1_{(Z)}$$
$$= (F_{4r+8} + \cdots + F_{2r+10}) + F_{2r+6} + F_{2r+2} + F_2$$

証明. 定理の N に対して，

$$M_4(N)=\overbrace{1010\cdots10}^{2r}1010000\overbrace{100\cdots0}^{2r-1}{}_{(Z)},\ m_4(N)=\overbrace{0000\cdots00}^{2r}01010100\overbrace{1010\cdots01}^{2r-1}{}_{(Z)}$$

よって

$$K_4(N)=M_4(N)-m_4(N)=N,\ \text{QED.}$$

注意 2.6 $k=3,4$ の場合にも，上に挙げた無限系列の他に例外的なカプレカ定数が有限個存在する。

最後に 5 次のカプレカ定数については，ここまでとは異なり次のように有限個しか存在しないことが示される。証明は，上の挙げた $k=2,3,4$ の場合も含めて場合分けによって得られるが，5 次カプレカ定数のときに，少し詳細に説明しておこう。

まず N をゼッケンドルフ表現で表した場合，その桁数を n とし N の表現に現れる 1 の数（注：ゼッケンドルフ表現で表したときのフィボナッチ数の総数）を $s(N)$ とする。この時，$K_k(N)=N\Longrightarrow s(K_k(N))=s(N)$ なので，5 次カプレカ定数 N は，$s(N)=s(K_5(N))$ となる N を探すことになる。

まず，$n-2s(N)$ が小さい場合 $0,1,2,3$ の場合は，$M_5(N)$ が例外的な形となる。また $s(N)\leq 4$ の場合は，$m_5(N)$ が例外的な形となる。

場合 1） $n-2s(N)\leq 3$ のときは，$K_5(N)$ の桁数が n より小さくなるか，$s(K_5(N))<s(N)$ が成立するので 5 次カプレカ定数は現れない。

場合 2） $2\leq s(N)\leq 7$ のときは，$s(N)$ の数で場合分けして次のよな 5 次カプレカ定数が見つかる。

$s(N)=2$ のときは，

$$100000000100_{(Z)}=F_{13}+F_4,(12\text{ 桁 }).$$

$s(N)=3$ のときは，

$$1000010100_{(Z)}=F_{11}+F_6+F_4,\ (11\text{ 桁 }).$$

$s(N)=4$ のときは，

$$100100100100_{(Z)}=F_{13}+F_{10}+F_7+F_4,\ (12\text{ 桁 }),$$

$$1010000000101_{(Z)}=F_{14}+F_{12}+F_4+F_2,\ (13\text{ 桁 }),$$

$$1010100000000000001_{(Z)}=F_{20}+F_{18}+F_{16}+F_2,\ (19\text{ 桁 }).$$

$s(N)=5$ のときは

$$10101000000010010_{(Z)}=F_{18}+F_{16}+F_{14}+F_6+F_3,\ (17\text{ 桁 }),$$

$$10101010000000000000010_{(Z)}=F_{24}+F_{22}+F_{20}+F_{18}+F_3,\ (23\text{ 桁 }).$$

$s(N)=6$ のときは

$$10001010100101000_{(Z)}=F_{18}+F_{16}+F_{12}+F_{10}+F_5+F_3,\ (17\text{ 桁 }).$$

$s(N)=7$ のときは

$$10001010101010010_{(Z)}=F_{18}+F_{14}+F_{12}+F_{10}+F_8+F_6+F_3,\ (17\text{ 桁 }),$$

$$100101010101000100_{(Z)} = F_{19} + F_{16} + F_{14} + F_{12} + F_{10} + F_8 + F_4,\ (18\ \text{桁}\ ).$$

残りの $s(N) \geq 8$ の場合は，次のように場合分けし確かめることができる。
この場合は，r, t という 2 つの整数パラメータを用いて $M_5(N)$ と $m_5(N)$ が次のように表される。

$$M_5(N) = \overbrace{1010\cdots10}^{2r+6}0000\overbrace{00\cdots0}^{t}{}_{(Z)}$$

$$m_5(N) = \overbrace{00\cdots00}^{t}10101010\overbrace{0101\cdots01}^{2r}{}_{(Z)}$$

このとき，$s(N) = r + 4,\ (r \geq 4)$ で，$n = 2r + t + 11$ 桁の数で，$t \geq 0$ である。

まず $M_5(N) = (F_{2r+t+11} + F_{2r+t+9} + \cdots + F_{t+8}) + F_{t+2}$，$m_5(N) = F_{2r+10} - F_{2r} - F_2$ であることに留意する。

1）$t \leq 2$ の場合は個別に確かめることができ，上で挙げた 10 この例外の中の 5 個が現れる。

2） 以下では，$t + 8, t, 2r + 10, 2r$ の大小関係による場合分けをして，常に $s(K_5(N))$ と $s(N)$ は一致しないことを確かめる。

2-1) $t + 2 > 2r + 10$ のときは $s(K_5(N)) > s(N) = r + 4$.

2-2) $t + 2 = 2r + 10$ のときは $s(K_5(N)) = r + 6 > s(N) = r + 4$.

2-3) $t + 8 > 2r + 10 > t + 2 > 2r$ のときは $s(K_5(N)) > s(N) = r + 4$.

3) $2r + 10 \geq t + 8$ の場合は，t が偶数のときと，奇数のときに分けて考察する必要がある。しかし結果は，双方をまとめて書くことができて，

3-1) $t + 18 > 2r + 10 \geq t + 8$ の場合は，$t + 2 > 2r$ であり $s(K_5(N)) > s(N) = r + 4$.

3-2) $2r + 10 \geq t + 18$ の場合は，逆に $s(K_5(N)) < s(N) = r + 4$.

以上の結果をまとめて次の定理を得られる。

定理 2.7 (5 次) 5 次カプレカ定数は，次の 10 個しか存在しない。

$$1000010100_{(Z)} = F_{11} + F_6 + F_4,\ (11\ \text{桁}\ ),$$
$$100000000100_{(Z)} = F_{13} + F_4, (12\ \text{桁}\ ),$$
$$100100100100_{(Z)} = F_{13} + F_{10} + F_7 + F_4,\ (12\ \text{桁}\ ),$$
$$1010000000101_{(Z)} = F_{14} + F_{12} + F_4 + F_2,\ (13\ \text{桁}\ ),$$
$$10001010101010010_{(Z)} = F_{18} + F_{14} + F_{12} + F_{10} + F_8 + F_6 + F_3,\ (17\ \text{桁}\ ),$$
$$10001010100101000_{(Z)} = F_{18} + F_{16} + F_{12} + F_{10} + F_5 + F_3,\ (17\ \text{桁}\ ),$$
$$10101000000010010_{(Z)} = F_{18} + F_{16} + F_{14} + F_6 + F_3,\ (17\ \text{桁}\ ),$$
$$100101010101000100_{(Z)} = F_{19} + F_{16} + F_{14} + F_{12} + F_{10} + F_8 + F_4,\ (18\ \text{桁}\ ),$$
$$101010\overbrace{00\cdots0}^{12}1_{(Z)} = F_{20} + F_{18} + F_{16} + F_2,\ (19\ \text{桁}\ ),$$
$$10101010\overbrace{00\cdots0}^{13}10_{(Z)} = F_{24} + F_{22} + F_{20} + F_{18} + F_3,\ (23\ \text{桁}\ ).$$

注意 2.8 昨年の研究集会で報告し，今回も定理 1.2 と定理 1.3 で復習したようにゼッケンドルフ表現でのカプレカ定数と 2 進表現のカプレカ定数の間には，両者の位取り記数法を保つような全単射 f が存在した。さらに 第 2 次カプレカ定数の場合にも 1 つの例外を除けば，全単射が存在することが示せた *(*参：定理 2.1 および [3]*)*。さらにここでは具体的な対応は書かな

いが， $k = 3, 4$ 次の場合も，有限個の例外の場合を除けば，両者のカプレカ定数の間に，$s(N)$ を保つような全単射が存在することを示すことができる。ただし $k = 3, 4$ の場合に自然に導かれる $s(N)$ を保つ全単射では，互いの位取り記数法としての構造は保たれない。さらに第 5 次カプレカ定数の場合では，2 進 5 次カプレカ定数は無限に存在するのに対し，ゼッケンドルフ表現での 5 次カプレカ定数は上で述べた有限個の場合しか存在しない。このようにゼッケンドル表現でのカプレカ定数と 2 進表現でのカプレカ定数は，$k = 1$ の時には，強い類似性が見られたが，次数 k が上がるにつれて両者の違いは大きくなる事が観察された。

注意 2.9 ここで述べた高次カプレカ定数に関する結果については，今年 7月に行われた 第 22 回の *International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications* のオンラインセッションで報告した ([4])。

注意 2.10 得られた 2 進カプレカ定数の結果から示唆されるように，他の底 $b \geq 3$ についての高次カプレカ定数は，$b = 10$ の場合も含めて，パズル的な数学として考察に値するものと考えられる。

References

[1] 阿部 靖史, 成松 悠汰, 米 聖梧，第 2 カプレカ数の可能性，第 23 回日本フィボナッチ研究集会報告集, 2025, pp50–58.

[2] 片山 真一, Kaprekar's Constant in the Zeckendorf representation, 第 23 回日本フィボナッチ研究集会報告集, 2025, pp42-49.

[3] Shin-ichi Katayama, On the Kaprekar's Constant in the Zeckendorf's Representation, *J. Math. Tokushima Univ.*, **59** (2025), 1–12.

[4] Shin-ichi Katayama, On The Higher Kaprekar's Constants in the Zeckendorf's Representations, The 22nd International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, On-line session, July 10, 2026.

[5] Shin-ichi Katayama, On the Kaprekar's Constant in the Zeckendorf's Representation II, Higher Cases, to appear in *J. Math. Tokushima Univ.*, **59** (2026).

乗数付き完全数 の平行移動 について

飯高 茂 (学習院大学 名誉教授)

2026 年 9 月 8 日

1　はじめに

84 歳になったので初心に返って完全数を考え直してみた.
方程式 $\sigma(a) = 2a$ の解を定義により完全数という.

その訳は次の通り.
$a = 2^e, e > 0$ とすると等比級数の和の公式によって $A = \sigma(a) = 2a - 1$.
A;素数と仮定すると $\sigma(A) = A + 1 = 2a$.
$\alpha = aA$ とおくと $\alpha = aA$ は $\sigma(\alpha) = \sigma(a)\sigma(A) = A * 2a = 2\alpha$.
奇数完全数はその存在すらわからないでいる. だから完全数は難物であるというしかない. 平行移動した場合はさらに難しいに違いない.
(私は 70 で退職してから高校生の数学研究を助言する機会がふえたが、彼らは完全数の研究を課題に考えることが多い. 私は彼らが研究できるように完全数を研究しやすくすることに腐心した)

1.1　平行移動した場合

$\sigma(a) = 2a - m$ の解を m だけ平行移動した完全数という..
その訳は次の通り.
$a = 2^e$ に対して $A = \sigma(a) + m = 2a - 1 + m$ を素数と仮定する.
$\sigma(A) = A + 1 = \sigma(a) + m + 1 = 2a + m$; $2a = A - m + 1$.
$\alpha = aA$ とおくと $\alpha = aA$ は $\sigma(\alpha) = \sigma(a)\sigma(A) = A * 2a = 2\alpha$.

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) = \sigma(a)\sigma(A) &= (2a-1) * (A+1) &(1)\\ &= (2a-1)A + 2a - 1 &(2)\\ &= 2\alpha + 2a - A - 1 &(3)\\ &= 2\alpha - m. &(4)\end{aligned}$$

したがって, $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$.

完全数を平行移動することによって面白い整数の世界が次から次へと見えてくるのは驚くべきことである.

2　複数個の素数解

α の代わりに a を使う.
$\sigma(a) = 2a - m$ の解として $a = kp, (p$; 素数, (k, p) ; 互いに素) が複数個あるとする.
$\sigma(kp) = \sigma(k)(p+1) = \sigma(k)p + \sigma(k) = 2kp - m$ によって

$$p(\sigma(k) - 2k) + \sigma(k) = -m$$

p が複数あるので, $\sigma(k) - 2k = 0$, かつ $-\sigma(k) = m$.
すなわち, k は完全数で 平行移動 $m = -2k$ を満たす.

表 1: $\sigma(a) = 2a - m$, の解

a	素因数分解	$A = \sigma(a)$	素因数分解
$m = -12$	$-(2^2 * 3)$		
24	$2^3 * 3$	60	$2^2 * 3 * 5$
54	$2 * 3^3$	120	$2^3 * 3 * 5$
30	$2 * 3 * 5$	72	$2^3 * 3^2$
42	$2 * 3 * 7$	96	$2^5 * 3$
66	$2 * 3 * 11$	144	$2^4 * 3^2$
78	$2 * 3 * 13$	168	$2^3 * 3 * 7$
102	$2 * 3 * 17$	216	$2^3 * 3^3$
114	$2 * 3 * 19$	240	$2^4 * 3 * 5$
138	$2 * 3 * 23$	288	$2^5 * 3^2$
174	$2 * 3 * 29$	360	$2^3 * 3^2 * 5$
186	$2 * 3 * 31$	384	$2^7 * 3$
222	$2 * 3 * 37$	456	$2^3 * 3 * 19$
246	$2 * 3 * 41$	504	$2^3 * 3^2 * 7$
258	$2 * 3 * 43$	528	$2^4 * 3 * 11$
282	$2 * 3 * 47$	576	$2^6 * 3^2$
304	$2^4 * 19$	620	$2^2 * 5 * 31$

$2 * 3 * Q(Q$: 素数) 型の解が多いので通常解と言ってよいだろう.
$304 = 2^4 * 19$ は A 型解の例. 2^eQ を A 型解 という.

3　乗数 h つき, 平行移動 m の 完全数

奇素数 h を定めてこれを乗数とする完全数を考える.
記号 $\widetilde{h}=h+1, H=h*\widetilde{h}$ を以下で用いることにする.
$a=2^e, \alpha=ha$ とおくとき $\sigma(\alpha)=\widetilde{h}(2a-1)$ となる.
これより $h\sigma(\alpha)=\widetilde{h}(2\alpha-h)=2\widetilde{h}\alpha-H$ を満たす.
さて整数 m を定めて $h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ を α を未知数とする方程式とみなしこの解 α を乗数 h つき, 平行移動 m の 完全数と呼ぶ.

私はどうしたら面白い完全数の一般化ができるかを何度も考えたが思わしい結果にいたらなかった.
今回は探索範囲をひろげて $h=3, -m=1000$ まで計算したら $m=-684$ で望ましいほど多量の意味ある解が発見できた. これを人は年の功という.
$h=3$ について m をいろいろ変えて計算し解の多い場合を探す.

表 2: $h=3, h\sigma(\alpha)=\widetilde{h}(2\alpha-h)-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
$m=-12$	-2^2*3		
84	2^2*3*7	224	2^5*7
270	$2*3^3*5$	720	2^4*3^2*5
1488	2^4*3*31	3968	2^7*31
1638	$2*3^2*7*13$	4368	$2^4*3*7*13$
24384	$2^6*3*127$	65024	2^9*127
$m=12$	2^2*3		
30	$2*3*5$	72	2^3*3^2
108	2^2*3^3	280	2^3*5*7
408	2^3*3*17	1080	2^3*3^3*5
98688	$2^7*3*257$	263160	$2^3*3^2*5*17*43$

解にはメルセンヌ素数, フェルマ素数がでてきたりしてまことに興味深い.
ここで 84 が出てきたのは面白い (高島氏によるコメント)

3.1　$m=-12$ のときの解

$m=-12$ の解の一般化をしよう.
$h=3$ のとき
$h\sigma(\alpha)=\widetilde{h}(2\alpha-h)-m=3\sigma(\alpha)=8\alpha-12-m=8\alpha.$
そこで k を 6 でない完全数とすると, $\alpha=3k$ が解になることを以下で確認しよう.
$\sigma(\alpha)=\sigma(3k)=8k; 3\sigma(\alpha)=24k, 8\alpha=24k.$

3.2 $m = 12$ のときの解

$m = 12$ の解の一般化.
$3\sigma(\alpha) = 8\alpha - 12 - 12 = 8\alpha - 24$ が方程式.
$k = 2^e(2^{e+1} + 1)$; フェルマの完全数とするとき $\alpha = 3k$ が解になることを確認しよう.
$2^{e+1} + 1$ は素数,(フェルマ素数) とする.
$\alpha = 3k = 3 * 2^e(2^{e+1} + 1)$ に対して
$\sigma(\alpha) = 4 * (2^{e+1} - 1) * 2 * (2^e + 1)$ になるので
$3\sigma(\alpha) = 24 * (2^e + 1)(2^{e+1} - 1) = 24(2^{2e+1} + 2^e - 1)$
$8\alpha - 24 = 24 * 2^e(2^{e+1} + 1) - 24 = 24(2^{2e+1} + 2^e - 1)$ になり $8\alpha - 24 = 3\sigma(\alpha)$.
ところで $2^2 * 3^3$ も解になる.
この他に解があるだろうか. たぶん誰にもわからない.

3.3 $m = 0$ の解

平行移動無しの場合 $(m = 0)$ の解.
$3\sigma(\alpha) = 8\alpha - 12$ が方程式

表 3: $h = 3, h\sigma(\alpha) = 2\widetilde{h}\alpha - H$ の解

α	素因数分解	$A = \sigma(\alpha)$	素因数分解
3	3	4	2^2
6	$2*3$	12	2^2*3
12	2^2*3	28	2^2*7
24	2^3*3	60	2^2*3*5
48	2^4*3	124	2^2*31
96	2^5*3	252	2^2*3^2*7
192	2^6*3	508	2^2*127
384	2^7*3	1020	$2^2*3*5*17$
684	2^2*3^2*19	1820	$2^2*5*7*13$
768	2^8*3	2044	2^2*7*73
1536	2^9*3	4092	$2^2*3*11*31$
3072	$2^{10}*3$	8188	$2^2*23*89$

主な解は $2^e * 3$ だが $\alpha = 684 = 2^2 * 3^2 * 19$ は特異な解である.
計算だけだが確認しよう.
$\alpha = 684 = 2^2 * 3^2 * 19$ のとき $A = \sigma(\alpha) = 5472, 3A = 5460.$
$8\alpha = 8 * 684 = 5472 = 3A + 12$
$h = 7$ のとき主な解は $2^e * 7$ だが $\alpha = 5390 = 2 * 5 * 7^2 * 11$ は特異な解である.

表 4: $h=7, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
7	7	8	2^3
14	$2*7$	24	2^3*3
28	2^2*7	56	2^3*7
56	2^3*7	120	2^3*3*5
112	2^4*7	248	2^3*31
224	2^5*7	504	2^3*3^2*7
448	2^6*7	1,016	2^3*127
896	2^7*7	2,040	$2^3*3*5*17$
1792	2^8*7	4,088	2^3*7*73
3584	2^9*7	8,184	$2^3*3*11*31$
5390	$2*5*7^2*11$	12,312	2^3*3^4*19
7168	$2^{10}*7$	16,376	$2^3*23*89$

4 一般の素数 h の場合

$h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H$ の解は素数 h で割れるので $\alpha=h^{\varepsilon}\beta, (\varepsilon>0, \quad h\not|\beta)$ と書ける.
$\varepsilon=1$ を仮定すると $K=2^e$ となり解は $\alpha=h2^e$ となる.

Proof

$h\sigma(\alpha)=h\sigma(h\beta)=h\widetilde{h}\sigma(\beta)=\sigma(\beta)H$ は $2\widetilde{h}\alpha-H=\widetilde{h}(2h\beta-h)=(2\beta-1)H$ に等しい.
ゆえに, $\sigma(\beta)H=(2\beta-1)H$, $\sigma(\beta)=2\beta-1$.
ここで概完全数予想を使うと $\beta=2^e$.
したがって $\alpha=2^eh$.

q.e.d.

$\alpha=2^eh$ が通常解になる.

5　完全数 の平行移動

ここで定義を復習する.

$h\sigma(\alpha)=\widetilde{h}(2\alpha-h)-m=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ を満たす α を乗数 h つき, 平行移動 m の 完全数という.

$h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ 解 α が h の倍数なら $h|m$.

逆に m が h の倍数なら α も h の倍数なので $\alpha=h^{\varepsilon}\beta(h\nmid\beta)$.

思い切って $\varepsilon=1$ を仮定すると, $\alpha=h\beta$. さらに $m=hm_1$ まで仮定すると

$$\sigma(\beta)=2\beta-1-m_1$$

.

ここで平行移動の場合の解が数多くある場合（本当は無限にある場合といいたい）を調べる.

k を自然数とし $\alpha=kp,(p$; 素数, k と互いに素). p は複数個の解があるとする.

$\sigma(\alpha)=\sigma(k)(p+1),\widetilde{h}(2kp-h)-m=2k\widetilde{h}p-H-m$ によって

$$(h\sigma(k)-2Hk)p=-h\sigma(k)-H-m.$$

p は複数個あるので $h\sigma(k)-2\widetilde{h}k=0,h\sigma(k)=-H-m$ が成り立つ.

古典的な場合は $(h=1)$ は $\sigma(k)-2k=0;2k=\sigma(k)=-m.$

ゆえに $h(\sigma(k)+\widetilde{h})=-m.$

$-m=h\sigma(k)+H=h(\sigma(k)+\widetilde{h})$

そこで $-m_0=\sigma(k)+\widetilde{h}$ とおく.$-m=-h*m_0$

与えられた h に対して $h\sigma(k)-2\widetilde{h}k=0$ を満たす k を求めることは実際上極めて 困難である.

そこでパソコンを使う.

$h=3$ のとき方程式は, $3\sigma(k)-8k=0.$

古典的な場合は $(h=1)$ は $\sigma(k)-2k=0;2k=\sigma(k)=-m.$ なので $(h\sigma(k)-2\widetilde{h}k=0$ を満たす k は完全数の自然な一般化とみなせる.

$(h\sigma(k)=2\widetilde{h}k$ を満たすとき $h|k.$

そこで, $k=hL,(h\nmid L)$ を仮定すると $\sigma(L)=2L$ を満たすので L は古典的完全数. L を偶数と仮定すれば $L=2^e*(2^{e+1}-1)$; メルセンヌ素数) と書ける (Euler).

表 5: $3\sigma(k)-8k=0$ の解

k	素因数分解	$\sigma(k)$	素因数分解	$-m_0$	$-m$
84	2^2*3*7	224	2^5*7	228	684
270	$2*3^3*5$	720	2^4*3^2*5	724	2172
1488	2^4*3*31	3968	2^7*31	3972	11916
1638	$2*3^2*7*13$	4368	$2^4*3*7*13$	4372	13116
24384	$2^6*3*127$	65024	2^9*127	65028	195084

この表によると 6　より大きい完全数 k に対して $3k$ が解になる.

OEIS (数列大辞典) にある数列 A160321($3\sigma(a)-2a$ が $3a$ の倍数)　と最初の 5 個が一致する. 定義は違うが結果的には最初の 5 個があっているのは不思議である.

表 6: $3\sigma(a)-2a$ が $3a$ の倍数 の解

a	素因数分解	$\sigma(a)$	素因数分解	$3\sigma(a)-8a$
84	2^2*3*7	224	2^5*7	0
270	$2*3^3*5$	720	2^4*3^2*5	0
1488	2^4*3*31	3968	2^7*31	0
1638	$2*3^2*7*13$	4368	$2^4*3*7*13$	0
24384	$2^6*3*127$	65024	2^9*127	0
35640	2^3*3^4*5*11	130680	$2^3*3^3*5*11^2$	106920
199584	2^5*3^4*7*11	731808	$2^5*3^3*7*11^2$	598752

上の表では 素数 Q による解　$2^2*3*7*Q$　が多いのでこれを通常解とよぶ.

Q が 2^3 に変異すると解 672= 2^5*3*7, になり

Q が 3^2 に変異すると $756=2^2*3^3*7$ になるとみなすことができる. これらを擬素数解とよぶ.

Q が 7^2 に変異する場合もある.

実際次のようになった.

$2*3^3*5*Q$ が通常解.

$h=3,-3*3972$

$h=3,-m=3*4372$

表 7: $h=3, -m=3*228=2^2*3^2*19, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
672	2^5*3*7	2016	2^5*3^2*7
756	2^2*3^3*7	2240	2^6*5*7
420	$2^2*3*5*7$	1344	2^6*3*7
924	$2^2*3*7*11$	2688	2^7*3*7
1092	$2^2*3*7*13$	3136	2^6*7^2
1428	$2^2*3*7*17$	4032	2^6*3^2*7
1596	$2^2*3*7*19$	4480	2^7*5*7
1932	$2^2*3*7*23$	5376	2^8*3*7
2436	$2^2*3*7*29$	6720	$2^6*3*5*7$
2604	$2^2*3*7*31$	7168	$2^{10}*7$
3108	$2^2*3*7*37$	8512	2^6*7*19
3444	$2^2*3*7*41$	9408	2^6*3*7^2
3612	$2^2*3*7*43$	9856	2^7*7*11
3948	$2^2*3*7*47$	10752	2^9*3*7

表 8: $h=3, -m=3*228, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
3948	$2^2*3*7*47$	10752	2^9*3*7
4116	2^2*3*7^3	11200	2^6*5^2*7
4452	$2^2*3*7*53$	12096	2^6*3^3*7

表 9: $h=3, -m=3*724, h\sigma(\alpha)=2\tilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
6750	$2*3^3*5^3$	18720	2^5*3^2*5*13
1080	2^3*3^3*5	3600	$2^4*3^2*5^2$
1890	$2*3^3*5*7$	5760	2^7*3^2*5
2970	$2*3^3*5*11$	8640	2^6*3^3*5
3510	$2*3^3*5*13$	10080	2^5*3^2*5*7
4590	$2*3^3*5*17$	12960	2^5*3^4*5
5130	$2*3^3*5*19$	14400	$2^6*3^2*5^2$
6210	$2*3^3*5*23$	17280	2^7*3^3*5
7830	$2*3^3*5*29$	21600	$2^5*3^3*5^2$
8370	$2*3^3*5*31$	23040	2^9*3^2*5
9990	$2*3^3*5*37$	27360	2^5*3^2*5*19
11070	$2*3^3*5*41$	30240	2^5*3^3*5*7
11610	$2*3^3*5*43$	31680	2^6*3^2*5*11

6 $h=5$ の場合

一般には 完全数 K に対して $5K$ が解.

表 10: $h=3, -m=3*724, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
7440	$2^4*3*5*31$	23808	2^8*3*31
10416	$2^4*3*7*31$	31744	$2^{10}*31$
13392	2^4*3^3*31	39680	2^8*5*31
16368	$2^4*3*11*31$	47616	2^9*3*31
18312	$2^3*3*7*109$	52800	2^6*3*5^2*11
19344	$2^4*3*13*31$	55552	2^8*7*31
25296	$2^4*3*17*31$	71424	2^8*3^2*31
28272	$2^4*3*19*31$	79360	2^9*5*31
34224	$2^4*3*23*31$	95232	$2^{10}*3*31$
43152	$2^4*3*29*31$	119040	$2^8*3*5*31$
47616	2^9*3*31	130944	$2^7*3*11*31$
55056	$2^4*3*31*37$	150784	$2^8*19*31$
61008	$2^4*3*31*41$	166656	$2^8*3*7*31$
63984	$2^4*3*31*43$	174592	$2^9*11*31$
69936	$2^4*3*31*47$	190464	$2^{11}*3*31$
78864	$2^4*3*31*53$	214272	2^8*3^3*31
87792	$2^4*3*31*59$	238080	$2^9*3*5*31$
90768	$2^4*3*31*61$	246016	2^8*31^2
99696	$2^4*3*31*67$	269824	$2^9*17*31$
105648	$2^4*3*31*71$	285696	$2^{10}*3^2*31$
108624	$2^4*3*31*73$	293632	$2^8*31*37$
117552	$2^4*3*31*79$	317440	$2^11*5*31$
123504	$2^4*3*31*83$	333312	$2^9*3*7*31$
132432	$2^4*3*31*89$	357120	2^8*3^2*5*31
144336	$2^4*3*31*97$	388864	2^8*7^2*31

表 11: $h=3, -m=3*724, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
6552	2^3*3^2*7*13	21840	$2^4*3*5*7*13$
8190	$2*3^2*5*7*13$	26208	2^5*3^2*7*13
18018	$2*3^2*7*11*13$	52416	2^6*3^2*7*13
27846	$2*3^2*7*13*17$	78624	2^5*3^3*7*13
31122	$2*3^2*7*13*19$	87360	$2^6*3*5*7*13$
33912	2^3*3^3*157	94800	2^4*3*5^2*79
37674	$2*3^2*7*13*23$	104832	2^7*3^2*7*13
44226	$2*3^5*7*13$	122304	2^6*3*7^2*13
47502	$2*3^2*7*13*29$	131040	$2^5*3^2*5*7*13$
50778	$2*3^2*7*13*31$	139776	$2^9*3*7*13$
60606	$2*3^2*7*13*37$	165984	$2^5*3*7*13*19$
67158	$2*3^2*7*13*41$	183456	$2^5*3^2*7^2*13$
70434	$2*3^2*7*13*43$	192192	$2^6*3*7*11*13$
76986	$2*3^2*7*13*47$	209664	2^8*3^2*7*13
80262	$2*3^2*7^3*13$	218400	2^5*3*5^2*7*13
86814	$2*3^2*7*13*53$	235872	2^5*3^4*7*13

表 12: $h=5, 5\sigma(k)-12k=0$ の解

k	素因数分解	$\sigma(k)$	素因数分解	$-m_0$	$-m$
30	$2*3*5$	72	2^3*3^2	78	390
140	2^2*5*7	336	2^4*3*7	342	1720
2480	2^4*5*31	5952	2^6*3*31	5958	29790
6200	2^3*5^2*31	14880	$2^5*3*5*31$	14886	74430
40640	$2^6*5*127$	97536	$2^8*3*127$	97542	487710

表 13: $h=5, m=-6, 0, 18; h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
m= -6	$-2*3$		
42	$2*3*7$	96	2^5*3
492	2^2*3*41	1176	2^3*3*7^2
702	$2*3^3*13$	1680	$2^4*3*5*7$

表 14: $h=5, m=-6, 0, 18; h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
m= 0	0		
5	5	6	$2*3$
10	$2*5$	18	$2*3^2$
20	2^2*5	42	$2*3*7$
40	2^3*5	90	$2*3^2*5$
80	2^4*5	186	$2*3*31$
160	2^5*5	378	$2*3^3*7$
320	2^6*5	762	$2*3*127$
640	2^7*5	1530	$2*3^2*5*17$
1280	2^8*5	3066	$2*3*7*73$
2560	2^9*5	6138	$2*3^2*11*31$
5120	$2^{10}*5$	12282	$2*3*23*89$

$\alpha=5*2^e$ が解.

表 15: $h=5, m=18; h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
m= 18	$2*3^2$		
14	$2*7$	24	2^3*3
54	$2*3^3$	120	2^3*3*5
564	2^2*3*47	1344	2^6*3*7

大型 $-m$
$\alpha=1520=2^4*5*19$ が特異解.
(19 がよく出てくる)

表 16: $h=5, -m=390, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
120	2^3*3*5	360	2^3*3^2*5
270	$2*3^3*5$	720	2^4*3^2*5
750	$2*3*5^3$	1872	2^4*3^2*13
210	$2*3*5*7$	576	2^6*3^2
330	$2*3*5*11$	864	2^5*3^3
390	$2*3*5*13$	1008	2^4*3^2*7
510	$2*3*5*17$	1296	2^4*3^4
570	$2*3*5*19$	1440	2^5*3^2*5
690	$2*3*5*23$	1728	2^6*3^3
870	$2*3*5*29$	2160	2^4*3^3*5
930	$2*3*5*31$	2304	2^8*3^2
1110	$2*3*5*37$	2736	2^4*3^2*19
1230	$2*3*5*41$	3024	2^4*3^3*7
1290	$2*3*5*43$	3168	2^5*3^2*11
1410	$2*3*5*47$	3456	2^7*3^3
1520	2^4*5*19	3720	$2^3*3*5*31$
1590	$2*3*5*53$	3888	2^4*3^5

表 17: $h=5, -m=1720, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
1120	2^5*5*7	3024	2^4*3^3*7
3500	2^2*5^3*7	8736	$2^5*3*7*13$
6860	2^2*5*7^3	16800	2^5*3*5^2*7
420	$2^2*3*5*7$	1344	2^6*3*7
1540	$2^2*5*7*11$	4032	2^6*3^2*7
1820	$2^2*5*7*13$	4704	2^5*3*7^2
2380	$2^2*5*7*17$	6048	2^5*3^3*7
2660	$2^2*5*7*19$	6720	$2^6*3*5*7$
3220	$2^2*5*7*23$	8064	2^7*3^2*7
4060	$2^2*5*7*29$	10080	2^5*3^2*5*7
4340	$2^2*5*7*31$	10752	2^9*3*7
5180	$2^2*5*7*37$	12768	$2^5*3*7*19$
5740	$2^2*5*7*41$	14112	$2^5*3^2*7^2$
6020	$2^2*5*7*43$	14784	$2^6*3*7*11$
6580	$2^2*5*7*47$	16128	2^8*3^2*7
7420	$2^2*5*7*53$	18144	2^5*3^4*7

表 18: $h=5, -m=29790, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
7440	$2^4*3*5*31$	$23,808$	2^8*3*31
14460	$2^2*3*5*241$	$40,656$	$2^4*3*7*11^2$
17360	$2^4*5*7*31$	$47,616$	2^9*3*31
27280	$2^4*5*11*31$	$71,424$	2^8*3^2*31
30520	$2^3*5*7*109$	$79,200$	$2^5*3^2*5^2*11$
32240	$2^4*5*13*31$	$83,328$	$2^7*3*7*31$
42160	$2^4*5*17*31$	$107,136$	2^7*3^3*31
47120	$2^4*5*19*31$	$119,040$	$2^8*3*5*31$
57040	$2^4*5*23*31$	$142,848$	2^9*3^2*31
62000	2^4*5^3*31	$154,752$	$2^7*3*13*31$
71920	$2^4*5*29*31$	$178,560$	2^7*3^2*5*31
79360	2^9*5*31	$196,416$	$2^6*3^2*11*31$

h=5,-m=5*5958

表 19: $h=5, -m=29790, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
7440	$2^4*3*5*31$	23808	2^8*3*31
14460	$2^2*3*5*241$	40656	$2^4*3*7*11^2$
17360	$2^4*5*7*31$	47616	2^9*3*31
27280	$2^4*5*11*31$	71424	2^8*3^2*31
30520	$2^3*5*7*109$	79200	$2^5*3^2*5^2*11$
32240	$2^4*5*13*31$	83328	$2^7*3*7*31$
42160	$2^4*5*17*31$	107136	2^7*3^3*31
47120	$2^4*5*19*31$	119040	$2^8*3*5*31$
57040	$2^4*5*23*31$	142848	2^9*3^2*31
62000	2^4*5^3*31	154752	$2^7*3*13*31$
71920	$2^4*5*29*31$	178560	2^7*3^2*5*31
79360	2^9*5*31	196416	$2^6*3^2*11*31$
91760	$2^4*5*31*37$	226176	$2^7*3*19*31$
101680	$2^4*5*31*41$	249984	2^7*3^2*7*31
106640	$2^4*5*31*43$	261888	$2^8*3*11*31$
116560	$2^4*5*31*47$	285696	$2^{10}*3^2*31$
131440	$2^4*5*31*53$	321408	2^7*3^4*31
146320	$2^4*5*31*59$	357120	2^8*3^2*5*31
151280	$2^4*5*31*61$	369024	2^7*3*31^2
166160	$2^4*5*31*67$	404736	$2^8*3*17*31$
176080	$2^4*5*31*71$	428544	2^9*3^3*31
181040	$2^4*5*31*73$	440448	$2^7*3*31*37$

7　$h=7$ の場合

表 20: $h=7, 7\sigma(k)-16k=0$ の解

k	素因数分解	$\sigma(k)$	素因数分解	$-m_0$	$-m$
42	$2*3*7$	96	2^5*3	104	728
3472	2^4*7*31	7936	2^8*31	7944	55608
56896	$2^6*7*127$	130048	$2^{10}*127$	130056	910392

一般には 完全数 K: $(K\neq 28)$ に対して $7K$ が解.

表 21: $h=7, m=-728, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
168	2^3*3*7	480	2^5*3*5
210	$2*3*5*7$	576	2^6*3^2
378	$2*3^3*7$	960	2^6*3*5
462	$2*3*7*11$	1152	2^7*3^2
546	$2*3*7*13$	1344	2^6*3*7
714	$2*3*7*17$	1728	2^6*3^3
798	$2*3*7*19$	1920	2^7*3*5
966	$2*3*7*23$	2304	2^8*3^2
1218	$2*3*7*29$	2880	2^6*3^2*5
1302	$2*3*7*31$	3072	$2^{10}*3$
1554	$2*3*7*37$	3648	2^6*3*19
1722	$2*3*7*41$	4032	2^6*3^2*7
1806	$2*3*7*43$	4224	2^7*3*11
1974	$2*3*7*47$	4608	2^9*3^2
2058	$2*3*7^3$	4800	2^6*3*5^2

表 22: $h=7, m=-55608, h\sigma(\alpha)=2\widetilde{h}\alpha-H-m$ の解

α	素因数分解	$A=\sigma(\alpha)$	素因数分解
20244	$2^2*3*7*241$	54208	2^6*7*11^2
111104	2^9*7*31	261888	$2^8*3*11*31$
170128	2^4*7^3*31	396800	2^9*5^2*31
10416	$2^4*3*7*31$	31744	$2^{10}*31$
17360	$2^4*5*7*31$	47616	2^9*3*31
38192	$2^4*7*11*31$	95232	$2^{10}*3*31$
45136	$2^4*7*13*31$	111104	2^9*7*31
59024	$2^4*7*17*31$	142848	2^9*3^2*31
65968	$2^4*7*19*31$	158720	$2^{10}*5*31$
79856	$2^4*7*23*31$	190464	$2^{11}*3*31$
100688	$2^4*7*29*31$	238080	$2^9*3*5*31$
128464	$2^4*7*31*37$	301568	$2^9*19*31$
142352	$2^4*7*31*41$	333312	$2^9*3*7*31$
149296	$2^4*7*31*43$	349184	$2^{10}*11*31$
163184	$2^4*7*31*47$	380928	$2^{12}*3*31$
184016	$2^4*7*31*53$	428544	2^9*3^3*31
204848	$2^4*7*31*59$	476160	$2^{10}*3*5*31$
211792	$2^4*7*31*61$	492032	2^9*31^2
232624	$2^4*7*31*67$	539648	$2^{10}*17*31$
246512	$2^4*7*31*71$	571392	$2^{11}*3^2*31$
253456	$2^4*7*31*73$	587264	$2^9*31*37$
274288	$2^4*7*31*79$	634880	$2^{12}*5*31$

参考文献

[1] 飯高 茂 『数学の研究をはじめよう I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX』, 現代数学社 ,2016,2017,2018,2020,2021,2023,2024.

[2] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1

オイラーのトーシェント関数の一般化に関する研究

今井 琥太郎, 池田 結菜（津山高専2年），松田 修（津山高専）

1.これまでのトーシェント関数から立てた研究課題１

トーシェント関数とは
自然数aについて、aと互いに素であるa以下の自然数の個数を$\varphi(a)$と書き、これをトーシェント関数(または、オイラーのトーシェント関数)という。

トーシェント関数の性質(命題1)

・pを素数、kを自然数とおくと、
$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$　　$\varphi(2^k) = 2^{k-1}$

・aとbが互いに素な自然数とすると、
$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

・$a \geq 3$のとき、$\varphi(a)$は偶数

・aとnを互いに素な自然数とすると、
$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

自然数aに対して、$\varphi(\varphi(a))$を$\varphi^2(a)$と書き、ダブルオイラー数(以下、我々はトーシェント-2-ツイスト数と呼ぶことにする)という。

命題２
ダブルオイラー数
（『数学の研究をはじめようIX』飯高茂 より）
$a = 4\varphi^2(a) + 2$を満たすのは、$a = 2F_n$
($F_n = 2^{2^n} + 1$はフェルマー素数)に限る

研究課題１

ダブルオイラー数に類似した性質をもつものはどのようなものがあるのか？

2.研究課題１に対する取り組み(1)
― ツイスト数のリサーチ ―

自然数aに対して$\varphi(\varphi(\varphi(a)))$を$\varphi^3(a)$と書き、これをトーシェント-3-ツイスト数という。
$a = 4\varphi^2(a) + 2 = 2^2\varphi^2(a) + 2$ より、$a = 9\varphi^3(a) + 3$
を満たすaに法則性があると予想し、調査した。

式を満たすaのリスト

a	素因数分解	
3	3	
12	$2^2 \times 3$	
21	3×7	$3 \times (3 \times 2 + 1)$
39	3×13	$3 \times (3 \times 2^2 + 1)$
75	3×5^2	
291	3×97	$3 \times (3 \times 2^5 + 1)$
579	3×193	$3 \times (3 \times 2^6 + 1)$

考察
$a = 9\varphi^3(a) + 3$を満たすaでは、
$3 \times 2^n + 1$という形の素数が関係する。

3.研究課題１に対する取り組み(2)
― トーシェント-3-ツイスト数 ―

考察をもとに、命題2の拡張として、以下の命題を証明した。

命題3
pとqを互いに異なる素数とし、$a = pq$とする。このとき、
$a = 9\varphi^3(a) + 3$を満たすならば$a = 3G_n$ (G_nは$3 \times 2^n + 1$の素数)に限る

○トーシェント-2-ツイスト数(ダブルオイラー数)では$2^n + 1$型、
○トーシェント-3-ツイスト数では$3 \times 2^n + 1$型、の素数がポイントであった。
○さらにツイスト数の一般化を目指し、フェルマー素数F_nによって一般化することに成功した。

4. 研究課題１に対する取り組み(3)
― トーシェントツイスト数 ―

自然数aに対して$\varphi(\varphi \dots (\varphi(a)))$を$\varphi^k(a)$と書き、これを**トーシェント-$k$-ツイスト数**という。

さらに、命題2と命題3の拡張として、Fを素数として、
$a = F^2\varphi^F(a) + F$を満たす自然数aに関する研究を行ってみたが、いい成果は得られなかった。
そこで、データをもとに、定義を変更した。

定義１
Fを素数、kを自然数とする。

$$a = F^2\varphi^k(a) + F$$

を満たす自然数aを、**トーシェント-(F, k)ツイスト数**という。

$F_n = 2^{2^n} + 1$をフェルマー素数、uを自然数とし$G_n(u) = F_n \times 2^u + 1$も素数とする。
$G_n(u)$を**随伴フェルマー素数**と呼ぶ。

F_nとG_nに関する定理を**定理1**に示す。

定理1
p, qを互いに素な素数とし、$a = pq$とする。
さらに、$T_n = 2^{n+1} + 1$とする。
このとき、**トーシェント-(F_n, T_n)ツイスト数aは、**
$a = F_nG_n(u)$ ($G_n(u)$は$F_n + 1$または随伴フェルマー素数)に限る。

証明
まず、$a = F_nG_n(u)$が、$a = F_n^2\varphi^{T_n}(a) + F_n$を満たすことを示す。

$$\varphi(a) = (F_n - 1)(F_n \cdot 2^u) = F_n \cdot 2^{2^n+u}, \varphi^2(a) = (F_n - 1) \cdot 2^{2^n+u-1} = 2^{2^n} \cdot 2^{2^n+u-1} = 2^{2\cdot 2^n+u-1}$$

これより

$$\varphi^{T_n}(a) = \varphi^{T_n-2}\left(\varphi^2(a)\right) = \varphi^{T_n-2}\left(2^{2\cdot 2^n+u-1}\right) = \varphi^{2\cdot 2^n-1}\left(2^{2\cdot 2^n+u-1}\right) = 2^u$$

を得る。よって、

$$右辺 = F_n^2\varphi^{T_n}(a) + F_n = F_n^2 \cdot 2^u + F_n = F_n(F_n \cdot 2^u + 1) = F_n \cdot G_n(u) = 左辺$$

次に、$a = F_n^2\varphi^{T_n}(a) + F_n$ならば$a = F_nG_n(u)$となることを示す。仮定より$a \equiv F_n \pmod{F_n^2}$であるので

$$a = F_n(F_n \cdot m + 1)\cdots(1)$$

ただし、mは自然数となる。仮定の式と比較すると、

$$m = \varphi^{T_n}(a)\cdots(2)$$

がいえる。

また、$p = F_n$, $q = F_n \cdot m + 1$とできるので、$m = \varphi^{T_n}(a) = 2^u$となることを示せばよい。
(1)$m = 1$のとき、$q = F_n + 1$は偶数であるので、qは素数という過程に矛盾する。
(2)$m \geq 2$とする。$m = \varphi^{T_n}(a)$は偶数なので、$u \geq 1$とし、

$$m = 2^u\alpha\cdots(3)$$

ただし、αは奇数と置く。(2)より$m = \varphi^{T_n}(a)$なので、

$$2^u\alpha = \varphi^{T_n-1}\left((F_n - 1) \cdot F_n \cdot m\right)\cdots(4)$$

となる。$F_n - 1 = 2^{2^n}$と(4)より

$$2^u\alpha = \varphi^{T_n-1}\left(2^{2^n+u} \cdot F_n \cdot \alpha\right)$$

が得られる。

証明のポイント

(3-1)F_nとαは互いに素とする。(4)より

$$2^u\alpha = \varphi^{T_n-1}\left(2^{2^n+u} \cdot F_n \cdot \alpha\right) = \varphi^{T_n-2}\left(\varphi\left(2^{2^n+u} \cdot F_n \cdot \alpha\right)\right)$$
$$= \varphi^{T_n-2}\left(2^{2^n+u-1} \cdot (F_n - 1) \cdot \varphi(\alpha)\right)\cdots(5)$$

である。$\varphi(\alpha) = 2^l\alpha'$($\alpha'$は奇数)と置くと、(5)は

$$2^u\alpha = \varphi^{T_n-2}\left(2^{2^n+u-1} \cdot (F_n - 1) \cdot 2^l\alpha'\right)$$
$$= \varphi^{T_n-2}\left(2^{2^n+u-1+l} \cdot (F_n - 1) \cdot \alpha'\right)$$
$$= \varphi^{2\cdot 2^n-1}\left(2^{2^n+u-1+l} \cdot 2^{2^n} \cdot \alpha'\right)$$
$$= \varphi^{2\cdot 2^n-1}\left(2^{2\cdot 2^n+u-1+l} \cdot \alpha'\right)\cdots(6)$$

$\varphi(2^k) = 2^{k-1}$
2が掃き出される性質

となる。$\varphi^{2\cdot 2^n-1}$を$T_n - 2(= 2 \cdot 2^n - 1)$回繰り返すことなので、右辺の計算において、$a \geq 3$ならば$\varphi(a)$は偶数であるため、(6)は

$$2^u\alpha = 2^{u+l+h} \cdot \beta$$

という形にすることができる。ここで$h \geq 0$、βは奇数である。

$u = u + l + h$より$l = h = 0$で、$\alpha = \beta$である。したがって、$\varphi(\alpha) = 2^l\alpha' = \alpha'$より$\varphi(\alpha)$は奇数となる。
これは$\alpha = 1$を意味する。よって$\beta = \alpha = 1$となる。$m = 2^u\alpha$だったので、$m = 2^u$が示された。

(3-2)F_nとαは互いに素でないとする。$\alpha = F_n^b\gamma$(γはF_nと互いに素)と置くと、(3)より

$$m = 2^uF_n^b\gamma\cdots(7)$$

となる。(1)と$F_n - 1 = 2^{2^n}$より

$$m = \varphi^{T_n}(a) = \varphi^{T_n-1}\left((F_n - 1) \cdot F_n \cdot m\right) = \varphi^{T_n-1}\left((F_n - 1) \cdot F_n \cdot 2^uF_n^b\gamma\right)$$
$$= \varphi^{T_n-1}\left(2^{2^n+u} \cdot F_n^{b+1} \cdot \gamma\right) = \varphi^{T_n-2}\left(2^{2^n+u-1} \cdot (F_n - 1) \cdot F_n^b \cdot \varphi(\gamma)\right)$$
$$= \varphi^{T_n-2}\left(2^{2^n+u-1} \cdot 2^{2^n} \cdot F_n^b \cdot \varphi(\gamma)\right) = \varphi^{T_n-2}\left(2^{2\cdot 2^n+u-1} \cdot F_n^b \cdot \varphi(\gamma)\right)$$

$T_n = 2 \cdot 2^n + 1$より

$$m = \varphi^{2\cdot 2^n-1}\left(2^{2\cdot 2^n+u-1} \cdot F_n^b \cdot \varphi(\gamma)\right)\cdots(8)$$

を得る。ここで、$\varphi(\gamma) = 2^l\gamma'$($\gamma'$は奇数)と置く。

もしγ'とF_nが互いに素ならば、式(8)は、

$$m = \varphi^{2\cdot 2^n-1}\left(2^{2\cdot 2^n+u-1} \cdot F_n^b \cdot \varphi(\gamma)\right) = \varphi^{2\cdot 2^n-1}\left(2^{2\cdot 2^n+u+l-1} \cdot F_n^b \cdot \gamma'\right)$$

となる。(7)より

$$2^uF_n^b\gamma = \varphi^{2\cdot 2^n-1}\left(2^{2\cdot 2^n+u+l-1} \cdot F_n^b \cdot \gamma'\right)\cdots(9)$$

(3-1)の場合と同様に、右辺の計算を行うと、(9)は

$$2^u F_n^b \gamma = 2^{u+l+h'} \cdot \beta'$$

という形にすることができる。ここで$h' \geq 0$、β'は奇数である。

$u = u + l + h'$より$l = h' = 0$で、$F_n^b \gamma = \beta'$である。
$l = 0$より$\varphi(\gamma) = 2^l \gamma' = \gamma'$となり、$\boldsymbol{\gamma = 1}$が得られる。これより$\boldsymbol{F_n^b = \beta'}$となる。

さらに、$h' = 0$と(9)より、$\varphi(F_n^b) = 1$である。これは$F_n^b = 1$を意味する。
$m = 2^u F_n^b \gamma$ だったので、$\boldsymbol{m = 2^u}$が示された。■

5. トーシェント関数の一般化

トーシェントツイスト数の定理では、以下の性質が重要であった。
$F_n = 2^{2^n} + 1$をフェルマー素数とすると、
$\varphi(F_n) = 2^{2^n}, \varphi^2(F_n) = 2^{2^n - 1}, \varphi^3(F_n) = 2^{2^n - 2} \cdots$

そこで、$\varphi_3(3^n) = 3^{n-1}, \varphi_3^2(3^n) = 3^{n-2}$
になるようなφ_3がつくれないだろうか

2に関するような関数を、
素数qに関する関数に拡張する

トーシェント関数の性質の復習

・pを素数、kを自然数とおくと、
$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$　　$\varphi(2^k) = 2^{k-1}$

・$a \geq 3$のとき、$\varphi(a)$は偶数

研究課題２

・$\boldsymbol{\varphi_q(a)}$**が**$\boldsymbol{q}$**の倍数**
・$\boldsymbol{\varphi_q(q^n) = q^{n-1}}$
　になるφ_qを定義する

6.研究課題2に対する取り組み
― qトーシェント関数への拡張 ―

定義２

p, qを素数、aを自然数とし、関数$\varphi_q(a)$は、以下の(1),(2)を満たすものとする。
(1)互いに素なaとbに対し、$\varphi_q(ab) = \varphi_q(a)\varphi_q(b)$
(2)kを自然数,pを素数とする
$p < q$のとき,$\boldsymbol{\varphi_q(p^k) = 1}$
$p \geq q$のとき,$\varphi_q(p^k) = \dfrac{\boldsymbol{p^{k-1}(p-1)!}}{\boldsymbol{(q-1)!(p-q)!}} = \boldsymbol{p^{k-1} \times {}_{p-1}C_{q-1}}$
$\varphi_q(a)$をaの$\boldsymbol{q}$**トーシェント関数**と呼ぶ

定義2より、2トーシェント関数は、qトーシェント関数である。
また、$\varphi_q(q^k) = q^{k-1}$である。
以下、トーシェント関数の次の性質について、qトーシェント関数において研究していく。

トーシェント関数の性質の復習

・aとpを互いに素な自然数とすると、
$a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod p$

研究課題３

フェルマーの小定理を、
qトーシェント関数に拡張する

7.研究課題3に対する取り組み
― フェルマーの小定理を３トーシェント関数へ拡張 ―

3トーシェント関数について考える。$p > 3$を素数とすると、

$$\varphi_3(p) = {}_{p-1}C_2 = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

である。
aをpと互いに素な自然数とすると、フェルマーの小定理より
$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$なので、

$$a^{\varphi_3(p)} \equiv \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^{p-2} \equiv (\pm 1)^{p-2} \equiv \pm 1 \pmod p$$

となる。ここで、$p-2$は奇数なので、
$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$となる$a$はどのような数かを考える必要がある。
そのために、平方剰余と生成元を導入する。

定義3(平方剰余)
pを奇素数、aをpと互いに素な自然数とする。
$x^2 \equiv a \pmod p$を満たすxが存在するとき、
aはpを法とする**平方剰余**であるといい、

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

という記号であらわす。また、aがpの倍数の時は、
$\left(\frac{a}{p}\right) = 0$とする。

$\left(\frac{a}{p}\right)$はルジャンドルの記号と呼ばれる。

8.研究課題3に対する取り組み
― 平方剰余と生成元 ―

(1) $\left(\frac{a}{p}\right)$はルジャンドルの記号と呼ばれる。
(2)$F_p^{\times} = \{1,2,\dots,p-1\}$とする。任意の$a \in F_p^{\times}$は、$0 \le i \le p-2$を満たす整数$i$により$a = g^i$と一意的に表すことができる$g \in F_p^{\times}$が存在し、$g$を$F_p^{\times}$の**生成元**という。
iが偶数ならば$\left(\frac{g^i}{p}\right) = 1$で、
奇数ならば$\left(\frac{g^i}{p}\right) = -1$
さらに以下の命題が知られている。

命題3. pを奇素数、a, bをpと互いに素な整数とすると、
以下が成り立つ。
(1)$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ (2) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
(3)$\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$

命題4. $F_p^{\times}$の生成元gの個数は$\varphi(p-1)$個である。

例1.
$p = 5$のとき、
$2^0 \equiv 1, 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 3 \pmod 5$ なので、
$a = 1,4$のとき$\left(\frac{a}{5}\right) = 1$であり、
$a = 2,3$のとき$\left(\frac{a}{5}\right) = -1$となる。
よって、命題3 (1)より、
$a = 1,4$のとき$a^{\varphi_3(5)} \equiv 1 \pmod 5$,
$a = 2,3$のとき$a^{\varphi_3(5)} \equiv -1 \pmod 5$となる。

$p = 7$のとき、
$3^0 \equiv 1, 3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6,$
$3^4 \equiv 4, 3^5 \equiv 5 \pmod 7$なので、
$a = 1,2,4$のとき$a^{\varphi_3(7)} \equiv 1 \pmod 7$,
$a = 3,5,6$のとき$a^{\varphi_3(7)} \equiv -1 \pmod 7$となる。

9.研究課題3に対する取り組み
― フェルマーの小定理を３トーシェント関数へ拡張 ―

例1を一般に考えると、以下の定理が得られる。

定理2
$p > 3$を素数とし、gを$F_p^{\times}$の生成元、$a \in F_p^{\times}$に対し$a = g^i$とする。このとき、
iが偶数なら$a^{\varphi_3(p)} \equiv 1 \pmod p$で、
iが奇数なら$a^{\varphi_3(p)} \equiv -1 \pmod p$である。

証明
命題2(1)より、gを$F_p^{\times}$の生成元、$a \in F_p^{\times}$に対し$a = g^i$としたとき、
iが偶数なら$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$で、
iが奇数なら$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$である。
$a^{\varphi_3(p)} \equiv \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^{p-2}$で$p-2$は奇数なので、
iが偶数なら$a^{\varphi_3(p)} \equiv 1 \pmod p$、
iが奇数なら$a^{\varphi_3(p)} \equiv -1 \pmod p$である。 ■

10.研究課題3に対する取り組み
― ５トーシェント関数に拡張（１）―

5トーシェント関数について考える。$\varphi_5(p) \equiv u \pmod{p-1}$を用いて、以下の定理を証明した。

定理3
$p > 5$を素数とし、gを$F_p^{\times}$の生成元、$a \in F_p^{\times}$に対し$a = g^i$とする。
このとき、
$\varphi_5(p) \equiv u \pmod{p-1}$ であれば、
$a^{\varphi_5(p)} \equiv (g^u)^i \pmod p$ である。

定義の確認
$\varphi_5(p) = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{24}$

証明
$\varphi_5(p) \equiv u \pmod{p-1}$ とすると、自然数mを用いて、
$\varphi_5(p) = (p-1)m + u$ と表せる。フェルマーの小定理より、
$a^{\varphi_5(p)} = (a^m)^{p-1} \times a^u \equiv a^u \pmod p$ $a = g^i$ を用いると、
$a^u \equiv (g^i)^u \equiv (g^u)^i \pmod p$ である。 ■

11.研究課題3に対する取り組み
― 5トーシェント関数に拡張（1）―

$a^{\varphi_5(p)} \equiv (g^u)^i \pmod p$ が具体的にどんな値になるかは、
素数pを8の剰余で場合分けすることで求めることができる。

定理4
$p > 5$を素数とし、gを$F_p^{\times}$の生成元、$a \in F_p^{\times}$に対し$a = g^i$とする。
さらに、$\varphi_5(p) \equiv u \pmod{p-1}$ とする。

(1)$p \equiv 3 \pmod 8$ のとき、 $a^{\varphi_5(p)} \equiv 1 \pmod p$である。
(2)$p \equiv 7 \pmod 8$ のとき、 $a^{\varphi_5(p)} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$である。
(3)$p \equiv 1,5 \pmod 8$ のとき、 iを4の剰余で考える。
$i \equiv 0 \pmod 4$ のとき、$a^{\varphi_5(p)} \equiv 1 \pmod p$である。
$i \equiv 2 \pmod 4$ のとき、$a^{\varphi_5(p)} \equiv -1 \pmod p$である。
$i \equiv 1 \pmod 4$ のとき、$a^{\varphi_5(p)} \equiv g^u \pmod p$である。
$i \equiv 3 \pmod 4$ のとき、$a^{\varphi_5(p)} \equiv -g^u \pmod p$である。

証明
(1)$p \equiv 3 \pmod 8$のとき $p = 8t+3$ (tは正の整数)
$\varphi_5(p) = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{24}$より
$\varphi_5(p) = \frac{(8t+2)(8t+1)8t(8t-1)}{24}$
$(8t+1)8t(8t-1)$は8の倍数でかつ3つの連続した整数の積なので、3の倍数
よって$\frac{(8t+1)8t(8t-1)}{24}$は整数 $p-1 = 8t+2$ より
$\varphi_5(p) \equiv 0 \pmod{p-1}$
定理3より
$a^{\varphi_5(p)} \equiv a^0 = 1 \pmod p$

例3.
$p = 7 \equiv 7 \pmod 8$のとき、

a	g^i	$a^{\varphi_5(p)} \bmod 7$
1	3^6	1
2	3^2	1
3	3^1	-1
4	3^4	1
5	3^5	-1
6	3^3	-1

例2.
$p = 11 \equiv 3 \pmod 8$のとき、

a	g^i	$a^{\varphi_5(p)} \bmod 11$
1	2^{10}	1
2	2^1	1
3	2^8	1
4	2^2	1
5	2^4	1
6	2^9	1
7	2^7	1
8	2^3	1
9	2^6	1
10	2^5	1

(2)$p \equiv 7 \pmod 8$のとき　$p = 8t + 7$

$\varphi_5(p) = \frac{(8t+6)(8t+5)(8t+4)(8t+3)}{24}$

$(8t + 5)(8t + 4)(8t + 3)$は4の倍数でかつ3の倍数

よって$\frac{(8t+5)(8t+4)(8t+3)}{12}$は整数　$p - 1 = 8t + 6$より

$\boldsymbol{\varphi_5(p) \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}}$

定理３より

$a^{\varphi_5(p)} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$

(3)$p \equiv 5 \pmod 8$のとき$p = 8t + 5$

$\varphi_5(p) = \frac{(8t+4)(8t+3)(8t+2)(8t+1)}{24} = \frac{(2t+1)(8t+3)(4t+1)(8t+1)}{3}$

ここで、$p - 1 = 8t + 4 = 4(2t + 1)$ より

$8t + 3 = 4(2t + 1) - 1 \equiv -1 \pmod{p-1}$

$4t + 1 = 2(2t + 1) - 1 \equiv -1 \pmod{p-1}$

$8t + 1 = 4(2t + 1) - 3 \equiv -3 \pmod{p-1}$

$(2t + 1)(8t + 3)(4t + 1)(8t + 1)$

$\equiv (2t + 1)(-1)\{2(2t + 1) - 1\}(-3) \pmod{p-1} = 3(2t + 1)\{2(2t + 1) - 1\} = 6(2t + 1)^2 - 3(2t + 1)$

$= 4(2t + 1)^2 + 2(2t + 1)^2 - 3(2t + 1) \equiv 2(2t + 1)^2 - 3(2t + 1) = (4t + 2)(2t + 1) - 3(2t + 1)$

$= t(8t + 4) + 2(2t + 1) - 3(2t + 1) \equiv 2(2t + 1) - 3(2t + 1) = -(2t + 1) = -2t - 1$

$\equiv 6t + 3 = \boldsymbol{3(2t + 1)} \pmod{p-1}$

よって $\boldsymbol{\varphi_5(p) \equiv \frac{3(2t+1)}{3} \equiv 2t + 1 \pmod{p-1}}$ である。 $\boldsymbol{p - 1 = 8t + 4}$ より、$\boldsymbol{2t + 1 = \frac{p-1}{4}}$ である。

定理3より、$a^{\varphi_5(p)} \equiv (g^u)^i = \left(g^{\frac{p-1}{4}}\right)^i \pmod p$　ここで、$i \equiv 0 \pmod 4$のとき$(i = 4s)$　**フェルマーの小定理より、**

$\left(g^{\frac{p-1}{4}}\right)^{4s} = (g^{p-1})^s \equiv 1 \pmod p$

$i \equiv 2 \pmod 4$のとき$(i = 4s + 2)$

$$\left(g^{\frac{p-1}{4}}\right)^{4s+2} = (g^{p-1})^s \times g^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod p$$

原始根の性質よりg^iは一意的に決まっていて　$g^{p-1} \equiv 1 \pmod p$なので $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$

$i \equiv 1 \pmod 4$のとき$(i = 4s + 1)$

$\left(g^{\frac{p-1}{4}}\right)^{4s+1} = (g^{p-1})^s \times g^{\frac{p-1}{4}} \equiv g^u \pmod p$

$i \equiv 3 \pmod 4$のとき$(i = 4s + 3)$

$g^{2u} \equiv g^{2\times\frac{p-1}{4}} = g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p \quad \Longrightarrow \quad g^{3u} \equiv -g^u \pmod p$

よって，$\left(g^{\frac{p-1}{4}}\right)^{4s+3} = (g^{p-1})^s \times \left(g^{\frac{p-1}{4}}\right)^3 = g^{3u} \equiv -g^u \pmod p$

$p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$のとき$p = 8t + 1$
$\varphi_5(p) = \frac{8t(8t-1)(8t-2)(8t-3)}{24} = \frac{2t(8t-1)(4t-1)(8t-3)}{3}$
$2t(8t-1)(4t-1)(8t-3) \equiv 2t(-1)(4t-1)(-3)$
$= 6t(4t-1) = 24t^2 - 6t$
$\equiv \mathbf{-6t}\ (\mathrm{mod}\ p-1)$
$\varphi_5(p) \equiv \frac{-6t}{3} = \mathbf{-2t}(\mathrm{mod}\ p-1)$
$p - 1 = 8t$より
$\mathbf{-2t} = -\frac{\mathbf{p-1}}{\mathbf{4}}$

定理3より
$a^{\varphi_5(p)} \equiv \left(g^{-\frac{p-1}{4}}\right)^i (\mathrm{mod}\ p)$

$p \equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$のとき と同様に
$i \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ のとき、$a^{\varphi 5(p)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$
$i \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ のとき、$a^{\varphi 5(p)} \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)$
$i \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ のとき、$a^{\varphi 5(p)} \equiv g^u\ (\mathrm{mod}\ p)$
$i \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$ のとき、$a^{\varphi 5(p)} \equiv -g^u\ (\mathrm{mod}\ p)$ が示せる ■

例4.
$p = 13 \equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 8)$のとき、
$\varphi_5(13) = 495 \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 12)\ g^u = 2^3 = 8$

a	g^i	$a^{\varphi_5(p)}\ \mathrm{mod}\ 13$
1	2^{12}	1
2	2^1	8
3	2^4	1
4	2^2	-1
5	2^9	8
6	2^5	8
7	2^{11}	-8
8	2^3	-8
9	2^8	1
10	2^{10}	-1
11	2^7	-8
12	2^6	-1

12.研究課題3に対する取り組み
— ツイスト数を３トーシェント関数へ拡張 —

3トーシェント関数について考える。
2トーシェント関数のツイスト数はフェルマー素数$F_n = 2^{2^n} + 1$に関するものであった。
そこで、$a = 3^n + 2$の素数に関するものについて調べた結果、以下の予想を立てた。

予想1
nを自然数とし、$a = 3^n + 2$とおく。このとき、aが素数であるための必要十分条件は、

$$a = \frac{3}{\varphi_3\left(\frac{a-1}{2}\right)}\varphi_3^2(a) + 2$$

が成り立つことである。

13.暗号への応用

RSA暗号

a:送りたいワード
$n = pq$:巨大な数(公開鍵)
r:$(p-1)(q-1)$と互いに素な数(公開鍵)
p, q:nを素因数分解して出る素数(秘密鍵)
s:$rs \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ (p-1)(q-1))$となる数(秘密鍵)
$a^r\ \mathrm{mod}\ pq$:暗号

フェルマーの小定理より、
$rs \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ (p-1)(q-1))$より、
$rs = (p-1)(q-1)t + 1$と書ける
フェルマーの小定理より、
$(a^r)^s \equiv a^{(p-1)(q-1)t+1} \equiv a\ (\mathrm{mod}\ pq)$なので、$a$が復元できる

例
$a = 62$とする

公開鍵:$n = 133 = 7 \times 19$
公開鍵:$r = 5$
暗号化:$62^5 \equiv 104\ (\mathrm{mod}\ 133)$

$(p-1)(q-1) = 108$である

解読鍵:$s = 65$

ここで、
$x = 108^{65} \equiv 62\ (\mathrm{mod}\ 133)$となり、$a$が復元できる

RSA暗号は、巨大な数nの素因数分解の困難さと、フェルマーの小定理、オイラー関数を利用している。
これを、qオイラー関数で応用できないだろうか

13.暗号への応用例(φ_5バージョン)

a:送りたいワード
$n = pq$:巨大な数(公開鍵)
r:$\varphi_5(p)\varphi_5(q)$と互いに素な数(公開鍵)
p, q: nを素因数分解して出る素数(秘密鍵)
ここでは、$(p, q) \equiv 3 \pmod 8$とする
s:は$rs \equiv 1 \pmod{\varphi_5(p)\varphi_5(q)}$となる数(秘密鍵)
$a^r \bmod pq$:暗号

$rs \equiv 1 \pmod{\varphi_5(p)\varphi_5(q)}$より、
$rs = \varphi_5(p)\varphi_5(q)t + 1$と書ける
定理4より、
$(a^r)^s \equiv a^{\varphi_5(p)\varphi_5(q)t+1} \equiv a \pmod{pq}$なので、$a$が復元できる

例
$a = 62$とする

$n = 209 = 11 \times 19$
$r = 11$
暗号化:$62^{11} \equiv 95 \pmod{209}$

$(\varphi_5(p)\varphi_5(q) = 642600$である
$rs \equiv 1 \pmod{642600}$ を解き、
解読鍵$s = 292091$　を得る
暗号:$62^{11} \equiv 95 \pmod{209}$

ここで、
$x = 95^{292091} \equiv 62 \pmod{209}$となり、$a$が復元できる

qトーシェント関数について一般化できれば、
トーシェント関数の基準にするqも暗号化できる

13.本研究の成果のまとめ

本研究は、去年行った完全数の一般化の研究を参考に、従来のオイラー関数を可能な限り拡張し、一般化することを目的に、研究をスタートさせた。

・主たる第一の成果は、『数学の研究をはじめようIX 』のダブルオイラー数を参考に、フェルマー素数F_nに一般化したトーシェントツイスト数に拡張したことにある。

・主たる第二の成果は、従来のオイラー関数を素数2に関するものであるととらえ、素数qに関するものであるqトーシェント関数に拡張したことにある。

・そして主たる第三の成果は、従来の関数にトーシェント関数に関する定理であるフェルマーの小定理を3トーシェント関数と5トーシェント関数に拡張し、さらに平方剰余と生成元に関係することまで証明したこと、またトーシェントツイスト数も3トーシェント関数に拡張した予想を立てたことにある。

今後もトーシェント関数の性質をqトーシェント関数について一般化すること、暗号への応用を目的に研究を継続していきたい。

参考文献

[1] 今井琥太郎, 久保日椰太, 素数 p に関する第 k 種完全数の研究,
https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/Imai_Kubo_2025.pdf
[2] 高木貞治, 初等整数論講義 第 2 版, 共立出版, 1993.
[3] 飯高茂, 数学の研究をはじめよう IX, 現代数学社, 2024
[4] 伊藤正史, 図解雑学 暗号理論, ナツメ社, 2003.

2026年8月28日(金)
第24回日本フィボナッチ協会研究集会
久保田和臣 (放送大学教養学部)

$\sqrt{5}$の求め方 (3)

Abstract 交代級数に対する収束の加速法を$\sqrt{5}$の計算に適用した。収束級数、発散級数それぞれの交代級数を求めた後、Henri Cohenらによる加速法を適用し、結果を確認した。加速に必要なn次多項式$P_n(x)$には、二項展開とヤコビ多項式を利用した。事前の予想とは異なり、二項展開で$t = 1$の場合(Euler変換と等価になる)を用いた場合が、発散級数を含めた総合的なパフォーマンスに優れていることが確認できた。

1　はじめに

収束の遅い交代級数に対し、収束の加速法を適用した。ベースになっているのは、Henri Cohenらの交代級数の加速法[1]である。本発表では、$\sqrt{5}$の交代級数への展開、加速法の概要、並びに具体的な計算例を示し、考察することにする。

2　今回の発表

収束の遅い交代級数に関し、次の型の補正項を用いて収束を加速する[1][2]。収束をかける前の交代級数を次のように表す。

$$\sqrt{5} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (\text{交代級数なので}(-1)^n\text{が隠れている。})$$

この級数の収束を加速するため、次の形の補正項を考える。特に、係数c_n, d_nが非負整数の場合を取り扱う。

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの}\\ \text{交代級数の}\\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{d_n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k a_{s+k}}_{\text{補正項}}$$

つまり、今回の主題は、交代級数の部分和の末尾の部分に係数をかけて、収束を加速することにある。また係数c_k, d_nの計算に関し、十進BASICのプログラムを掲載した。併せて利用されたい。

3　$\sqrt{5}$の交代級数

今回、$\sqrt{5}$の交代級数を得るために、次の二項級数展開を利用した。次式において、$p > 0, q > 0, u > 0, v > 0$とする[3][4]。

$$\begin{aligned}\sqrt[j]{r} &= \frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{j}} \\ &= \frac{p}{q}\left(1-\frac{(0j+1)u}{jv}\left(1-\frac{(1j+1)u}{2jv}\left(1-\frac{(2j+1)u}{3jv}\left(1-\cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

この式において$u/v<1$の場合収束級数であり、$u/v>1$の場合発散級数であることに注意する。$\sqrt{5}$を求めるためには、次式を満たすp,q,u,vを見つける必要がある。具体例については、後述の資料を参照されたい。

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

4　加速法の概要

今回の加速法は、H.Cohen, F.Rodriguez Villegas, D.Zagierにより報告された加速法[1]に基づいている。このセクションでのみ、交代級数を$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n a_n$と表す。重み関数$w(x)$に対し$a_k=\int_0^1 x^k w(k)dx$と表されるとき、

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k w(x)\right)dx=\int_0^1\frac{w(x)}{1+x}dx$$

となる。ここでn次多項式$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k(-x)^k$を考える。ただし$P_n(-1)\neq 0$とする。この時、

$$\begin{aligned}P_n(x) &= p_0-p_1x+p_2x^2+\cdots+(-1)^n p_n x^n \\ P_n(-1) &= p_0+p_1+p_2+\cdots+p_n\end{aligned}$$

となる。少々の計算により、

$$\begin{aligned}P_n(-1)-P_n(x) =& p_1(1+x)+p_2(1-x^2)+p_3(1+x^3)+p_4(1-x^4)+\cdots+p_n(1+(-1)^{n-1}x^n) \\ =&(1+x)\left[p_1+p_2(1-x)+p_3(1-x+x^2)+\cdots\right. \\ &\left.+p_n(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^n)\right] \\ \therefore \frac{P_n(-1)-P_n(x)}{1+x} =& (-x)^0\sum_{k=1}^{n}p_k+(-x)^1\sum_{k=2}^{n}p_k+(-x)^2\sum_{k=3}^{n}p_k+(-x)^3\sum_{k=4}^{n}p_k+\cdots+(-x)^{n-1}\sum_{k=n}^{n}p_k\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。ここで$c_k=\sum_{j=k+1}^{n}p_j$とおくと、

$$\frac{P_n(-1)-P_n(x)}{1+x}=c_0-c_1x+c_2x^2-c_3x^3+\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}x^{n-1}$$

となる。$d_n=P_n(-1)$と合わせて、補正項の係数とする。詳細は後述の資料を参照されたい。

5　多項式$P_n(x)$の要件と例

加速に適した多項式$P_n(x)$には、いくつか条件がある。

$P_n(-1) > 0$　— 特になるべく正の、絶対値が大きい値が好ましい。
$P_n(0) = 1$　— 係数d_nからc_0を求める際、1を引けばよいため、$P_n(x)$の定数項は1とする。

これらの観点から、[1][2]も参考にしつつ、$P_n(x) = (1-tx)^n$と$P_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/\binom{n+\alpha}{n}$を選定した。参考文献[1]ではChebyshev多項式が、2013年の「エレガントな解答をもとむ」ではChebyshev多項式とLegendre多項式が用いられたので、今回Jacobi多項式にして、収束の加速に適したα, βの値が求められないか試みた。(実はCohenらのAlgorithm 2A, 2B の$P_n(x)$のグラフがJacobi多項式のα, βを共に-1に近づけていった時のグラフと似ていたことをヒントにした。)

6　係数の計算

十進BASICによる係数計算のプログラムにおいて、結果を有理数で得たい場合、

```
1  OPTION ARITHMETIC RATIONAL
```

と宣言すればよく、

```
1  OPTION ARITHMETIC DECIMAL
```

と書けば、係数を浮動小数点数で得ることができる。有理数と浮動小数点数は、それぞれ次に示す特徴があるため、使い分けが好ましい。

有理数　— 誤差の蓄積が少ない。簡明に記述できる。
浮動小数点数　— 有理数の場合、nが大きくなると係数の桁数が多くなり、桁あふれを起こすことがあるが、浮動小数点数にすると0より大きく1より小さい小数になるので、都合がよい。

目的に応じて使い分けるとよいと考える。

7　計算結果

実際にいくつかの多項式$P_n(x)$に対応する係数c_k, d_nを求め、$\sqrt{5}$の交代級数(収束級数と発散級数)の収束の様子を計算した。事前の予想では、誤差の評価式からは必ずしも収束が速くないと考えられた、オイラー変換と等価になる場合が、総合的なパフォーマンスでは優れていることが確認できた。この理由の解明については、今後の課題である。

8　スライド資料

次ページ以降、発表に用いたスライドの資料を添付する。$\sqrt{5}$の交代級数の例・加速法の導出・補正

係数の例・補正係数計算のための十進BASIC等、必要に応じて参照されたい。

References

[1] H.Cohen, F.Rodriguez Villegas, D.Zagier, Convergence Acceleration of Alternating Series, Experimental Math., 9(1) (2000), 3–12

[2] X.Gourdon, P.Sebah, 2002, Convergence acceleration of series, http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/seriesacceleration.html

[3] Dang-Khoa Do, Spigot algorithm and root computing, Reliable Computing, vol.7 (2001), 247–273

[4] Dang-Khoa Do, Zuverlässige numerische Berechnungen mit dem Spigot-Ansatz, 学位論文, Technische Universität Dresden, Dresden, Datum der Verteidigung: 20.09.2005 https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:swb:14-1157654863971-67714

[5] G.Szegő, Orthogonal Polynomials, 4th. ed.,American Mathematical Society, 2003, ISBN 978-0-8218-1023-1

[6] J.C.Mason, D.C.Handscomb, Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall/CRC, 2003, ISBN 0-8493-0355-9

[7] Brian George Spencer Doman, The Classical Orthogonal Polynomials, World Scientific Publishing, 2016, ISBN 978-981-4704-03-8

2026年8月28日(金)

$\sqrt{5}$の求め方 (3)

日本フィボナッチ協会／第24回研究集会

放送大学教養学部4年
心理と教育コース
久保田 和臣

黄金比の数値計算

- 黄金比：$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$
- 黄金比の数値計算
  1. $\sqrt{5}$の計算
  2. 1を足す
  3. 2で割る

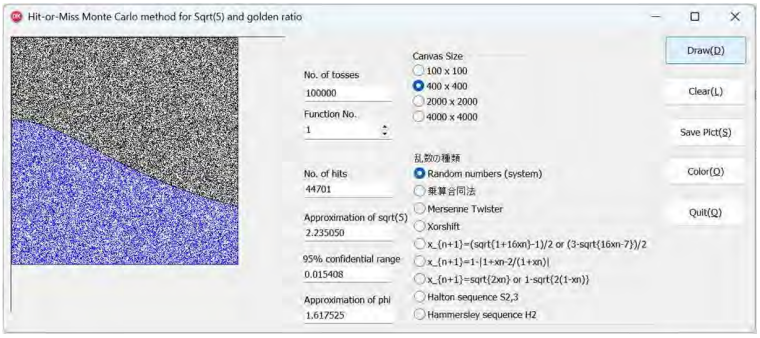
このステップが最も時間を要する

内部が2進数の計算機では高速

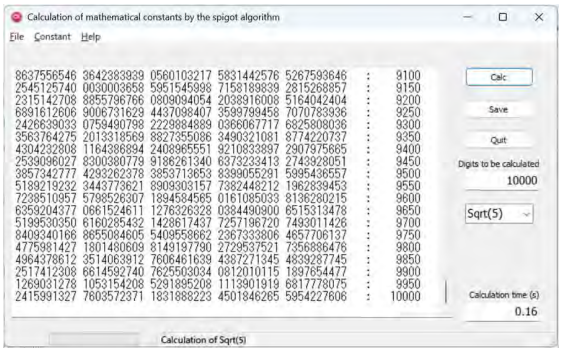
- 第1回 (第20回研究集会)
  - モンテカルロ法による$\sqrt{5}$の計算
- 第2回 (第21回研究集会)
  - Spigot Algorithmによる10000桁程度の計算
- 第3回 (第24回研究集会)
  - CRVZ法による収束の加速

これまで

- 第20回研究集会　　モンテカルロ法による$\sqrt{5}$の計算



- 第21回研究集会　　Spigot Algorithmによる多数桁計算



それぞれアプリを作成し、使いやすいように工夫した。

事の始まり　----　数学セミナー「エレガントな解答をもとむ」

- 2013年4月号出題1 (解答2013年7月号) 出題者：一松信 **問題をそのまま記載**

円周率πの「象徴的な」表現として、グレゴリ・ライプニッツの級数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \qquad (1)$$

がよく挙げられます。しかし(1)は収束が遅く、いい加減(？)な部分和をとるとπ=3.13といった「平価切り下げ」(？)された値しか出ません。
そこで、(1)に対する「加速法」を工夫し、少量の計算でもっとよい値を求めてください。最低限3.1416÷4=0.7854を目標に設定します。

注意
(1) オイラー変換など、既成の理論を応用しても構いませんが、読者諸賢各位の工夫を望みます。大学で標準的に学ぶ微分積分学を活用しても差し支えありません
(2) コンピュータによる計算も認めますが、手計算(四則演算だけの電卓利用)の範囲で可能な少量の計算で済む方法を期待します。
(3) 誤差の評価など厳密な理論よりも、アイディアに重点を置きます。講評の折には、単に正解者の名だけではなく、優秀作・佳作などのランク付けをするかもしれません。

私の回答

「補正項」に着目した。

$$\frac{\pi}{4} \approx \underbrace{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(-1)^n}{2n+1}}_{\text{交代級数の部分和}} + \underbrace{(-1)^s \cdot F_k(s)}_{\text{補正項}}$$

「補正項」の考えが平方根の計算にも使えないか？

今回の発表

- 今回無限級数として、交代級数を仮定。

$$\sqrt{5} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (\text{交代級数なので}(-1)^n\text{が隠れている。})$$

- 収束の遅い無限級数に対し、次の形の補正項を考える。特に係数c_k, d_nが非負整数の場合を取り扱う。

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの} \\ \text{交代級数の} \\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{d_n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k a_{s+k}}_{\text{補正項}}$$

- つまり、今回の主題は、交代級数の部分和の末尾の部分に係数をかけることによる収束の加速[1,2]。

二項展開に基づく平方根等の無限級数展開

- 平方根等の無限級数展開 (交代級数) を得るために、二項展開を利用する。以下 $p > 0, q > 0, u > 0, v > 0$ とする。次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sqrt[j]{r} &= \frac{p}{q}\left(1 + \frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{j}} \\ &= \frac{p}{q}\left(1 - \frac{(0j+1)u}{jv}\left(1 - \frac{(1j+1)u}{2jv}\left(1 - \frac{(2j+1)u}{3jv}\left(1 - \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

- $-\dfrac{(nj+1)u}{(n+1)jv} < 0$ より、上記無限級数は交代級数。

- $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{(nj+1)u}{(n+1)jv} = -\dfrac{u}{v}$ より、$\dfrac{u}{v} > 1$ で発散級数。$\dfrac{u}{v} < 1$ で収束級数。

- 漸化式を利用した次の計算が便利。

$$a_0 = \frac{p}{q} \qquad a_{n+1} = -\frac{(nj+1)u}{(n+1)jv}\, a_n \quad (n \geq 0) \qquad \sqrt[j]{r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$\sqrt{5}$となる例

- $\sqrt{5} = \frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$ となる p, q, u, v を見つける必要あり。
- 収束級数の例

表3　$\sqrt{5}$の表現(収束級数)

$\sqrt{5}$の表現	u/v	$\sqrt{5}$の表現	u/v
$\frac{117}{37}\left(1+\frac{6844}{6845}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.99985	$\frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.250000
$\frac{215}{68}\left(1+\frac{4621}{4624}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.99935	$\frac{9}{4}\left(1+\frac{1}{80}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.012500
$\frac{60}{19}\left(1+\frac{359}{361}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.99446	$\frac{85}{38}\left(1+\frac{1}{1444}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.000692
$\frac{25}{8}\left(1+\frac{61}{64}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.95313	$\frac{161}{72}\left(1+\frac{1}{25920}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.000038
$\frac{3}{1}\left(1+\frac{4}{5}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.80000	$\frac{1525}{682}\left(1+\frac{1}{465124}\right)^{\frac{-1}{2}}$	0.000002

$\sqrt{5}$となる例

- $\sqrt{5} = \frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$ となる p, q, u, v を見つける必要あり。
- 発散級数の例

表2　$\sqrt{5}$の表現(発散級数)

$\sqrt{5}$の表現	u/v	$\sqrt{5}$の表現	u/v
$\frac{10}{1}\left(1+\frac{19}{1}\right)^{\frac{-1}{2}}$	19.00000	$\frac{19}{6}\left(1+\frac{181}{180}\right)^{\frac{-1}{2}}$	1.00556
$\frac{5}{1}\left(1+\frac{4}{1}\right)^{\frac{-1}{2}}$	4.00000	$\frac{155}{49}\left(1+\frac{2404}{2401}\right)^{\frac{-1}{2}}$	1.00125
$\frac{15}{4}\left(1+\frac{29}{16}\right)^{\frac{-1}{2}}$	1.81250	$\frac{370}{117}\left(1+\frac{13691}{13689}\right)^{\frac{-1}{2}}$	1.00015
$\frac{10}{3}\left(1+\frac{11}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}$	1.22222	$\frac{721}{228}\left(1+\frac{259921}{259920}\right)^{\frac{-1}{2}}$	1.000003
$\frac{35}{11}\left(1+\frac{124}{121}\right)^{\frac{-1}{2}}$	1.02479		

収束加速法[1,2]（H.Cohen, F.Rodriguez Villegas, D.Zagier)

- しばらくは、交代級数を$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$と表す。

- $a_k = \int_0^1 x^k w(x)dx$ としたとき、

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k w(x)\right) dx = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$$

- ここで、n次多項式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(-x)^k$を考える。ただし$P_n(-1) \neq 0$とする。

$$P_n(x) = p_0 - p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + (-1)^n p_n x^n$$
$$P_n(-1) = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

- 従って、次式が成立する。

$$\therefore \frac{P_n(-1) - P_n(x)}{1+x} = (-x)^0 \sum_{k=1}^{n} p_k + (-x)^1 \sum_{k=2}^{n} p_k + (-x)^2 \sum_{k=3}^{n} p_k + (-x)^3 \sum_{k=4}^{n} p_k + \cdots + (-x)^{n-1} \sum_{k=n}^{n} p_k$$

収束加速法[1,2]　(H.Cohen, F.Rodriguez Villegas, D.Zagier)

- ここで、$c_k = \sum_{j=k+1}^{n} p_j$とおくと、次式が得られる。

$$\frac{P_n(-1) - P_n(x)}{1+x} = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} c_{n-1} x^{n-1}$$

- よって、次の補正項S_nが得られる。

$$S_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(x)}{1+x} w(x)dx$$
$$= \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{k=0}^{n-1} c_k (-1)^k a_k \quad \left(\because \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k w(x)\right) dx = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx\right)$$

- そこで、改めて$(-1)^k a_k$をa_kに、さらに$d_n = P_n(-1)$とおくと、求める補正項は、次のようになる。

$$S_n = \frac{1}{d_n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k a_k$$

- 最初のs項を加速せずに求め、次のn項を加速する場合は、右式の通り。

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの} \\ \text{交代級数の} \\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{d_n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k a_{k+s}}_{\text{補正項}}$$

多項式の例1

- 検討する多項式　$P_n(x) = (1-tx)^n = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} (-x)^k$
- 例　$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = 1 - tx$

$P_2(x) = 1 - 2tx + t^2x^2$

$P_3(x) = 1 - 3tx + 3t^2x^2 - t^3x^3$

$P_4(x) = 1 - 4tx + 6t^2x^2 - 4t^3x^3 + t^4x^4$

$P_5(x) = 1 - 5tx + 10t^2x^2 - 10t^3x^3 + 5t^4x^4 - t^5x^5$

- M_nとd_n　$0 < t \leq 2$の時$M_n = 1$で、$d_n = P_n(-1) = (1+t)^n$
- d_n　$d_n = t^0\binom{n}{0} + t^1\binom{n}{1} + t^2\binom{n}{2} + \cdots + t^{n-1}\binom{n}{n-1} + t^n\binom{n}{n}$

$= 1 \quad + t^1\binom{n}{1} + t^2\binom{n}{2} + \cdots + t^{n-1}\binom{n}{n-1} + t^n$

- 補正項S_nと係数c_k　$S_n = \frac{1}{(1+t)^n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k a_k, \quad c_k = \sum_{j=k+1}^{n} t^j \binom{n}{j}$
- 誤差の評価式　$|S - S_n| \leq \frac{|S|}{(1+t)^n}$

多項式の例1 (続き)

- 第k項と第k+1項の比　$x \cdot \underbrace{t^k\binom{n}{k}}_{\text{第}k\text{項}} = \underbrace{t^{k+1}\binom{n}{k+1}}_{\text{第}k+1\text{項}}$

$$\therefore x = \frac{t(n-k)}{k+1}$$

- n=5の場合

$$c_0 = d_5 - 1 = (1+t)^5 - 1 = 5t + 10t^2 + 10t^3 + 5t^4 + t^5$$

$$c_1 = c_0 - \frac{t \cdot 5}{1} = 10t^2 + 10t^3 + 5t^4 + t^5$$

$$c_2 = c_1 - \frac{t \cdot 5}{1} \cdot \frac{t \cdot 4}{2} = 10t^3 + 5t^4 + t^5$$

$$c_3 = c_2 - \frac{t \cdot 5}{1} \cdot \frac{t \cdot 4}{2} \cdot \frac{t \cdot 3}{3} = 5t^4 + t^5$$

$$c_4 = c_3 - \frac{t \cdot 5}{1} \cdot \frac{t \cdot 4}{2} \cdot \frac{t \cdot 3}{3} \cdot \frac{t \cdot 2}{4} = t^5$$

- 補正項付きの式　$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの} \\ \text{交代級数の} \\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{d_5}\left(c_0 a_{s+0} + c_1 a_{s+1} + c_2 a_{s+2} + c_3 a_{s+3} + c_4 a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$

多項式の例1 (続き)

- t = 1/2 の場合 $S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\text{もともとの交代級数の部分和}} + \underbrace{\frac{1}{243}\left(211a_{s+0} + 131a_{s+1} + 51a_{s+2} + 11a_{s+3} + a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$
- t = 1 の場合 $S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\text{もともとの交代級数の部分和}} + \underbrace{\frac{1}{32}\left(31a_{s+0} + 26a_{s+1} + 16a_{s+2} + 6a_{s+3} + a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$ 係数が小さい
- t = 2 の場合 $S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\text{もともとの交代級数の部分和}} + \underbrace{\frac{1}{243}\left(242a_{s+0} + 232a_{s+1} + 192a_{s+2} + 112a_{s+3} + 32a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$
- 誤差の評価式は、それぞれ次のようになり、t = 2 の場合が最小(のはず)

$$|S - S_n| \le \frac{|S|}{(3/2)^n} \qquad |S - S_n| \le \frac{|S|}{2^n} \qquad |S - S_n| \le \frac{|S|}{3^n}$$

多項式の例1 (補正項10項の場合を抜粋)

- 交代級数の例

$$\sqrt{5} = \frac{215}{68}\left(1 + \frac{4621}{4624}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{215}{68}\left(1 - \frac{4621}{2 \cdot 4624}\left(1 - \frac{3 \cdot 4621}{4 \cdot 4624}\left(1 - \frac{5 \cdot 4621}{6 \cdot 4624}\left(1 - \cdots\right)\right)\right)\right)$$

			$t = 1/2$	$t = 1$	$t = 2$
n	a_n	$S_n = \sum_{k=0}^{s-1} a_n$	$S_n + F_{10}$	$S_n + F_{10}$	$S_n + F_{10}$
0	3.161765	3.161765	2.2372737507	2.2360901028	2.2360713280
1	-1.579857	1.581908	2.2357041461	2.2360653646	2.2360648287
2	1.184124	2.766032	2.2362616732	2.2360684570	2.2360710514
3	-0.986130	1.779902	2.2359292807	2.2360678623	2.2360649679
4	0.862304	2.642206	2.2361826402	2.2360680109	2.2360709269
5	-0.775570	1.866636	2.2359663315	2.2360679663	2.2360650851
6	0.710478	2.577114	2.2361613876	2.2360679817	2.2360708160
7	-0.659301	1.917812	2.2359803909	2.2360679758	2.2360651903
8	0.617694	2.535506	2.2361511113	2.2360679782	2.2360707160
9	-0.582999	1.952507	2.2359884405	2.2360679772	2.2360652855
10	0.553490	2.505997	2.2361444945	2.2360679777	2.2360706252

多項式の例1 (補正項10項の場合を抜粋)

- 発散級数の例 $\sqrt{5} = \frac{10}{3}\left(1+\frac{11}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}$

$$= \frac{10}{3}\left(1-\frac{11}{2\cdot 9}\left(1-\frac{3\cdot 11}{4\cdot 9}\left(1-\frac{5\cdot 11}{6\cdot 9}\left(1-\cdots\right)\right)\right)\right)$$

			$t=1/2$	$t=1$	$t=2$
n	a_n	$S_n=\sum_{k=0}^{s-1} a_n$	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}
0	3.333333	3.333333	2.2377215035	2.2360887963	2.2362306366
1	-2.037037	1.296296	2.2350885802	2.2360655400	2.2358744356
2	1.867284	3.163580	2.2370202913	2.2360684210	2.2362987160
3	-1.901863	1.261717	2.2350129126	2.2360678717	2.2357925757
4	2.033937	3.295654	2.2372826785	2.2360680080	2.2363970270
5	-2.237331	1.058323	2.2346491193	2.2360679673	2.2356744573
6	2.506639	3.564962	2.2377369089	2.2360679813	2.2365390114
7	-2.844837	0.720126	2.2340967309	2.2360679758	2.2355037056
8	3.259709	3.979834	2.2384030164	2.2360679783	2.2367444506
9	-3.762750	0.217084	2.2332958899	2.2360679770	2.2352564268
10	4.368971	4.586055	2.2393648653	2.2360679779	2.2370422114

多項式の例1 (まとめ)

- 検討した多項式 $P_n(x) = (1-tx)^n = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} (-x)^k$
- t = 1/2, 1, 2 の3つの場合について、収束級数と発散級数で計算
- 誤差の評価式からは、t = 2 の場合がより速く収束することが予想されたが、いずれの場合もt = 1 の場合が最も速く収束した。この理由については、現在検討中。
- 実は、 t = 1 の場合は、よく知られたEuler法(Euler変換)と等価になることが知られている[2,7] 。
- 次のページに補正係数のプログラムを記載する。一旦係数が分かれば、他の数値の計算にも利用可能。

十進BASICのプログラム (多項式の例1)

- $P_n(x) = (1 - tx)^n \quad (0 < t \leq 2)$ の場合の係数計算

```
!
! H. Cohen, et.al., Coeffs for CRVZ method
! P(x) = (1 - tx)^n
!    t = 1/2 : (1 - x / 2)^n
!    t = 1 : Euler method
!    t = 2 : (1 - 2x)^n
!
OPTION ARITHMETIC RATIONAL

INPUT PROMPT " n = ":n
PRINT " P_n(x) = (1 - tx)^n"
INPUT PROMPT " 0 < t <= 2  t = ":t
PRINT
```

```
!
! -- Print out ----
!
LET d = (1 + t)^n
PRINT " d = ";d
LET c = d
LET b = 1
FOR k = 0 TO n-1
  LET c = c - b
  PRINT " c(";k;") / d = ";c / d
  LET b = b * t * (n - k) / (k + 1)
NEXT k

END
```


多項式の例2 (Jacobi多項式)

- Jacobi多項式を$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$とする。$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$であることに注意して、次式を検討する。

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)}{\binom{n+\alpha}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{(1-2x)-1}{2}\right)^k \left(\frac{(1-2x)+1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (-x)^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= {}_2F_1(-n; n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} (-x)^k \qquad \left(\because (-n)_k = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}\right)
\end{aligned}
$$

- また、d_nに関連して、

$$
P_n(-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} \qquad e_k = \binom{n}{k} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} \text{とおくとき、} d_n = \sum_{k=0}^{n} e_k
$$

多項式の例2 (Jacobi多項式)

- ついで $c_k = \sum_{j=k+1}^{n} e_k$を求める。そのために、まず e_kとe_{k+1}の比xを求める。

$$x \cdot \underbrace{\binom{n}{k}\frac{(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k}}_{e_k} = \underbrace{\binom{n}{k+1}\frac{(n+\alpha+\beta+1)_{k+1}}{(\alpha+1)_{k+1}}}_{e_{k+1}}$$

$$\therefore x = \frac{n-k}{k+1}\frac{\alpha+\beta+n+k+1}{\alpha+k+1}$$

- 従って、$e_0 = 1$より$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$を次々と求めることができる。

- (α, β)=(0, 0) の時、Legendre多項式と等価。
- (α, β)=(-1/2, -1/2) の時、第1種Chebyshev多項式と等価。
- (α, β)=(1/2, -1/2) の時、第4種Chebyshev多項式と等価。
- その他、 (α, β)=(-3/4, -3/4) についても計算した。

多項式の例2 (続き)

- (α, β)=(0, 0) の時

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの}\\ \text{交代級数の}\\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{1683}\left(1682a_{s+0} + 1652a_{s+1} + 1442a_{s+2} + 882a_{s+3} + 252a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$$

- (α, β)=(-1/2, -1/2) の時

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの}\\ \text{交代級数の}\\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{3363}\left(3362a_{s+0} + 3312a_{s+1} + 2912a_{s+2} + 1792a_{s+3} + 512a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$$

- (α, β)=(1/2, -1/2) の時

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの}\\ \text{交代級数の}\\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{8119}\left(8108a_{s+0} + 7888a_{s+1} + 6656a_{s+2} + 3840a_{s+3} + 1024a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$$

- (α, β)=(-3/4, -3/4) の時

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの}\\ \text{交代級数の}\\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{6867}\left(6866a_{s+0} + 6776a_{s+1} + 5984a_{s+2} + 3696a_{s+3} + 1056a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$$

多項式の例2 (補正項10項の場合を抜粋)

- 交代級数の例

$$\sqrt{5} = \frac{215}{68}\left(1+\frac{4621}{4624}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{215}{68}\left(1-\frac{4621}{2\cdot 4624}\left(1-\frac{3\cdot 4621}{4\cdot 4624}\left(1-\frac{5\cdot 4621}{6\cdot 4624}\left(1-\cdots\right)\right)\right)\right)$$

			$(0,0)$	$(-1/2,-1/2)$	$(1/2,-1/2)$	$(-3/4,-3/4)$
n	a_n	$S_n=\sum_{k=0}^{s-1}a_n$	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}
0	3.161765	3.161765	2.2360679826	2.2360679771	2.2360673987	2.2360679760
1	-1.579857	1.581908	2.2360679724	2.2360679779	2.2360684114	2.2360679790
2	1.184124	2.766032	2.2360679826	2.2360679771	2.2360676161	2.2360679760
3	-0.986130	1.779902	2.2360679724	2.2360679779	2.2360682935	2.2360679790
4	0.862304	2.642206	2.2360679826	2.2360679771	2.2360676933	2.2360679760
5	-0.775570	1.866636	2.2360679723	2.2360679779	2.2360682379	2.2360679790
6	0.710478	2.577114	2.2360679827	2.2360679771	2.2360677358	2.2360679760
7	-0.659301	1.917812	2.2360679723	2.2360679779	2.2360682039	2.2360679791
8	0.617694	2.535506	2.2360679827	2.2360679771	2.2360677638	2.2360679759
9	-0.582999	1.952507	2.2360679723	2.2360679779	2.2360681804	2.2360679791
10	0.553490	2.505997	2.2360679827	2.2360679771	2.2360677839	2.2360679759

多項式の例2 (補正項10項の場合を抜粋)

- 発散級数の例

$$\sqrt{5} = \frac{10}{3}\left(1+\frac{11}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{10}{3}\left(1-\frac{11}{2\cdot 9}\left(1-\frac{3\cdot 11}{4\cdot 9}\left(1-\frac{5\cdot 11}{6\cdot 9}\left(1-\cdots\right)\right)\right)\right)$$

			$(0,0)$	$(-1/2,-1/2)$	$(1/2,-1/2)$	$(-3/4,-3/4)$
n	a_n	$S_n=\sum_{k=0}^{s-1}a_n$	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}	S_n+F_{10}
0	3.333333	3.333333	2.2361122822	2.2361085121	2.2360908657	2.2361065848
1	-2.037037	1.296296	2.2360147916	2.2360192965	2.2360402651	2.2360216006
2	1.867284	3.163580	2.2361318596	2.2361264722	2.2361014156	2.2361237155
3	-1.901863	1.261717	2.2359912088	2.2359976564	2.2360276707	2.2360009570
4	2.033937	3.295654	2.2361602776	2.2361525556	2.2361165507	2.2361486010
5	-2.237331	1.058323	2.2359569523	2.2359662069	2.2360094422	2.2359709482
6	2.506639	3.564962	2.2362015857	2.2361904871	2.2361385280	2.2361847992
7	-2.844837	0.720126	2.2359071251	2.2359204432	2.2359829281	2.2359272708
8	3.259709	3.979834	2.2362617071	2.2362457165	2.2361705300	2.2362375163
9	-3.762750	0.217084	2.2358345616	2.2358537714	2.2359442880	2.2358636253
10	4.368971	4.586055	2.2363493123	2.2363262231	2.2362171997	2.2363143762

十進BASICのプログラム (多項式の例2)

- $P_n(x) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)}{\binom{n+\alpha}{n}}$ の場合の係数計算

```
!
! H. Cohen, et.al., CRVZ method
!  Coefficients for Jacobi polynomials
!
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
OPTION BASE 0
!
PRINT " ==== input parameters ===="
INPUT PROMPT " n = ":n
INPUT PROMPT " Jacobi alpha = ":alpha
INPUT PROMPT " Jacobi beta  = ":beta

!
! -- d and c(n) ----
!
DIM c(n-1)
LET work = 1
LET d = work
```

```
FOR k = 0 TO n-1
  LET work = work * (n - k) / (k + 1) * (alpha + beta
+ n + k + 1) / (alpha + k + 1)
  LET d = d + work
  FOR j = 0 TO k
    LET c(j) = c(j) + work
  NEXT j
NEXT k

!
! -- Print out ----
!
PRINT
PRINT " ==== CRVZ coeffs ===="
PRINT "d = ";d
FOR k = 0 TO n-1
  PRINT " c(";k;") / d = ";c(k) / d
NEXT k

END
```


多項式の例2 (まとめ)

- 検討した多項式 $P_n(x) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)}{\binom{n+\alpha}{n}}$

- (α,β) = (0,0), (-1/2,-1/2), (1/2,-1/2), (-3/4,-3/4) の4つの場合について、収束級数と発散級数で計算

- 収束する交代級数では、(α,β) = (-1/2,-1/2) の場合が収束が若干速いことが確認できたが、最適かどうかまでは、現在不明。

- 発散級数では収束は遅く、先に見たEuler変換に相当する場合に及ばなかった。

- 前のページに補正係数のプログラムを記載した。一旦係数が分かれば、他の数値の計算にも利用可能。

多項式の例3 (参考文献[1])

- 大別して、Algorithm 1 と Algorithm 2A, 2B に分かれる。
- Algorithm 1 は、第1種Chebyshev多項式の場合で、Jacobi多項式の (α,β)=(-1/2,-1/2) の場合に相当する。同じ補正係数が得られる。
- 今回は話の流れ上、参考文献[1]の方法でAlgorithm 1 の概略を説明したのち、Algorithm 2A, 2B について言及する。

- Algorithm 1 で扱う多項式$P_n(x)$は、第1種Chebyshev多項式を$T_n(x)$として、

$$P_n(x) = T_n(1-2x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n+k}\binom{n+k}{2k} 4^k (-x)^k$$

- いくつか書き下す。

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= 1 - 2x \\
P_2(x) &= 1 - 8x + 8x^2 \\
P_3(x) &= 1 - 18x + 48x^2 - 32x^3 \\
P_4(x) &= 1 - 32x + 160x^2 - 256x^3 + 128x^4 \\
P_5(x) &= 1 - 50x + 400x^2 - 1120x^3 + 1280x^4 - 512x^5
\end{aligned}$$

多項式の例3 (続き)

- $P_n(-1)=d_n$ について、
  - 漸化式　$d_0 = 1,\ d_1 = 3,\ d_{n+1} = 6d_n - d_{n-1}$
  - 母関数　$\dfrac{1-3x}{1-6x+x^2}\left(= \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right)$
  - ド モアブルービネ型の式　$d_n = \dfrac{(3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n}{2}$

分母が5.828^n なので、収束が最も速いと予想される。

- 補正項と係数、誤差評価式

$$S_n = \frac{1}{d_n}\sum_{k=0}^{n-1} c_k a_k, \quad c_k = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{n}{n+j}\binom{n+j}{2j} 4^j \quad |S - S_n| \le \frac{|S|}{d_n} \approx \frac{|S|}{(3+\sqrt{8})^n} \approx \frac{|S|}{5.828^n}$$

- d_n と第k項と第k+1項の比

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{n}{n+0}\binom{n+0}{2\cdot 0}4^0 + \frac{n}{n+1}\binom{n+1}{2\cdot 1}4^1 + \frac{n}{n+2}\binom{n+2}{2\cdot 2}4^2 + \cdots + \frac{n}{n+n}\binom{n+n}{2\cdot n}4^n \\
&= 1 + \frac{n}{n+1}\binom{n+1}{2\cdot 1}4^1 + \frac{n}{n+2}\binom{n+2}{2\cdot 2}4^2 + \cdots + \frac{n}{n+n}\binom{n+n}{2\cdot n}4^n
\end{aligned}$$

$$x \cdot \underbrace{\frac{n}{n+k}\binom{n+k}{2k}4^k}_{\text{第}k\text{項}} = \underbrace{\frac{n}{n+k+1}\binom{n+k+1}{2k+2}4^{k+1}}_{\text{第}k+1\text{項}}$$

$$\therefore x = \frac{2(n+k)(n-k)}{(k+1)(2k+1)}$$

よって、$c_0=d_n-1$ から次々と c_k を求められる。

多項式の例3 (続き)

- Algorithm 2A, 2B では、次の補助多項式を利用する。(T_n : Chebyshev多項式)

$$P_n^{(m)}(x) = \sum_{0 \le r \le m} (-1)^r \binom{m}{r} (n-2r)^{m+1} T_{n-2r}(1-2x)$$

- 次いで、多項式$P_n(x)$ を $P_n(x) = \dfrac{P_n^{(m)}}{(n-m)(m+1)!2^m}$ で定める。
  - Algorithm 2Aの場合、$m = n-1$
  - Algorithm 2Bの場合、$m = \lfloor n/2 \rfloor$
- n = 5 の場合の補正項付きの式は、次のようになる。
  - Algorithm 2Aの場合、

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの} \\ \text{交代級数の} \\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{1}{5411}\left(5410a_{s+0} + 5340a_{s+1} + \frac{14158}{3}a_{s+2} + \frac{8750}{3}a_{s+3} + \frac{2500}{3}a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} a_k + \frac{1}{16233}\left(16230a_{s+0} + 16020a_{s+1} + 14158a_{s+2} + 8750a_{s+3} + 2500a_{s+4}\right)$$

  - Algorithm 2Bの場合、

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの} \\ \text{交代級数の} \\ \text{部分和}}} + \underbrace{\frac{3}{17293}\left(\frac{17290}{3}a_{s+0} + 5690a_{s+1} + \frac{45284}{9}a_{s+2} + \frac{28000}{9}a_{s+3} + \frac{8000}{9}a_{s+4}\right)}_{\text{補正項}}$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} a_k + \frac{1}{51879}\left(51870a_{s+0} + 51210a_{s+1} + 45284a_{s+2} + 28000a_{s+3} + 8000a_{s+4}\right)$$

多項式の例3 (補正項10項の場合を抜粋)

- 交代級数の例

$$\sqrt{5} = \frac{215}{68}\left(1 + \frac{4621}{4624}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{215}{68}\left(1 - \frac{4621}{2 \cdot 4624}\left(1 - \frac{3 \cdot 4621}{4 \cdot 4624}\left(1 - \frac{5 \cdot 4621}{6 \cdot 4624}\left(1 - \cdots\right)\right)\right)\right)$$

			Algorithm 1	Algorithm 2A	Algorithm 2B
n	a_n	$S_n = \sum_{k=0}^{s-1} a_n$	$S_n + F_{10}$	$S_n + F_{10}$	$S_n + F_{10}$
0	3.161765	3.161765	2.2360679771	2.2360679774	2.2360679774
1	-1.579857	1.581908	2.2360679779	2.2360679776	2.2360679776
2	1.184124	2.766032	2.2360679771	2.2360679774	2.2360679774
3	-0.986130	1.779902	2.2360679779	2.2360679776	2.2360679776
4	0.862304	2.642206	2.2360679771	2.2360679774	2.2360679774
5	-0.775570	1.866636	2.2360679779	2.2360679776	2.2360679776
6	0.710478	2.577114	2.2360679771	2.2360679774	2.2360679774
7	-0.659301	1.917812	2.2360679779	2.2360679776	2.2360679776
8	0.617694	2.535506	2.2360679771	2.2360679774	2.2360679774
9	-0.582999	1.952507	2.2360679779	2.2360679776	2.2360679776
10	0.553490	2.505997	2.2360679771	2.2360679774	2.2360679775

多項式の例3 (補正項10項の場合を抜粋)

- 発散級数の例 $\sqrt{5} = \frac{10}{3}\left(1+\frac{11}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}$

$$= \frac{10}{3}\left(1-\frac{11}{2\cdot 9}\left(1-\frac{3\cdot 11}{4\cdot 9}\left(1-\frac{5\cdot 11}{6\cdot 9}\left(1-\cdots\right)\right)\right)\right)$$

			Algorithm 1	Algorithm 2A	Algorithm 2B
n	a_n	$S_n = \sum_{k=0}^{s-1} a_n$	$S_n + F_{10}$	$S_n + F_{10}$	$S_n + F_{10}$
0	3.333333	3.333333	2.2361085121	2.2361021772	2.2361008972
1	-2.037037	1.296296	2.2360192965	2.2360268761	2.2360284084
2	1.867284	3.163580	2.2361264722	2.2361173969	2.2361155612
3	-1.901863	1.261717	2.2359976564	2.2360085299	2.2360107305
4	2.033937	3.295654	2.2361525556	2.2361395191	2.2361368795
5	-2.237331	1.058323	2.2359662069	2.2359818461	2.2359850142
6	2.506639	3.564962	2.2361904871	2.2361717147	2.2361679104
7	-2.844837	0.720126	2.2359204432	2.2359429889	2.2359475596
8	3.259709	3.979834	2.2362457165	2.2362186251	2.2362131307
9	-3.762750	0.217084	2.2358537714	2.2358863413	2.2358929489
10	4.368971	4.586055	2.2363262231	2.2362870486	2.2362790985

多項式の例3 (まとめ)

- 数値計算結果からは、収束級数に関しては、いずれのアルゴリズムも特に優れている。
- 一方、発散級数の結果では、Euler変換に及ばないことが確認できた。
- 補正の係数の計算手順が若干複雑で(次ページのプログラム参照)、係数自体も大きく、nを大きくとりすぎると、オーバーフローする可能性が捨てきれない。
- 次のページに補正係数のプログラムを記載する。一旦係数が分かれば、他の数値の計算にも利用可能。

十進BASICのプログラム (多項式の例3)

- 参考文献[1] のAlgorithm 2A, 2B の場合の係数計算

```
!
! Calculation of the coeffs in CRVZ Algorithm 2Q
!   n <= 50
!
OPTION ARITHMETIC RATIONAL

INPUT PROMPT " n = ":n
PRINT "Q_n の種類を選択 (1:A_n, 2:B_n)"
INPUT q_choice

DIM Fact(0 TO 50)
DIM P(0 TO 50, 0 TO 50) ! P(idx, dg)
DIM p_m(0 TO 50)
DIM b(0 TO 50)
DIM c(0 TO 50)

! 0. 階乗の計算
LET Fact(0) = 1
FOR k = 1 TO 50
  LET Fact(k) = Fact(k - 1) * k
NEXT k

! 1. P_k(X) の係数を漸化式で計算
LET P(0, 0) = 1
IF n >= 1 THEN
  LET P(1, 0) = 1
  LET P(1, 1) = -2
END IF

FOR k = 2 TO n
  FOR dg = 0 TO k
    LET term1 = 0
    LET term2 = 0
    LET term3 = 0

    IF dg <= k - 1 THEN
      LET term1 = 2 * P(k - 1, dg)
    END IF
    IF dg >= 1 AND dg - 1 <= k - 1 THEN
      LET term2 = -4 * P(k - 1, dg - 1)
    END IF
    IF dg <= k - 2 THEN
      LET term3 = -P(k - 2, dg)
    END IF
    LET P(k, dg) = term1 + term2 + term3
  NEXT dg
NEXT k

! 2. m の決定
IF q_choice = 1 THEN  ! Q_n = A_n
  LET m = n - 1
ELSE                  ! Q_n = B_n
  LET m = INT(n / 2)
END IF
LET denom = (n - m) * Fact(m + 1) * (2 ^ m)

! 3. P_n{(m)} の重み付き和
FOR k = 0 TO n
  LET p_m(k) = 0
NEXT k
LET binom = 1

FOR r = 0 TO m
  LET dg = ABS(n - 2 * r)
  LET weight = ((-1) ^ r) * binom * ((n - 2 * r) ^ (m + 1))

  FOR k = 0 TO dg
    LET p_m(k) = p_m(k) + weight * P(dg, k)
  NEXT k

  IF r < m THEN
    LET binom = binom * (m - r) / (r + 1)
  END IF
NEXT r

PRINT "--------"
FOR k = 0 TO n
  LET b(k) = p_m(k) / denom
  PRINT " b(";k;") = ";b(k)
NEXT k
PRINT "--------"

! 4. d, c_k の計算
LET d = 0
FOR k = 0 TO n
  LET d = d + ((-1) ^ k) * b(k)
NEXT k
PRINT " d = ";d
PRINT "--------"

FOR k = 0 TO n - 1
  LET c(k) = d
  FOR j = 0 TO k
    LET c(k) = c(k) - (-1) ^ j * b(j)
  NEXT j
  PRINT " c(";k;") = ";c(k)
NEXT k
PRINT "--------"

FOR k = 0 TO n - 1
  PRINT " c(";k;") / d = ";c(k) / d
NEXT k
PRINT "--------"

END
```

「Gemini」に手伝ってもらい、プログラムの大枠を書いた。ついでマニュアルでデバッグして完成させた。

全体のまとめ (1)

- 交代級数の収束の加速に有効なCRVZ法を、$\sqrt{5}$ に適用した。
- 今回の計算の範囲内では、総合的なパフォーマンスを考慮すると、結局古典的なオイラー変換がより優れている。
  - 特に補正の係数c_k, d_nが、nを大きくとっても巨大にならない。
  - 発散級数の場合でも、数値が安定している。
- 全体的に言えること。計算例が少ないため、拙速に結論を下すと間違える恐れがある。
- 多項式 $P_n(x)$ についての必要条件。
  - $P_n(-1) \neq 0$ について、nの増大とともに、なるべく正の大きな値。
  - $P_n(0) = 1$. 定数項が1であれば、$c_0 = d_n - 1$
  - $|M_n|$が区間$[0,1]$でなるべく小さくなるように。$M_n = \sup_{x \in [0,1]} |P_n(x)|$
- 他に、
  - 今回、Chebyshev多項式やJacobi多項式等の、直交多項式を利用した。

全体のまとめ (2)

- 今後は、$\sqrt{5}$ だけではなく、他の平方根・立方根やその他の定数の(収束の遅い)交代級数を計算し、より広い視点で考察する。例えば、

$$e = 3 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{11}\left(1 - \frac{9}{53}\left(1 - \frac{44}{309}\left(1 - \cdots\right)\right)\right)\right)$$

分母：OEIS A000255　　分子：OEIS A000166

$$\begin{aligned}\log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{5}\left(1 - \cdots\right)\right)\right)\right) \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(1 - \frac{7}{9}\left(1 - \cdots\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

収束の加速法は種々知られているが、減速法は驚くほど見つからない。

参考文献

1. H.Cohen, F.Rodriguez Villegas, D.Zagier, Convergence Acceleration of Alternating Series, Experimental Math., 9(1) (2000), 3—12
2. X.Gourdon, P.Sebah, 2002, Convergence acceleration of series

http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/seriesacceleration.html

3. G.Szegő, Orthogonal Polynomials, 4th. ed.,American Mathematical Society, 2003, ISBN 978-0-8218-1023-1
4. J.C.Mason, D.C.Handscomb, Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall/CRC, 2003, ISBN 0-8493-0355-9
5. Brian George Spencer Doman, The Classical Orthogonal Polynomials, World Scientific Publishing, 2016, ISBN 978-981-4704-03-8
6. A.Sidi, Practical Extrapolation Methods ---Theory and Applications---, Cambridge University Press, 2003, ISBN 0-521-66159-5
7. 江沢洋、漸近解析入門、岩波オンデマンドブックス、2018、ISBN 978-4-00-730772-0

最後に

ご清聴ありがとうございました。

Appendix：CRVZ法の導出 (1)

- この節では、交代級数の各項を $(-1)^n a_n$ とする。無限和Sは、次の通りとなる。$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ 紛らわしいが、容赦願いたい。
- 正の関数 $w(x)$ で、$a_k = \int_0^1 x^k w(x) dx$ となるものが存在するとする。
- 従って、次式が得られる。

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k w(x) \right) dx = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x} dx$$

- ここでn次多項式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k (-x)^k$ を考える。ただし、$P_n(-1) \neq 0$
- また、$P_n(-1) = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n$
- 次式が成立する。

Appendix： CRVZ法の導出 (2)

$$
\begin{aligned}
P_n(-1) - P_n(x) =& p_1(1+x) + p_2(1-x^2) + p_3(1+x^3) + p_4(1-x^4) + \cdots + p_n(1+(-1)^{n-1}x^n) \\
=& (1+x)\left[p_1 + p_2(1-x) + p_3(1-x+x^2) + \cdots \right. \\
& \left. + p_n(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^n)\right] \\
\therefore \frac{P_n(-1)-P_n(x)}{1+x} =& (-x)^0\sum_{k=1}^{n} p_k + (-x)^1\sum_{k=2}^{n} p_k + (-x)^2\sum_{k=3}^{n} p_k + (-x)^3\sum_{k=4}^{n} p_k + \cdots + (-x)^{n-1}\sum_{k=n}^{n} p_k
\end{aligned}
$$

- ここで、$c_k = \sum_{j=k+1}^{n} p_j$とおくと、次式が得られる。

  $$\frac{P_n(-1)-P_n(x)}{1+x} = c_0 - c_1x + c_2x^2 - c_3x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}x^{n-1}$$

- そこで、 $S_n = \dfrac{1}{P_n(-1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(-1)-P_n(x)}{1+x}w(x)dx$ とおくと、

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k w(x)\right)dx = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$ より、

- $S_n = \dfrac{1}{P_n(-1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k(-1)^k a_k$ となる。

Appendix： CRVZ法の導出 (3)

- ここでの議論は交代級数に限られているため、$(-1)^k a_k$ を改めて a_kに、さらに$P_n(-1)$をd_nと置き、

- $S_n = \dfrac{1}{d_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k a_k$を補正項とする。従って、 $S'_n = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} a_k}_{\substack{\text{もともとの} \\ \text{交代級数の} \\ \text{部分和}}} + \underbrace{\dfrac{1}{d_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k a_{k+s}}_{\text{補正項}}$

  が最終的な式となる。

- またS_nは、$S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{P_n(x)w(x)}{P_n(-1)(1+x)}dx = S - \int_0^1 \frac{P_n(x)w(x)}{P_n(-1)(1+x)}dx$ を満たすので、

  $$|S - S_n| = \frac{1}{|P_n(-1)|}\int_0^1 \frac{|P_n(x)|\,w(x)}{1+x}dx \le \frac{M_n}{|P_n(-1)|}|S|, \quad M_n = \sup_{x\in[0,1]}|p_n(x)|$$

  となる。収束を効率よく加速するためには、$M_n/|P_n(-1)|$の小さくなる多項式の選定が重要。

Appendix：平方根の交代級数と正項級数の相互変換

- 最初に見た交代級数への二項展開において、変数uの符号を変えると正項級数展開が得られる。

$$\sqrt{r} = \frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{2v}\left(1-\frac{3u}{4v}\left(1-\frac{5u}{6v}\left(1-\cdots-\frac{(2n+1)u}{2(n+1)v}\left(1-\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\sqrt{r'} = \frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{2v}\left(1+\frac{3u}{4v}\left(1+\frac{5u}{6v}\left(1+\cdots+\frac{(2n+1)u}{2(n+1)v}\left(1+\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$

- 交代級数を正項級数に変換するため、またはその逆には次式を用いるとよい。

$$\frac{p}{q}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{vp}{(u+v)q}\left(1-\frac{u}{v+u}\right)^{\frac{-1}{2}}$$
$$\frac{p}{q}\left(1-\frac{u}{v}\right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{vp}{(v-u)q}\left(1+\frac{u}{v-u}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

Fibonacci Quarterly への投稿のすすめ
日本フィボナッチ協会第 24 回研究集会における紹介と参考資料

中川 幸一

2026 年 8 月 28 日

概要

本稿は，日本フィボナッチ協会第 24 回研究集会で行った短い紹介発表「Fibonacci Quarterly への投稿のすすめ」の内容をまとめたものである．発表では，Fibonacci Association と *The Fibonacci Quarterly* の関係，通常の研究論文だけではない投稿の入口，Problems sections への解答・問題案投稿，および Mathematical Outreach などについて紹介した．あわせて，許可を得たうえで High School Problems and Solutions の問題文の日本語訳を参考配付し，FQ には研究論文以外にも幅広い関わり方があることを示した．なお，High School Problems and Solutions の問題文は本稿には再録しない．一方，研究集会で自由に議論するために作成した「Problem Session」資料は，参加者から掲載希望があったため，付録として収録する．

1 発表の目的

The Fibonacci Quarterly（以下 FQ）は，Fibonacci Association が刊行する国際的な査読付きジャーナルであり，フィボナッチ数とその周辺の数学を中心に扱っている．日本フィボナッチ協会の研究集会では，FQ そのものの存在は広く知られている一方で，実際にどのような形で関わることができるか，特に研究論文以外の入口については十分に共有されていない可能性がある．

そこで本発表では，FQ への関わり方を次のように整理して紹介した．

- 通常の研究論文を投稿する．
- Mathematical Outreach として，解説，新しい証明，分野をつなぐ話題を投稿する．
- Problems sections に解答を送る．
- Problems sections に問題案を送る．
- Fibonacci Association や国際会議を通して国際的な交流に参加する．

特に重視したのは，「論文を書く」ことだけが FQ との関わり方ではないという点である．問題を解く，問題を作る，計算実験を行う，解説を書く，という活動も，FQ につながる可能性をもっている．

2 Fibonacci Association と FQ

Fibonacci Association は，フィボナッチ数とその周辺の数学に関心をもつ研究者，学生，教員，数学愛好者が関わる国際的な数学コミュニティである．主な活動として，FQ の刊行と

International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications の開催がある．この関係は，次のように整理できる．

Fibonacci Association

⇓

The Fibonacci Quarterly（ジャーナル）　　International Conference（国際会議）

⇓

研究論文・アウトリーチ記事・問題欄・会議論文集

FQ は単に専門的な研究論文を掲載する場であるだけでなく，問題欄やアウトリーチ記事を通じて，より広い層が参加できる場としても位置づけられている．また，協会会員になることで FQ へのオンラインアクセスや国際会議に関する情報を得ることができる．会長からは，次回の国際会議が 2028 年にアトランタ周辺で予定されているとの案内もあった．

3　研究論文だけではない入口

Taylor & Francis Online の著者向け情報では，FQ の投稿区分として Research, Mathematical Outreach, Mathematical Biology, Conference Proceedings, Editorial などが示されている．また，Aims and scope では，整数列，科学への応用，数学アウトリーチ，問題欄なども含め，研究者だけでなく学生・教員・数学愛好者にも開かれた場であることが説明されている．

発表では，特に次のように紹介した．

Research papers 通常の研究論文.

Mathematical Outreach
解説，新しい証明，分野をつなぐ話題など．優れた解説であるだけでなく，基本的な考え方を示し，例や参考文献を通して読者を研究へ誘うことが期待される.

Mathematical Biology
生物・生命科学への応用に関わる話題.

Problems sections
問題提案および解答投稿.

このうち Mathematical Outreach は，日本の研究集会参加者にとっても特に関わりやすい可能性がある．すなわち，完全に新しい研究結果だけでなく，既存の結果の新しい証明，分かりやすい導入，異なる分野を結ぶ解説なども，FQ の入口になり得る．

4　Problems sections という入口

FQ の Problems sections には，おおまかに次の三つの段階がある．

High School Problems
高校生・高専生・教員・数学愛好者にも勧めやすい入口.

Elementary Problems 初等的な手法で扱える問題欄．ここでの elementary は，小学校向けという

意味ではなく，初等的な数学という意味で理解すべきである．

Advanced Problems　より高度な問題，新しい問題，既存結果の拡張を含む問題欄．

このように，FQ の Problems sections には，高校レベルから大学学部上級レベルまで，段階に応じて関われる入口が用意されている．さらに，解答を送るだけではなく，問題案を送ることもできる．この点は，当日の聴衆にも特に好意的に受け止められたように感じられた．

5　High School Problems and Solutions の日本語訳配付

当日は，*The Fibonacci Quarterly* Vol. 64, No. 2 および No. 3 に掲載された High School Problems and Solutions のうち，出題問題の部分を日本語訳した資料を参考配付した．これらは本来 FQ の掲載記事であり，有料で閲覧される場合もある内容であるため，本報告集には問題文の翻訳を再録しない．

配付の目的は，FQ の問題欄の雰囲気を実際に見てもらうことであった．問題欄の存在を抽象的に説明するだけでなく，実際の問題を手に取って眺めることで，解答投稿や問題提案への心理的な距離を下げることができると考えた．

6　投稿方法の整理

発表では，通常の論文投稿と Problems sections への投稿の導線が異なることも強調した．

- 研究論文・アウトリーチ記事は Taylor & Francis Online から投稿する．投稿前には Instructions for Authors を確認する．
- Problems sections への解答・問題案は，各 Problems Editor へ直接送る．High School Problems Editor は M. Tip Phaovibul 氏である．
- 問題がオリジナルでない場合は，出典や由来を明記する．
- “well-known results” とだけ書かず，参考文献を示す．

特に問題案を送る場合，既知の結果との関係や問題の由来を丁寧に説明することは重要である．これは単に形式上の注意ではなく，国際的な問題欄に投稿する際の基本的な作法でもある．

7　Problem Session 資料について

発表とは別に，研究集会中の自由な議論や休憩時間の話題として利用できるように，「日本フィボナッチ協会 第 24 回研究集会 PROBLEM SESSION」という参考配付資料を作成した．これは International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications の Problem Session を参考にしたものであり，解決済みの問題，計算実験から楽しめる問題，現在も研究対象となっている未解決問題を意図的に混在させた．

この資料では，次の六つの問題を取り上げた．

1. 分数生成ゲーム – 国際会議 Problem Session より
2. Fibonacci Rectangle Game – 正方形を付け足すだけで Fibonacci が出る

3. 5 乗根を足して，0 でない和をできるだけ小さくせよ
4. Slow Fibonacci Walk – 整数 N に最も遅く到達するには？
5. すべての項が合成数になる Fibonacci 型数列はどこまで “偶然” に作れるか
6. Fibonacci/Lucas 多項式の monogenicity を完全分類できるか

参加者からは，この Problem Session 資料を報告集にも掲載してほしいとの要望があった．そこで，本稿の付録として当日配付した資料をそのまま収録する．

8 おわりに

今回の発表では，FQ がどのようなジャーナルであるかに加えて，どのように関わることができるかを具体的に紹介した．特に，問題を解くだけでなく，作題して送ることができるという点，また研究論文以外にもアウトリーチ記事や問題欄という幅広い入口があるという点が，参加者にとって新鮮であったように思われる．

日本フィボナッチ協会の研究集会には，研究者だけでなく，高校生・高専生・教員・数学愛好者など幅広い層が参加している．FQ の Problems sections や Mathematical Outreach は，そのような幅広い層が国際的な場に関わるための自然な入口になり得る．今後，今回の配付資料や Problem Session 資料をきっかけとして，日本から FQ への解答投稿，問題提案，アウトリーチ記事，研究論文投稿が増えることを期待したい．

参考文献

[1] The Fibonacci Association, official website. https://www.fibonacciassociation.org/

[2] *The Fibonacci Quarterly*, Taylor & Francis Online. https://www.tandfonline.com/journals/ufbq20

[3] Instructions for Authors, *The Fibonacci Quarterly*. https://www.tandfonline.com/action/authorSubmission?show=instructions&journalCode=ufbq20

[4] C. Kimberling (comp.), “Problem Session,” *The Fibonacci Quarterly* **63** (2025), no. 2, 505–516. DOI:10.1080/00150517.2025.2460845.

日本フィボナッチ協会 第 24 回研究集会

PROBLEM SESSION

問題・未解決問題集（参考配付資料）

2026 年 8 月 28 日　東京理科大学（神楽坂校舎）

問題選定・構成：中川 幸一

本資料は，*International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications* の Problem Session を参考に，Fibonacci 数・Lucas 数・漸化式に関する問題を，高校生から研究者まで同じ場で議論できるように選んだものである．第 21 回国際会議の Problem Session では，参加者が提示した問題に，会議後の議論・解答・予想を加えた記録が *The Fibonacci Quarterly* に掲載されている．[1)] 本資料でも，解決済みの問題，計算実験から楽しめる問題，現在も研究対象となっている未解決問題を意図的に混在させた．

表示の見方．［未解決］ は，引用した情報源で open problem として明示されているものに限る．**［発展問題］** は自然な一般化・探索課題であり，本資料では世界的な未解決性までは主張しない．まず小さい場合を計算・作図して規則を予想するだけでも，十分に Problem Session の楽しみ方である．

Problem 1. 分数生成ゲーム – 国際会議 Problem Session より

対象の目安：高校生から　　**状況：基本問題は解決済み／発展問題あり**

集合 T を次の規則で生成する．

$$1 \in T, \qquad x, y \in T \implies \frac{x}{y+1} \in T.$$

(1)$0 < r \leq 1$ を満たすすべての有理数 r が T に属することを示せ．

(2)$r = a/b \in T$ に対し，1 から r を作るのに必要な最小ステップ数を $f(r)$ とする．$f(1/n)$ を調べよ．どの程度小さい上界が得られるか．

(3)同じステップ数で作れる分数を列挙し，個数，分母の最小・最大，分布などを調べよ．

Fibonacci 数との接点はすぐに現れる．例えば

$$1 \longmapsto \frac{1}{2} \longmapsto \frac{2}{3} \longmapsto \frac{3}{5} \longmapsto \cdots$$

と，連続する Fibonacci 数の比 F_n/F_{n+1} が生成される．

既知の結果・背景. 第 21 回国際会議で提示された Problem 4.1 は会議後に解決され，$0 < r \leq 1$ のすべての有理数が T に入ることが示された．また，同じ記録には

$$f(1/n) \leq 2\lfloor \log_2 n \rfloor$$

という対数オーダーの上界も示されている．一方，最小ステップ数や同一レベルで現れる分数集合の構造は，計算実験に向く題材である．

出典・参考文献. C. Kimberling (comp.), “Problem Session,” *The Fibonacci Quarterly* 63 (2025), no. 2, 505–516, Problem 4. DOI:10.1080/00150517.2025.2460845.

1) C. Kimberling (comp.), “Problem Session,” *The Fibonacci Quarterly* 63 (2025), no. 2, 505–516. DOI:10.1080/00150517.2025.2460845.

Problem 2. Fibonacci Rectangle Game – 正方形を付け足すだけで Fibonacci が出る

対象の目安：高校生から **状況：解決済みの結果あり／発展問題あり**

長方形に，その一辺と同じ長さを一辺にもつ正方形を外側に付け足し，新しい長方形を作る操作を考える．

(1)正方形から始めて同じ規則を繰り返すと，辺の長さに Fibonacci 型漸化式が現れることを示せ．

(2)長方形の縦横比が黄金比

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

に近づくことを示せ．

(3)最初から正方形ではない長方形を使うと，最初の正方形の付け方は回転・対称性を除いて何種類に分かれるか．

(4)**[発展問題]** Fibonacci の代わりに別の 2 階線形漸化式を幾何学的操作から作るには，どの規則を変えればよいか．

既知の結果・背景. Larsson Engholm–Miller は，非正方形の初期長方形では最初の配置が本質的に “long-side-first” と “short-side-first” の 2 クラスに分かれ，どちらも異なる初期値をもつ同一の Fibonacci 型漸化式に従い，縦横比は黄金比へ収束することを示した．

出典・参考文献. D. Larsson Engholm and S. J. Miller, “The Fibonacci Rectangle Game: Two First-Move Classes and a Triangle-Induced Choice,” arXiv:2607.19960 (2026).

Problem 3. 5 乗根を足して，0 でない和をできるだけ小さくせよ

対象の目安：高校生から（複素数・平面ベクトル） **状況：$\ell = 5$ は解決済み／一般化は探索課題**

$\mu_5 = \{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4\}$ を 5 乗根全体とする．重複を許して n 個選び，

$$s = z_1 + \cdots + z_n \qquad (z_i \in \mu_5)$$

とする．$s \neq 0$ の範囲で $|s|$ を最小にした値を $\sigma_5(n)$ と書く．5 乗根を「正五角形の頂点を表す 5 本のベクトル」と考えてもよい．

(1)$n = 1, 2, 3, \ldots$ について $\sigma_5(n)$ を小さい範囲で計算・作図せよ．

(2)n を増やしたとき，$\sigma_5(n)$ が変化する位置に規則性はあるか．

(3)正五角形の幾何から，黄金比が現れそうな理由を説明できるか．

(4)**[発展問題]** 一般の ℓ に対し，同様に $\sigma_\ell(n)$ を定義して調べよ．

既知の結果・背景. Munemasa–Núñez Ponasso は $\ell = 5$ の場合を完全に決定した．$\sigma_5(n)$ の “跳び” は Fibonacci 数 F_m と Lucas 数 L_m を用いて

$$n = 5F_m, \qquad n = L_m, \qquad n = 2L_m$$

の位置にのみ現れる．証明には黄金比の有理近似と連分数が本質的に使われる．

出典・参考文献. A. Munemasa and G. Núñez Ponasso, “The Minimal Absolute Value of Sums of Fifth Roots of Unity,” arXiv:2607.00825 (2026).

Problem 4. Slow Fibonacci Walk – 整数 N に最も遅く到達するには？

対象の目安：高校生から（計算実験向き） **状況：最近の研究／発展問題あり**

正整数 a, b から

$$x_1 = b, \qquad x_2 = a, \qquad x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$$

と進む Fibonacci 型の walk を考える．ある整数 N に到達する walk の中で，N が現れる時刻を最大にする初期値を探したい．

(1)小さい N について，どの初期値から始めると最も遅く N に到達するかを全探索せよ．

(2)$F_1 = F_2 = 1$ とする．N を

$$N = aF_t + bF_{t-1}, \qquad 1 \le a \le b \le F_t$$

と表す方法を探し，一意性を予想せよ．

(3)最遅 walk で N の次に現れる数を計算し，$\lfloor \varphi N \rfloor$ または $\lceil \varphi N \rceil$ との関係を調べよ．

(4)偶数 t と奇数 t から得られる N の集合を分け，隣接項間の gap を比較せよ．

既知の結果・背景. Mao–Zhao は 2026 年 8 月，最遅 walk を与える表示と次項の公式を用い，gap spectra と密度を研究した．Chung–Graham–Spiro の予想 $D_\ell = U_\ell$ は $\ell = 3$ では成立するが $\ell = 4$ では成立しないことが示されている．高次 gap の具体的構造を計算で探索するだけでも面白い．

出典・参考文献. Y. Mao and Q. Zhao, “Gap spectra and densities of slow Fibonacci walks,” arXiv:2608.19886 (2026).

Problem 5. すべての項が合成数になる Fibonacci 型数列はどこまで “偶然” に作れるか

対象の目安：高校生から **状況：［未解決］（2026 年 8 月 28 日確認）**

任意の初期値 a_0, a_1 から

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (n \ge 0)$$

で定める数列を考える．次を満たす無限数列は存在するか．

すべての a_k が合成数であり，しかも “すべての項と共通因子をもつ” 1 より大きい整数が存在しない．

すなわち，すべての整数 $M > 1$ に対して，ある k が存在して

$$\gcd(M, a_k) = 1$$

となることを要求する．

(1)まず，すべての項が合成数になる Fibonacci 型数列を探してみよ．

(2)有限個の素数による covering congruences を使うと，なぜ “全項合成数” を保証できるのか調べよ．

(3)そのような covering に用いた素数の積を M とすると，なぜ上の未解決問題の条件を満たせないのか説明せよ．

(4)計算機で初期値を探索し，長い範囲で全項が合成数となる例や，少数の素数では cover しにくい例を探してみよ．

既知の結果・背景. これは Erdős Problem #276 として現在も open とされている．Graham は 1964 年に covering system を用いて全項合成数となる例を構成したが，その型の構成では固定した整数 $M > 1$ が全項のどれかの素因数を必ず共有する．Ismailescu–Son はこの障害を回避すると期待される構成を与えているが，covering system が存在しないことまでは証明されておらず，問題は open のままである．

出典・参考文献. P. Erdős and R. L. Graham, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory* (1980), p. 27; T. F. Bloom, Erdős Problem #276, erdosproblems.com/276 (accessed 2026-08-28). See also R. L. Graham, "A Fibonacci-Like Sequence of Composite Numbers," *Math. Mag.* 37 (1964), 322–324.

Problem 6. Fibonacci/Lucas 多項式の monogenicity を完全分類できるか

対象の目安：大学生・研究者向け **状況：[未解決]（論文中で明示）**

Fibonacci 多項式と Lucas 多項式を

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) = 1, \quad F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x),$$
$$L_0(x) = 2, \quad L_1(x) = x, \quad L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$$

で定める．整数係数既約多項式 $f(x)$ の根を α としたとき，

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$$

となる場合を，ここでは f が monogenic であると呼ぶ．

Chen–Guo–Hong は次を証明した．

- n が奇数なら，$F_n(x)$ のすべての既約因子は monogenic.
- n が偶数なら，$L_n(x)$ のすべての既約因子は monogenic.

一方，$L_5(x)$ には非 monogenic な既約因子 $x^4 + 5x^2 + 5$ があり，$F_{10}(x) = F_5(x)L_5(x)$ にも同じ因子が現れる．

(1)**[未解決]** 偶数 n で，$F_n(x)$ のすべての既約因子が monogenic となるための必要十分条件を求めよ．

(2)**[未解決]** 奇数 n で，$L_n(x)$ のすべての既約因子が monogenic となるための必要十分条件を求めよ．

(3)**[未解決]** より一般に，すべての既約因子が monogenic かどうかを判定するアルゴリズム的基準を与えよ．特に，n の素因数分解と偶奇性だけで記述できるか．

(4)小さい n を計算機代数で因数分解し，どの素因数・合同条件が境界を支配していそうか予想せよ．

既知の結果・背景. 著者らの $n \leq 100$ の数値実験では，未解決側の parity に現れる non-monogenic factor に単純な密度は見えないと報告されている．したがって，初等的な偶奇だけでは説明できない算術的障害が潜んでいる可能性がある．

出典・参考文献. H. Chen, W. Guo and H. Hong, "Monogenity of Fibonacci polynomials and Lucas polynomials," arXiv:2606.08024 (2026), Section 7 (Open Problems).

本資料について

本資料は研究集会での自由な議論・計算実験の入口を目的とした参考配付資料であり，各論文の内容を網羅的に要約するものではない．各 Problem の直後に，その問題に直接対応する**出典・参考文献**を置いた．未解決性の表示は上記の各出典に基づく．

mod 9 における複素黄金比 5+i とピサノ周期 24

The Complex Golden Ratio 5+i Modulo 9 and the Pisano Period 24

岩淵 勇樹

IWABUCHI Yu(u)ki

2026-08-28

Abstract

ガウス整数の剰余環 $R = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})[i]$ において、$\alpha = 5 + i$ とその共役 $\beta = 5 - i$ は黄金比の特性方程式 $x^2 = x + 1$ を満たします。本稿では、この事実から累乗とフィボナッチ数を結び付け、α の位数が 24 であることと、それがピサノ周期 $\pi(9) = 24$ を与えることを示します。さらに、R の 81 点に対する $z \mapsto \alpha z$ の軌道が、長さ $1, 8, 24, 24, 24$ の 5 軌道に分解されることを証明します。「複素黄金比」は本稿内の便宜的な呼称であり、$5 + i$ と $5 - i$ のいずれかを本質的な主値とみなすものではありません。

1　黄金比方程式と共役な二根

以下、等式は特に断らない限り R におけるものとします。$i^2 = -1$ より

$$(5 + i)^2 = 24 + 10i \equiv 6 + i = (5 + i) + 1 \pmod 9 \tag{1}$$

したがって $\alpha = 5 + i$ は

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{2}$$

の根となります。この意味に限って、本稿では α を「複素黄金比」と呼びます。ただし、これは標準的な術語ではありません。

共役 $\beta = 5 - i = 5 + 8i$ も (2) を満たし、

$$\alpha+\beta=10\equiv 1,\qquad \alpha\beta=26\equiv -1 \tag{3}$$

となります。特に α は単元であり、$\beta=-\alpha^{-1}=1-\alpha$ となります。また

$$\alpha-\beta=2i,\qquad (2i)^2=-4\equiv 5 \tag{4}$$

なので、R では $2i$ が $\sqrt{5}$ に相当します。
フィボナッチ数を $F_0=0, F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ で定めます。(2) から帰納的に

$$\alpha^n=F_n\alpha+F_{n-1}\qquad (n\geq 1) \tag{5}$$

が得られます。したがって

$$\alpha^n=(5F_n+F_{n-1})+F_n i,\qquad \mathrm{Im}(\alpha^n)=F_n \pmod 9 \tag{6}$$

また $2i$ は単元なので、通常のビネ公式に対応して

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{(5+i)^n-(5-i)^n}{2i} \tag{7}$$

も R で意味をもち、成立します。

2　位数 24 とピサノ周期

直接計算（各段階で係数を 9 で簡約する）により

$$\alpha^3=2+2i,\qquad \alpha^6=-i,\qquad \alpha^{12}=-1,\qquad \alpha^{24}=1 \tag{8}$$

$\alpha^{12}\neq 1$ かつ $\alpha^8=1+3i\neq 1$ です。24 の真の素因数除去による候補は $24/2=12$ と $24/3=8$ であるため、(8) と合わせて

$$\mathrm{ord}_R(\alpha)=24 \tag{9}$$

が従います。さらに

$$\alpha^6=-i,\quad \alpha^{12}=-1,\quad \alpha^{18}=i,\quad \alpha^{24}=1 \tag{10}$$

となり、24 周期の内部には 6 ステップごとの四分対称性があります。

この乗法作用とフィボナッチ状態遷移との関係を明示します。R の任意の元は一意に $u+v\alpha$（$u,v\in\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$）と書けます。実際、$u+v(5+i)=(u+5v)+vi$ なので座標変換は可逆です。この基底で

$$\alpha(u+v\alpha)=v+(u+v)\alpha, \tag{11}$$

すなわち係数ベクトルへの作用は

$$Q=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}v\\u+v\end{pmatrix} \tag{12}$$

です。特に $(u,v)=(0,1)$ の軌道は連続するフィボナッチ数の組を与えます。(5) と (9) より、$(F_n,F_{n+1})\equiv(0,1)\pmod 9$ に初めて戻るのは $n=24$ です。従ってピサノ周期は

$$\pi(9)=24 \tag{13}$$

であり、α 倍はフィボナッチ行列 Q の作用をガウス整数剰余環上に表示したものと解釈できます。

3　9×9 剰余格子の軌道分解

$$R=(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})[i] \tag{14}$$

の 81 個の元に対し、

$$T(z)=(5+i)z \tag{15}$$

を繰り返し作用させたときの軌道を調べます。

計算すると、81 点は次の 5 本の周期軌道に分解されます。

$$\boxed{81=1+8+24+24+24} \tag{16}$$

軌道の各点を繋いだ離散グラフを図 1 に示します。

すなわち、原点 0 は固定点となり、$3R\setminus\{0\}$ の 8 点は 1 本の 8 周期を形成します。残りの 72 点は 3 本の 24 周期に分かれます。

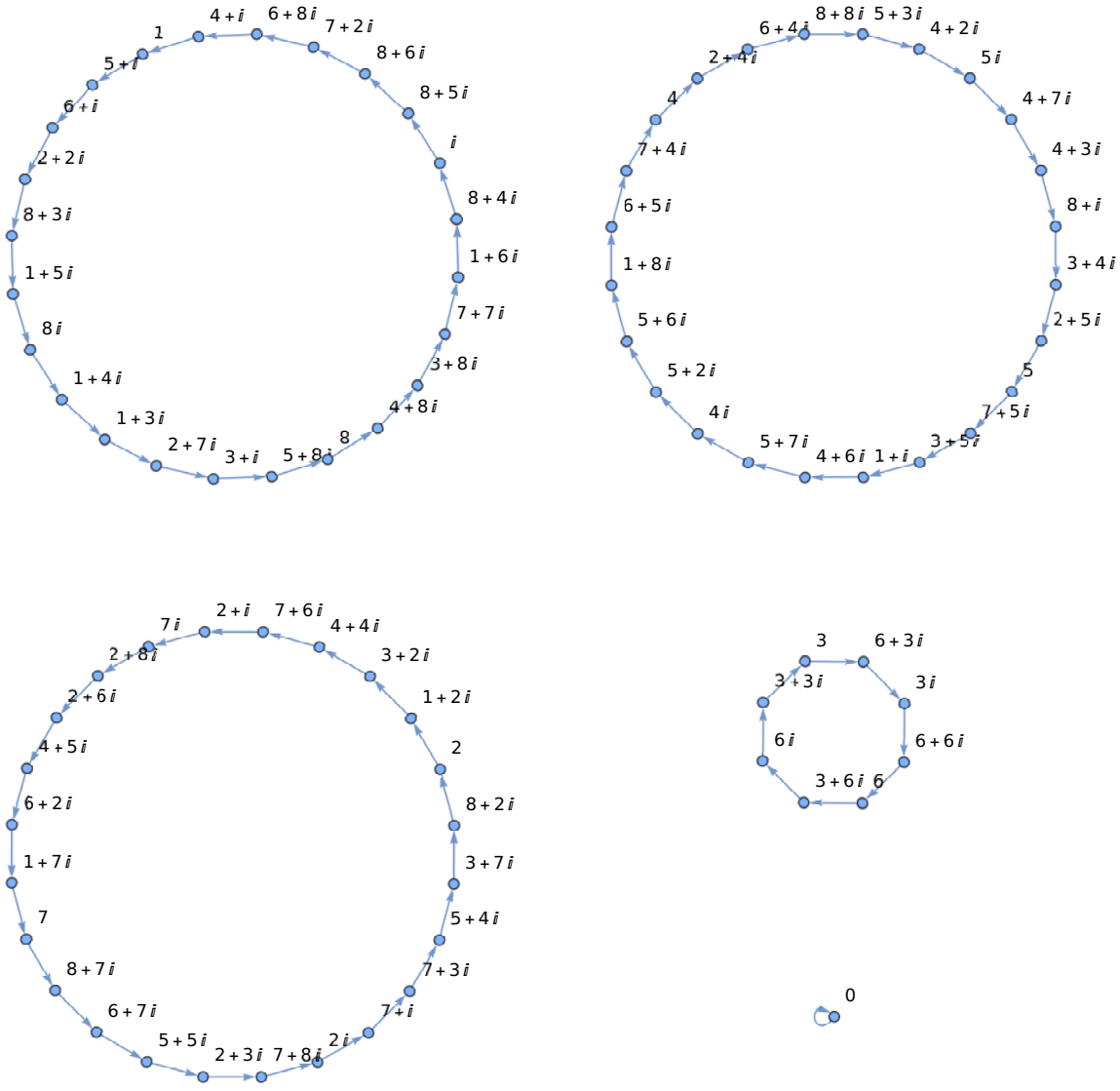


図 1　81 点の 5 つの軌道

例えば 24 周期の代表元として $1, 2, 4$ を取ることができます。($i, 2i, 4i$ としても差し支えありません。)

この 3 本の 24 周期はノルム

$$N(a+bi) = a^2 + b^2 \pmod 9 \tag{17}$$

によって区別できます。実際、

$$N(5+i) = 26 \equiv -1 \pmod 9 \tag{18}$$

であるため、

$$N(Tz) \equiv -N(z) \pmod 9 \tag{19}$$

となります。従って各軌道では、ノルムは符号を除いて一定であり、3 本の 24 周期はそれぞれ

$$\{1, 8\}, \qquad \{2, 7\}, \qquad \{4, 5\} \tag{20}$$

に対応します。

以上より、9×9 の剰余格子には、ピサノ周期 24 に対応する 3 本の 24 周期と、その内部に 8 周期および固定点が現れます。

4 $5+i$ と $5-i$ の選択について

共役写像 $i \mapsto -i$ は R の自己同型であり、α と β を交換します。また (8) から

$$\beta = -\alpha^{-1} = \alpha^{11}, \qquad \beta^6 = i, \qquad \beta^{24} = 1 \tag{21}$$

従って $1 \to i \to -1 \to -i \to 1$ という四分点の順序を重視すれば $5-i$ が自然です。一方、(6) のように虚部へ F_n が符号を変えず現れることを重視すれば $5+i$ が自然です。環の内部には連続的な複素平面の「正の向き」はなく、両者の一方だけを本質的な主値とする根拠はありません。

5 今後の課題

本稿で証明したのは mod 9 における上述の構造です。一般の法 m における軌道分解や、どの法で黄金比方程式の根をガウス整数剰余環内に実現できるかの分類に加え、フィボナッチ数に対するペル数についての適用、黄金比に対する白銀比、青銅比等貴金属比についての適用、トリボナッチ数への適用まで範囲を広めて解明を進めたいです。

傍心の織りなす幾何学 ～平面から立体へ

海城高校２年 鬼頭秀誓

1. 研究概要

1-1 研究の目的

本研究の目的は、傍心部分三角形同士の間に存在する相似の関係性を用いて、傍心部分三角形の垂心同士、外心同士、内心同士を結んでできる三角形に見られる相似の構造を明らかにする。そして、その性質から派生する、それら３つの三角形のオイラー線の共点性、傍心部分三角形の傍心三角形のオイラー線の共点性についても明らかにする。

1-2 先行研究との比較

まず、本研究に関する用語や性質について先行研究を用いながら説明する。

オイラー線について説明する。三角形において垂心、重心、外心は一直線上に並び、その直線をオイラー線と呼ぶ。

傍心とは、三角形の１つの内角の二等分線と、他の２つの外角の二等分線が交わる点である。また、傍心三角形とは三角形の傍心を結んでできる三角形である。一般に、傍心三角形の垂心は元の三角形の内心と一致するという性質がある。これは、Encyclopedia of Triangle Centers の X(1)で明らかにされていた(1)。そして、傍心部分三角形が互いに相似であることは、萬信介の論文「三角形の傍心に関する定理-数学的活動に向けて-」ですでに示されていた (2)。本研究では傍心三角形のオイラー線上に元の三角形の外心が存在するという性質も証明の際に用いている。これは、Encyclopedia of Triangle Centers の X(3)で明らかにされている(3)。

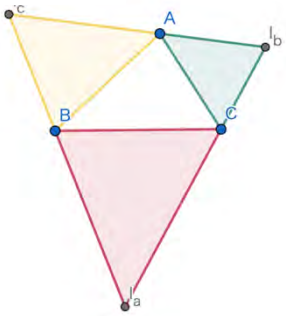
次に、自分の研究と大きく関係する C.J. Bradley の論文について明らかにする。2006 年に発表された C.J. Bradley の論文「A Theorem on Concurrent Euler Lines」では、傍心部分三角形のオイラー線が外接円上にて１点で交わるという定理が示されていて、この定理は、重心座標やパラメータ表示を用いて証明されていた(4)。

ここで、本研究と先行研究の違い、本研究の新規性について述べる。先行研究は、傍心部分三角形の垂心と外心を結ぶオイラー線に関する共点関係を重心座標による証明で明らかにしたものである。しかし、傍心部分三角形の垂心や外心、内心、傍心における関係性については明らかにされていない。また、「A Theorem on Concurrent Euler Lines」では、傍心部分三角形のどのような性質がこの定理を成り立たせているのかについては言及されていない。そのため、本研究では傍心部分三角形の垂心、外心、内心の間に存在する相似の関係性を明らかにし、それを用いて、垂心、外心、内心の間、そして傍心同士の間に成り立つ共点関係について初等幾何的に証明を行なった。また、本研究では、傍心部分三角形の外心と内心を結んでできる直線が一点で交わることも示している。

2. 用語の定義

まず、冒頭でも触れた傍心部分三角形について改めて定義を行う。傍心部分三角形とは、任意の三角形において、三角形の 1 辺とそれに対応する頂点の傍心で構成される三角形のことである。右の図 1 においては赤色、緑色、黄色の三角形のことである。

図 1



次に、回転相似について定義をする。回転相似とは、一般的にはある点を中心に回転して相似となる関係のことである。本研究では以下のような定義とする。回転相似とは、三角形の外角を θ としたとき、対応する頂点に対してある点を中心に $180-\frac{\theta}{2}$°だけ回転して相似となる関係のことを指す。

3. 研究結果

・定理 1 (図 2~4)

任意の三角形において、傍心部分三角形を考えた時、垂心同士を結んでできる三角形は元の三角形と合同である(これを定理 1-(a)とする)。外心同士を結んでできる三角形は元の三角形の傍心三角形と相似である(これを定理 1-(b)とする)。内心同士を結んでできる三角形は元の三角形の傍心三角形の傍心三角形と相似である(これを定理 1-(c)とする)。

図 2

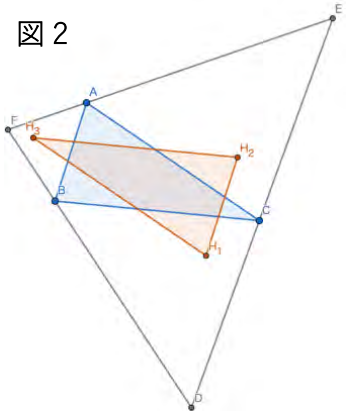


図 3

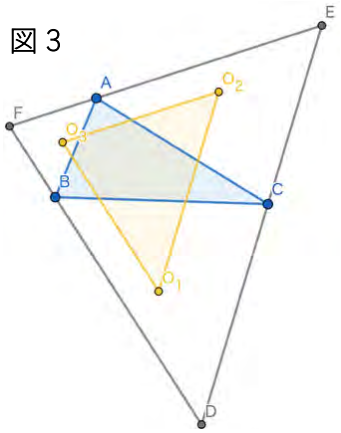
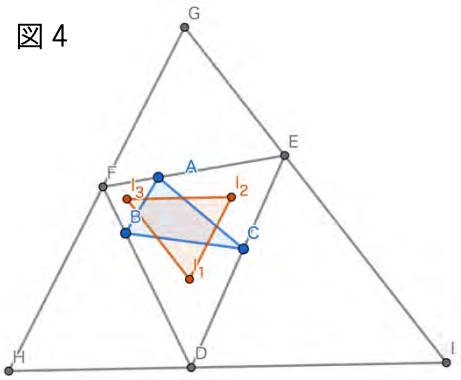


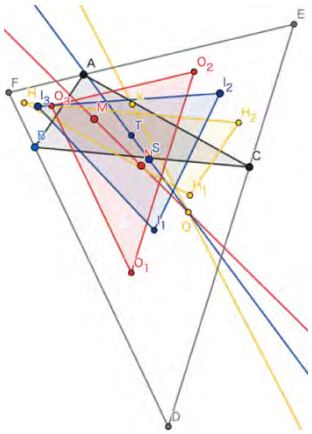
図 4



・定理 2 (図 5)

正三角形を除く任意の三角形において、傍心部分三角形の垂心同士を結んでできる三角形、外心同士を結んでできる三角形、内心同士を結んでできる三角形のオイラー線は傍心三角形の外心上にて 1 点で交わる。

図 5



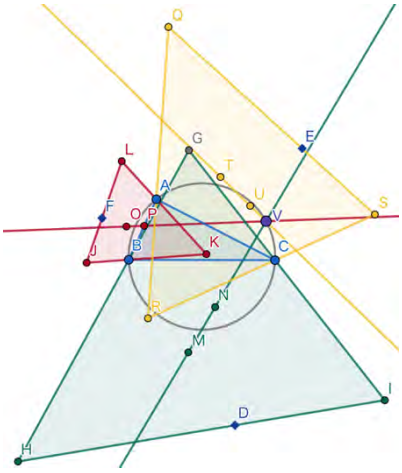
(図注)
左の図において、黄色の三角形が傍心部分三角形の垂心を結んでできる三角形、赤色の三角形が傍心部分三角形の外心を結んでできる三角形、青色の三角形が傍心部分三角形の内心を結んでできる三角形である。オイラー線の色と三角形の色は対応している。また、3 本のオイラー線は傍心三角形の外心 O で交わっている。

正三角形で成り立たないのは、正三角形だと、垂心、外心、内心が重なってしまい、この定理が成り立たないからである。

・定理 3 (図 6)

正三角形を除く任意の三角形において、傍心部分三角形の傍心三角形のオイラー線は元の三角形の外接円上にて 1 点で交わる。

図 6



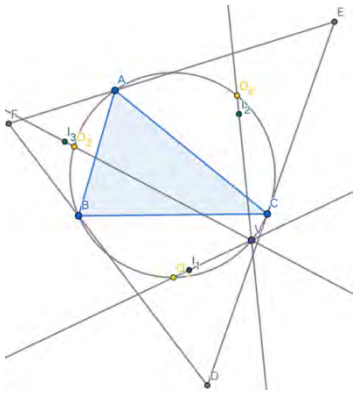
(図注)
左の図において、黄色の三角形が△ACE の傍心三角形、赤色の三角形が△ABF の傍心三角形、青色の三角形が△BCD の傍心三角形である。オイラー線の色と三角形の色は対応している。また、3 本のオイラー線は△ABC の外接円上の 1 点 V で交わっている

正三角形で成り立たないのは、正三角形だと、垂心、外心、内心が重なってしまい、この定理が成り立たないからである。

・定理 4 (図 7)

正三角形を除く任意の三角形において、傍心部分三角形の外心と内心を結んだ直線は元の三角形の外接円上にて 1 点で交わる。

図 7



(図注)
左の図において、傍心部分三角形の外心は黄色の点である。傍心部分三角形の内心は緑色の点である。傍心部分三角形の外心と内心を結んだ直線は元の三角形の外接円上の点 V において 1 点で交わっている。

正三角形で成り立たないのは、正三角形だと、垂心、外心、内心が重なってしまい、成り立たないからである。

4 参考文献等一覧・使用ツール

(1) Encyclopedia of Triangle Centers X(1) https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html 最終閲覧日 2026 年 9 月 3 日
(2) 萬信介 「三角形の傍心に関する定理-数学的活動に向けて-」(東北数学教育学会年報 40 号 pp.73~84 2009 年)
(3) Encyclopedia of Triangle Centers X(3) https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html 最終閲覧日 2026 年 9 月 3 日
(4) C.J. Bradley 「A Theorem on Concurrent Euler Lines」(The Mathematical Gazette Vol.90 pp.412-416 2006 年)
(5) GeoGebra https://www.geogebra.org/?lang=ja 最終使用日 2026 年 9 月 21 日

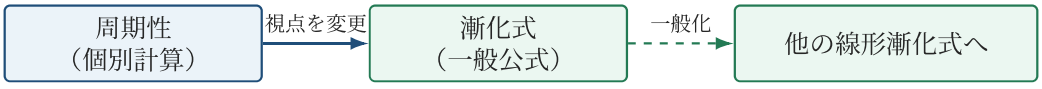
$\left|\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k\right|$ の明示公式

田中璃久（東京工業高等専門学校 4 年）
共同研究者：南出大樹・中川幸一

第 24 回フィボナッチ協会研究集会　2026 年 8 月 28 日

本発表の流れ

1. **問題設定**　1 のべき根で重み付けしたフィボナッチ数の和
2. **従来の方法と課題**　周期ごとの分類では場合分けが増える
3. **新たな方法**　漸化式による望遠鏡和
4. **主結果**　和と絶対値の 2 乗の明示公式
5. **一般化**　リュカ数列・一般の線形漸化式・Chebyshev 表示



主結果

$m \geq 1$, $n \geq 0$, $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ とする.

重み付き和の明示公式

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k\right|^2 = \frac{1}{1+4\sin^2(2\pi/m)}\Big(1 + F_n^2 + F_{n+1}^2 + 2F_nF_{n+1}\cos\frac{2\pi}{m} - 2F_n\cos\frac{2\pi(n+1)}{m} - 2F_{n+1}\cos\frac{2\pi n}{m}\Big).$$

任意の m に対して，場合分けなしで端点の値だけにより表せる.

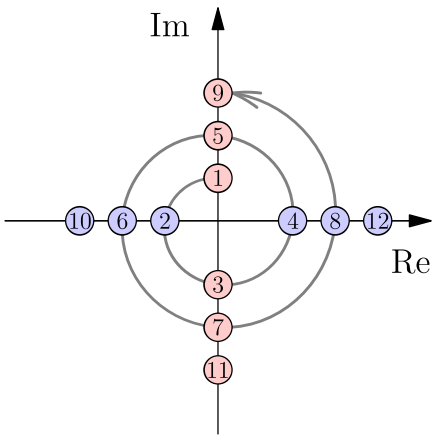
研究のきっかけ

H. Ohtsuka の問題 (Fibonacci Quarterly 61(2), B-1326)

$$\left|\sum_{k=0}^{n} i^k F_k\right| = F_{\lceil n/2\rceil}\sqrt{F_{2\lfloor n/2\rfloor+1}}.$$

出発点となる問い

$i = \zeta_4$ を一般の ζ_m に置き換えると？



各項 $i^k F_k$ の複素平面上での向き

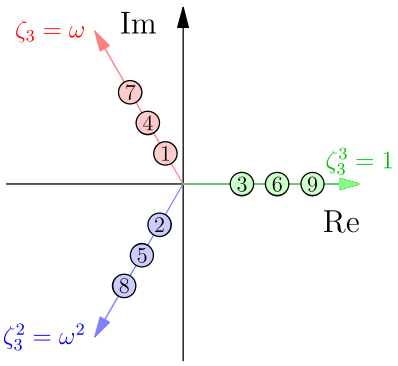
昨年の方法

例：$m = 3$

$\omega = \zeta_3$ とすると，重みは $1, \omega, \omega^2$ を
周期的に繰り返す．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \omega^k F_k \quad = \quad & (\ F_0 + F_3 + \cdots\ ) \\ & + \ \omega\ (\ F_1 + F_4 + \cdots\ ) \\ & + \omega^2\ (\ F_2 + F_5 + \cdots\ ).\end{aligned}$$

- 添字を剰余類ごとに分類する
- 各部分和を既知の公式で計算する



m=3 の時のイメージ図

去年の方法の問題点

必要になる計算

$$\sum_{k=0}^{m-1} \zeta_m^k \sum_{i=0}^{n} F_{mk-i} = \sum_{i=0}^{m-1} \zeta_m^{-i} \frac{(F_{n+m-i} - F_{m-i} - (-1)^m (F_{n-i} - F_{-i}))}{L_m - (-1)^m - 1}$$

剰余類ごとの部分和を m 個計算し，最後にまとめる必要がある．

個々の m は計算できても，任意の m を一つの式にまとめにくい．

望遠鏡和の手法

$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} - \zeta_m \boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} - \zeta_m^2 \boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} \\
&= F_0 + F_1\zeta_m + F_2\zeta_m^2 + \cdots + F_n \zeta_m^n \\
&\quad - F_0\zeta_m - F_1\zeta_m^2 - \cdots - F_{n-1}\zeta_m^n - F_n \zeta_m^{n+1} \\
&\quad - F_0\zeta_m^2 - \cdots - F_{n-2}\zeta_m^n - F_{n-1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2} \\
&= \zeta_m - F_{n+1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2}.
\end{aligned}$$

明示公式

$$\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k = \frac{\zeta_m - F_{n+1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2}}{1 - \zeta_m - \zeta_m^2}$$

望遠鏡和の手法

$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} - \zeta_m \boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} - \zeta_m^2 \boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} \\
&= F_0 + F_1\zeta_m + F_2\zeta_m^2 + \cdots + F_n \zeta_m^n \\
&\quad - F_0\zeta_m - F_1\zeta_m^2 - \cdots - F_{n-1}\zeta_m^n - F_n \zeta_m^{n+1} \\
&\quad - F_0\zeta_m^2 - \cdots - F_{n-2}\zeta_m^n - F_{n-1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2} \\
&= \zeta_m - F_{n+1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2}.
\end{aligned}$$

明示公式

$$\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k = \frac{\zeta_m - F_{n+1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2}}{1 - \zeta_m - \zeta_m^2}$$

田中璃久 | 重み付き Fibonacci 和 7 / 14

望遠鏡和の手法

$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} - \zeta_m \boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} - \zeta_m^2 \boxed{\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k} \\
&= F_0 + F_1\zeta_m + F_2\zeta_m^2 + \cdots + F_n \zeta_m^n \\
&\quad - F_0\zeta_m - F_1\zeta_m^2 - \cdots - F_{n-1}\zeta_m^n - F_n \zeta_m^{n+1} \\
&\quad - F_0\zeta_m^2 - \cdots - F_{n-2}\zeta_m^n - F_{n-1}\zeta_m^{n+1} - F_n \zeta_m^{n+2} \\
&= \zeta_m - F_{n+1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2}.
\end{aligned}$$

明示公式

$$\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k = \frac{\zeta_m - F_{n+1}\zeta_m^{n+1} - F_n\zeta_m^{n+2}}{1 - \zeta_m - \zeta_m^2}$$

なぜ分母に $1 - \zeta_m - \zeta_m^2$ が現れるのか

フィボナッチ数列の特性多項式を

$$p(x) = x^2 - x - 1$$

とする．和をずらす操作に現れる多項式

$$q(\zeta_m) := \zeta_m^2 \cdot p(\zeta_m^{-1}) = 1 - \zeta_m - \zeta_m^2$$

を以降，**逆数多項式**と呼ぶ．

漸化式 $F_k - F_{k-1} - F_{k-2} = 0$ → 係数を読む → 逆数多項式 $q(\zeta_m) = 1 - \zeta_m - \zeta_m^2$

絶対値の２乗

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_m^k F_k\right|^2 = \sum_{k=0}^{n}\zeta_m^k F_k\left(\overline{\sum_{k=0}^{n}\zeta_m^k F_k}\right)$$

ここで，$\overline{\zeta_m} = \zeta_m^{-1}$ より，指数を含む項は

$$\zeta_m^r + \zeta_m^{-r} = 2\cos\frac{2\pi r}{m}$$

に変換できる．

重み付きフィボナッチ数和の絶対値の二乗

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_m^k F_k\right|^2 = \frac{1}{1+4\sin^2(2\pi/m)}\Big(1+F_n^2+F_{n+1}^2+2F_nF_{n+1}\cos\frac{2\pi}{m} - 2F_n\cos\frac{2\pi(n+1)}{m} - 2F_{n+1}\cos\frac{2\pi n}{m}\Big)$$

リュカ数の場合

中央の項はフィボナッチ数列の場合と同様に消える．

$$(1-\zeta_m-\zeta_m^2)\sum_{k=0}^{n}\zeta_m^k L_k = L_0+\zeta_m(L_1-L_0)-L_{n+1}\zeta_m^{n+1}-L_n\zeta_m^{n+2}$$

重み付きリュカ数和の明示公式

$$\sum_{k=0}^{n}\zeta_m^k L_k = \frac{L_0+\zeta_m(L_1-L_0)-L_{n+1}\zeta_m^{n+1}-L_n\zeta_m^{n+2}}{1-\zeta_m-\zeta_m^2}$$

重み付きフィボナッチ数和の明示公式

$$\sum_{k=0}^{n}\zeta_m^k F_k = \frac{F_0+\zeta_m(F_1-F_0)-F_{n+1}\zeta_m^{n+1}-F_n\zeta_m^{n+2}}{1-\zeta_m-\zeta_m^2}$$

リュカ数列の場合の絶対値の 2 乗

$\theta = 2\pi/m$ とおく．和の公式に複素共役を掛けると

明示公式

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k L_k\right|^2 = \frac{1}{1+4\sin^2\theta}\Big(5 + L_n^2 + L_{n+1}^2 + 2L_nL_{n+1}\cos\theta - 4\cos\theta + 2L_{n+1}\cos(n\theta) - 10F_n\cos((n+1)\theta) - 4L_n\cos((n+2)\theta)\Big).$$

ここでは恒等式

$$2L_n - 4L_{n+1} = -10F_n$$

を用いて係数を整理した．**初期値だけが変わり，導出の構造と分母は変わらない．**

一般の線形漸化式

次のように数列を定義する．

$$a_k = c_1 a_{k-1} + \cdots + c_r a_{k-r} \quad (k \geq r),$$

漸化式に対応する逆数多項式を

$$q(z) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_r z^r$$

とすると，

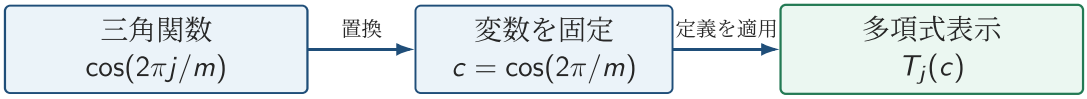
$$q(\zeta_m)\sum_{k=0}^{n} a_k \zeta_m^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{r-1}\left(a_k - \sum_{j=1}^{k} c_j a_{k-j}\right)\zeta_m^k}_{\text{最初の } r \text{ 項}} - \underbrace{\sum_{\ell=1}^{r}\left(\sum_{j=\ell}^{r} c_j a_{n+\ell-j}\right)\zeta_m^{n+\ell}}_{\text{最後の } r \text{ 項}}.$$

Chebyshev 多項式による整理

$c = \cos(2\pi/m)$ とおく．第一種 Chebyshev 多項式

$$T_j(\cos\theta) = \cos(j\theta)$$

を使えば，m と n を含む三角関数を多項式で表せる．

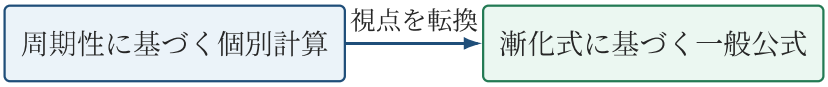


フィボナッチ数列に対する表示

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \zeta_m^k F_k\right|^2 = \frac{1}{5-4c^2}\Big(1 + F_n^2 + F_{n+1}^2 + 2cF_nF_{n+1} - 2F_nT_{n+1}(c) - 2F_{n+1}T_n(c)\Big).$$

まとめ

	2025 年	2026 年
対象	$m = 3, 4, 6$	**任意の m**
方法	項を剰余類ごとに分類	望遠鏡和
場合分け	必要	**不要**
拡張性	m ごとに再計算	**他の線形漸化式へ展開**



今後の展望

- 高階漸化式での具体例
- Chebyshev 表示のさらなる簡約

Downward diagonals on weighted and modified Pascal's triangles considering left alignments and these descriptions

Shingo NAKANISHI
Department of General Education, Faculty of Engineering,
Osaka Institute of Technology

Keywords: Weighted Fibonacci sequence, Padovan sequence, Narayana cow sequence, Reverse model

1. Introduction

The author has previously described relevant works, including RIMS Kôkyûroku No. 2304-13 [1] and No. 2336-24 [2], regarding various modifications of Pascal's triangles and their associated matrices to represent weighted skipped Gibonacci sequences [3-5] as the summation of upward diagonals. In contrast, the present study focuses on the downward diagonals of those structures [6,7]. Conventionally, such triangular configurations are analyzed primarily from a single perspective, typically emphasizing upward diagonals [4,5,8]. However, by conceptualizing the Pascal triangle as an equilateral pyramid, it becomes possible to analyze both sides with equal geometric weight.

While lower triangular matrices are highly effective for computing these sequential properties, over-reliance on matrix forms can obscure the visual and geometric intuition behind downward diagonals. Consequently, standard lower triangular matrix representations often omit comprehensive explanations of downward diagonal properties.

To address this limitation, this study explains the characteristics of downward diagonals without relying heavily on matrix algebraic forms, thereby facilitating a more intuitive and visual understanding of the underlying problem. Instead of matrix methods, we focus on concrete geometric interpretations. Specifically, we establish descriptive methods for analyzing downward diagonals and their corresponding sequences on modified and weighted Pascal's triangles, complemented by illustrative examples. Furthermore, these examples are visually manifested as equilateral triangular spirals governed by geometric conditions such as fractals [9].

2. Descriptions of sequences

Generally, the standard Fibonacci sequence is defined as:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \qquad F_j = F_{j-1} + F_{j-2} \quad (j \geq 2) \tag{2.1}$$

Because the Fibonacci sequence is historically well-known worldwide, it serves as a fundamental baseline. However, various derived sequences have been proposed, such as the n-Pell sequence, the n-Jacobsthal sequence, and their respective Lucas versions. To analyze these variations precisely, it is effective to introduce a weight parameter (a, b) for each term. For instance, the weighted Fibonacci sequence with parameters (a, b) is given by:

$$\begin{aligned} &F_{(a,b),0} = 0, F_{(a,b),1} = 1, \\ &F_{(a,b),j} = a \cdot F_{(a,b),j-1} + b \cdot F_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Similarly, the corresponding weighted Lucas sequence is expressed as:

$$\begin{aligned} &L_{(a,b),0} = 2, L_{(a,b),1} = a, \\ &L_{(a,b),j} = a \cdot L_{(a,b),j-1} + b \cdot L_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Furthermore, a generalized weighted Fibonacci sequence incorporates flexible initial constants (g_0, g_1) [3-5]. This sequence is described as:

$$\begin{aligned} &G_{(a,b),0} = g_0, G_{(a,b),1} = g_1, \\ &G_{(a,b),j} = a \cdot G_{(a,b),j-1} + b \cdot G_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

where (g_0, g_1) represents the initial values for Equation (2.4). This formulation allows users to distinguish between these sequences clearly and utilize them effectively for specific purposes.

Although Equation (2.4) is convenient for precise identification, there are alternative types of sequences with higher-order terms, such as the Padovan sequence:

$$\begin{aligned} &P_{(1,1),0} = 0, P_{(1,1),1} = 1, P_{(1,1),2} = 1, \\ &P_{(1,1),j} = 1 \cdot P_{(1,1),j-2} + 1 \cdot P_{(1,1),j-3} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

and the Narayana cow sequence:

$$N_{(1,0,1),0} = 0, N_{(1,0,1),1} = 1, N_{(1,0,1),2} = 1,$$
$$N_{(1,0,1),j} = 1 \cdot N_{(1,0,1),j-1} + 1 \cdot N_{(1,1),j-3} \ (j \geq 3) \tag{2.6}$$

To maintain consistency across sequences with multiple terms, a simplified and exact description method is required. As an associated framework, we apply the following generalized description for weighted Fibonacci sequences:

$$P_{(a,b),0}^{(g_0,g_1)} = g_0, P_{(a,b),1}^{(g_0,g_1)} = g_1,$$
$$P_{(a,b),j}^{(g_0,g_1)} = a \cdot P_{(a,b),j-1}^{(g_0,g_1)} + b \cdot P_{(a,b),j-2}^{(g_0,g_1)} \ (j \geq 2) \tag{2.7}$$

where the superscripts (g_0, g_1) denote the initial constants of Equation (2.7), and the subscripts (a, b) indicate the weights of the respective terms.

In the same manner, the generalized Padovan sequence (including the Perrin sequence) can be illustrated using the initial constants (g_0, g_1, g_2) and the term weights $(1, 1)$ as follows:

$$P_{(1,1),0}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_0, P_{(1,1),1}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_1, P_{(1,1),2}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_2,$$
$$P_{(1,1),j}^{(g_0,g_1,g_2)} = 1 \cdot P_{(1,1),j-2}^{(g_0,g_1,g_2)} + 1 \cdot P_{(1,1),j-3}^{(g_0,g_1,g_2)} \ (j \geq 3) \tag{2.8}$$

Moreover, if we consider the Narayana cow sequence as a Fibonacci p-sequence with $p = 3$, which corresponds to the theory of Golden p-proportions introduced by Stakhov [10], Equation (2.6) can be translated into the following unified representation:

$$P_{(1,0,1),0}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_0, P_{(1,0,1),1}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_1, P_{(1,0,1),2}^{(g_0,g_1,g_2)} = g_2,$$
$$P_{(1,0,1),j}^{(g_0,g_1,g_2)} = 1 \cdot P_{(1,0,1),j-1}^{(g_0,g_1,g_2)} + 1 \cdot P_{(1,0,1),j-3}^{(g_0,g_1,g_2)} \ (j \geq 3) \tag{2.9}$$

Consequently, these diverse sequences can be systematically defined using a unified set of common rules.

3. Reverse descriptions of sequences

In Section 2, the recurrence relations are described using standard mathematical conventions, where the terms on the right side of the equations are arranged in descending order. In this section, we propose an alternative approach to describe these sequences according to their ascending orders.

For example, using the standard parameters from Equation (2.2), the conventional Pell sequence can be rewritten from its original form:

$$F_{(2,1),0} = 0, F_{(2,1),1} = 1,$$
$$F_{(2,1),j} = 2 \cdot F_{(2,1),j-1} + 1 \cdot F_{(2,1),j-2} \ (j \geq 2) \tag{3.1}$$

into its corresponding reverse version:

$$F_{(2,1)R,0} = 0, F_{(2,1)R,1} = 1,$$
$$F_{(2,1)R,j} = 1 \cdot F_{(2,1)R,j-2} + 2 \cdot F_{(2,1)R,j-1} \ (j \geq 2) \tag{3.2}$$

To distinguish between these orientations, a capital letter "R" is introduced as a subscript identifier immediately following the term weight parameters, clearly indicating whether the sequence is formulated in a descending or ascending order. Similarly, using the generalized framework of Equation (2.7), the sequence:

$$P_{(2,1),0}^{(0,1)} = 0, P_{(2,1),1}^{(0,1)} = 1,$$
$$P_{(2,1),j}^{(0,1)} = 2 \cdot P_{(2,1),j-1}^{(0,1)} + 1 \cdot P_{(2,1),j-2}^{(0,1)} \ (j \geq 2) \tag{3.3}$$

can be translated into its reverse notation:

$$P_{(2,1)R,0}^{(0,1)} = 0, P_{(2,1)R,1}^{(0,1)} = 1,$$
$$P_{(2,1)R,j}^{(0,1)} = 1 \cdot P_{(2,1)R,j-2}^{(0,1)} + 2 \cdot P_{(2,1)R,j-2}^{(0,1)} \ (j \geq 2) \tag{3.4}$$

Through this systematic notation, the structural characteristics of these equations become explicitly clear.

To further validate this conceptual model, we examine the Jacobsthal sequence. In its standard ascending weight arrangement (descending index order), it is expressed as:

$$F_{(1,2),0} = 0, F_{(1,2),1} = 1,$$
$$F_{(1,2),j} = 1 \cdot F_{(1,2),j-1} + 2 \cdot F_{(1,2),j-2} \ (j \geq 2) \tag{3.5}$$

Conversely, its reverse sequence formulation is given by:

$$F_{(1,2)R,0} = 0, F_{(1,2)R,1} = 1,$$
$$F_{(1,2)R,j} = 2 \cdot F_{(1,2)R,j-2} + 1 \cdot F_{(1,2)R,j-1} \ (j \geq 2) \tag{3.6}$$

Based on the generalized descriptions established herein, the conventional representation:

$$P^{(0,1)}_{(1,2),0} = 0, P^{(0,1)}_{(1,2),1} = 1,$$
$$P^{(0,1)}_{(1,2),j} = 1 \cdot P^{(0,1)}_{(1,2),j-1} + 2 \cdot P^{(0,1)}_{(1,2),j-2} \ (j \geq 2) \tag{3.7}$$

is mapped to the reverse model as follows:

$$P^{(0,1)}_{(1,2)R,0} = 0, P^{(0,1)}_{(1,2)R,1} = 1,$$
$$P^{(0,1)}_{(1,2)R,j} = 2 \cdot P^{(0,1)}_{(1,2)R,j-2} + 1 \cdot P^{(0,1)}_{(1,2)R,j-1} \ (j \geq 2) \tag{3.8}$$

Understanding these reverse versions relies simply on verifying the sequential order of the right-hand terms and ensuring that the capital letter "R" is accurately appended to the subscripts of the sequence terms. In the subsequent sections, we utilize this descriptive method to characterize and visualize the downward diagonals on modified weighted Pascal's triangles.

4. Downward diagonals on weighted Pascal's triangles for Pell sequence and Jacobsthal sequence

Section 3 established the conceptual framework for the reverse description of sequences. When analyzing a conventional pyramid-type weighted Pascal's triangle, evaluating both diagonal orientations—from the left side to the right side and vice versa—naturally generates two distinct sequences: the Pell sequence and the Jacobsthal sequence. While these approaches align well with conventional geometric reasoning, representing the weighted Pascal's triangles as lower triangular matrices often causes the structural meaning of descending (downward) diagonals to be overlooked. This oversight occurs because matrix-based analyses predominantly focus on upward diagonal summations. Therefore, it is necessary to examine these alternative configurations from a comprehensive geometrical viewpoint.

The explicit characteristics of the descending order descriptions and their corresponding downward diagonals are illustrated in Fig. 1. This visualization effectively captures one-skipped and one-downward structural behaviors within the weighted Pascal's triangles. Specifically, the index difference between the left-hand term j and the initial right-hand term $j-2$ is two, which structurally resembles the property found in the Padovan sequence. This geometric gap indicates the presence of a skipped alignment within the triangular distribution. Furthermore, because the right-hand recurrence relation adopts the reverse description framework, it directly corresponds to a downward diagonal trajectory on the modified Pascal's triangles. Consequently, the configurations in Fig. 1 concretely manifest as one-downward and two-skipped representations of both the Pell and Jacobsthal sequences through the application of the reverse model.

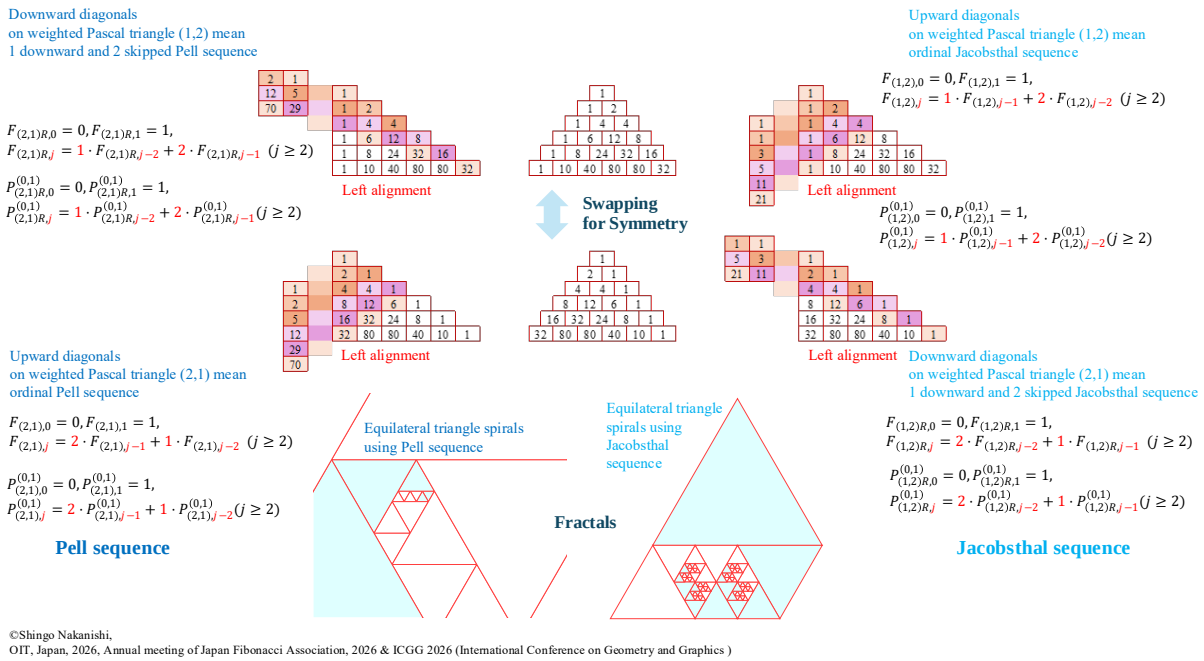


Fig. 1 Visualizations about Pell sequence and Jacobsthal sequence on the weighted and modified Pascal's triangles as the summations of upward and downward diagonals and these equilateral triangular spirals [9].

As displayed in Fig.1, these geometric properties provide rich visual information regarding both sequence types. The equilateral triangular spirals positioned on the left provide a visual representation of the Pell sequence, while the corresponding spirals on the right depict the Jacobsthal sequence for comparative analysis. By examining these two types of equilateral triangular spirals, the distinct geometric and structural characteristics inherent to each sequence can be clearly differentiated and understood within a fractal context.

5. Downward diagonals about Fibonacci sequence and Lucas sequence with flexible initial constants.

By introducing arbitrary, flexible initial constants (g_0, g_1) into the generalized framework of Equation (2.7), various types of modified weighted Pascal's triangles can be constructed, as illustrated in Fig. 2. From the structures presented in Fig. 2, the behavior of the Fibonacci and Lucas sequences can also be effectively characterized through the application of the reverse model. These recurrence relations are expressed as:

$$\begin{aligned} &F_{(1,1)R,0} = 1, F_{(1,1)R,1} = 2, \\ &F_{(1,1)R,j} = 1 \cdot F_{(1,1)R,j-2} + 1 \cdot F_{(1,1)R,j-1} \ \ (j \geq 2) \end{aligned} \tag{5.1}$$

and

$$\begin{aligned} &L_{(1,1)R,0} = 1, L_{(1,1)R,1} = 3, \\ &L_{(1,1)R,j} = 1 \cdot L_{(1,1)R,j-2} + 1 \cdot L_{(1,1)R,j-1} \ \ (j \geq 2). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Using the common description rules under the reverse model, Equations (5.1) and (5.2) can be directly translated into the following superscripted notation:

$$\begin{aligned} &P^{(1,2)}_{(1,1)R,0} = 1, P^{(1,2)}_{(1,1)R,1} = 2, \\ &P^{(1,2)}_{(1,1)R,j} = 1 \cdot P^{(1,2)}_{(1,1)R,j-2} + 1 \cdot P^{(1,2)}_{(1,1)R,j-1} \ \ (j \geq 2) \end{aligned} \tag{5.3}$$

and

$$\begin{aligned} &P^{(1,3)}_{(1,1)R,0} = 1, P^{(1,3)}_{(1,1)R,1} = 2, \\ &P^{(1,3)}_{(1,1)R,j} = 1 \cdot P^{(1,3)}_{(1,1)R,j-2} + 1 \cdot P^{(1,3)}_{(1,1)R,j-1} \ \ (j \geq 2) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Consequently, this systematic framework successfully identifies several specific downward diagonals within the modified Pascal's triangles.

As demonstrated in Fig. 2, this descriptive method plays a critical role in concisely and effectively visualizing these numerical sequences, enabling the generation of both equilateral triangular spirals and regular hexagonal spirals derived from the Fibonacci and Lucas sequences, respectively. Furthermore, by systematically varying the values of (g_0, g_1) in accordance with the j-th and $(j+1)$-th orders of the standard Fibonacci or Lucas sequences, the target sequence configurations along the downward diagonals of the modified Pascal's triangles can be precisely isolated. Therefore, the implementation of this unified descriptive rule provides a highly convenient and robust approach for displaying appropriate sequential properties effectively.

6. Downward diagonals about extended model about Narayana cow sequence and Padovan sequence for higher order structures.

The structural descriptions and classifications of these sequences are comprehensively summarized in Table 1. By properly extending our framework to higher-order recurrence relations, various sequences such as the Padovan sequence, the Narayana cow sequence, and their higher-order generalizations can be systematically analyzed. Consider the generalized higher-order sequence defined as:

$$\begin{aligned} &P^{(0,1,\cdots,1)}_{(1,1)p,0} = 0, P^{(0,1,\cdots,1)}_{(1,1)p,1} = \cdots = P^{(0,1,\cdots,1)}_{(1,1)p,p} = 1, \\ &P^{(0,1,\cdots,1)}_{(1,1)p,j} = 1 \cdot P^{(0,1,\cdots,1)}_{(1,1)p,j-1} + 1 \cdot P^{(0,1,\cdots,1)}_{(1,1)p,j-p-1} \ \ (j \geq p+1) \end{aligned} \tag{6.1}$$

This formulation allows us to evaluate diverse sequences under a unified model. First, the powers of 2 can be expressed as:

$$P^{(1)}_{(2),0} = 1, P^{(1)}_{(2),j} = 2 \cdot P^{(1)}_{(2),j-1} \ \ (j \geq 1) \tag{6.2}$$

or alternatively:

$$P^{(1)}_{(1,1)0,0} = 1, P^{(1)}_{(1,1)0,j} = 1 \cdot P^{(1)}_{(1,1)0,j-1} + 1 \cdot P^{(1)}_{(1,1)0,j-1} \ \ (j \geq p+1, p=0) \tag{6.3}$$

The corresponding reverse model is written as:

$$P^{(1)}_{(1,1)R0,0} = 1, P^{(1)}_{(1,1)R0,j} = 1 \cdot P^{(1)}_{(1,1)R0,j-1} + 1 \cdot P^{(1)}_{(1,1)R0,j-1} \ \ (j \geq p+1, p=0) \tag{6.4}$$

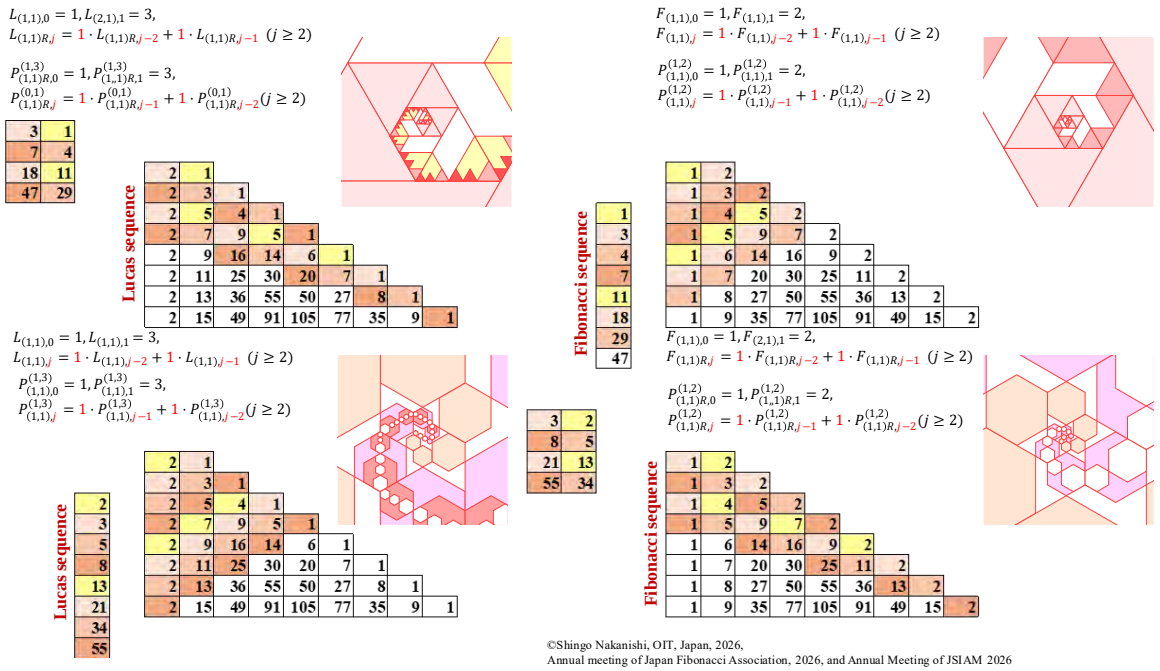


Fig.2 Downward diagonals on modified Pascal triangles for visualization of Fibonacci sequence and Lucas sequence [6,11].

Table 1 Descriptions and classifications about subscripts and superscripts of sequences

Name of sequence	Initial constants	Weights of terms
Powers of 2	(1)	(2) or (1,1)0
Fibonacci sequence	(0,1,1) or (1,1)	(1,1) or (1,1)1
Narayana cow sequence	(0,1,1,1) or (1,1,1)	(1,0,1) or (1,1)2
3rd order Fibonacci Narayana type sequence	(0,1,1,1,1) or (1,1,1,1)	(1,0,0,1) or (1,1)3
4th order Fibonacci Narayana type sequence	(0,1,1,1,1,1) or (1,1,1,1,1)	(1,0,0,01) or (1,1)4
Padovan sequence	(0,1,1,1,2,2) or (1,1,1,2,2)	(1,0,0,0,1) or (1,1)4

In this specific case, Equations (6.3) and (6.4) are mathematically equivalent because there is no upward or downward diagonal summation explicitly separated on the standard Pascal's triangle.
Next, the standard Fibonacci sequence can be displayed within this model as:

$$P^{(1,1)}_{(1,1)1,0} = 1, P^{(1,1)}_{(1,1)1,1} = 1,$$
$$P^{(1,1)}_{(1,1)1,j} = 1 \cdot P^{(1,1)}_{(1,1)1,j-1} + 1 \cdot P^{(1,1)}_{(1,1)1,j-2} \quad (j \geq p+1, p=1) \tag{6.5}$$

The corresponding reverse configuration yields a one-downward and one-skipped sequence:

$$P^{(1,1)}_{(1,1)R1,0} = 1, P^{(1,1)}_{(1,1)R1,1} = 1,$$
$$P^{(1,1)}_{(1,1)R1,j} = 1 \cdot P^{(1,1)}_{(1,1)R1,j-2} + 1 \cdot P^{(1,1)}_{(1,1)R1,j-1} \quad (j \geq p+1, p=1) \tag{6.6}$$

From the right-hand terms of Equation (6.6), the descending structural order induced by the reverse model is clearly observable.
Similarly, the Narayana cow sequence is formulated as:

$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)2,0} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)2,1} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)2,2} = 1,$$
$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)2,j} = 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)2,j-1} + 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)2,j-3} \quad (j \geq p+1, p=2) \tag{6.7}$$

Its reverse counterpart produces a two-downward and two-skipped sequence:

$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)R2,0} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)R2,1} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)R2,2} = 1,$$
$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)R2,j} = 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)R2,j-3} + 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)R2,j-1} \quad (j \geq p+1, p=2) \tag{6.8}$$

Furthermore, the Padovan sequence can be illustrated as:

$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)1,0} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)1,1} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)1,2} = 1,$$
$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)1,j} = 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)1,j-2} + 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)1,j-3} \quad (j \geq p+1, p=1) \tag{6.9}$$

or via a higher-order parameterization:

$$P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,0} = 1, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,1} = 1, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,2} = 1, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,3} = 2, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,4} = 2,$$
$$P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,j} = 1 \cdot P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,j-1} + 1 \cdot P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)4,j-5} \quad (j \geq p+1, p=4) \tag{6.10}$$

Applying the reverse model to these formulations yields a one-downward and two-skipped sequence:

$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)R1,0} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)R1,1} = 1, P^{(1,1,1)}_{(1,1)R1,2} = 1,$$
$$P^{(1,1,1)}_{(1,1)R1,j} = 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)R1,j-3} + 1 \cdot P^{(1,1,1)}_{(1,1)R1,j-2} \quad (j \geq p+1, p=2) \tag{6.11}$$

and a four-downward and four-skipped sequence:

$$P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,0} = 1, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,1} = 1, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,2} = 1, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,3} = 2, P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,4} = 2,$$
$$P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,j} = 1 \cdot P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,j-5} + 1 \cdot P^{(1,1,1,2,2)}_{(1,1)R4,j-1} \quad (j \geq p+1, p=4) \tag{6.12}$$

From Equations (6.1) to (6.12), it is evident that these mathematical structures concretely manifest as downward diagonals on modified Pascal's triangles.

As shown in Fig. 3, two distinct types of sequence alignments are successfully confirmed. The first involves the Generalized Fibonacci sequences, which are displayed as one-downward and one-skipped configurations distributed across two columns to form a zigzag motion [11,12]. The second type consists of alignments that run parallel to the downward diagonals of the modified Pascal's triangles, establishing the structured downward behaviors depicted in Fig. 3.

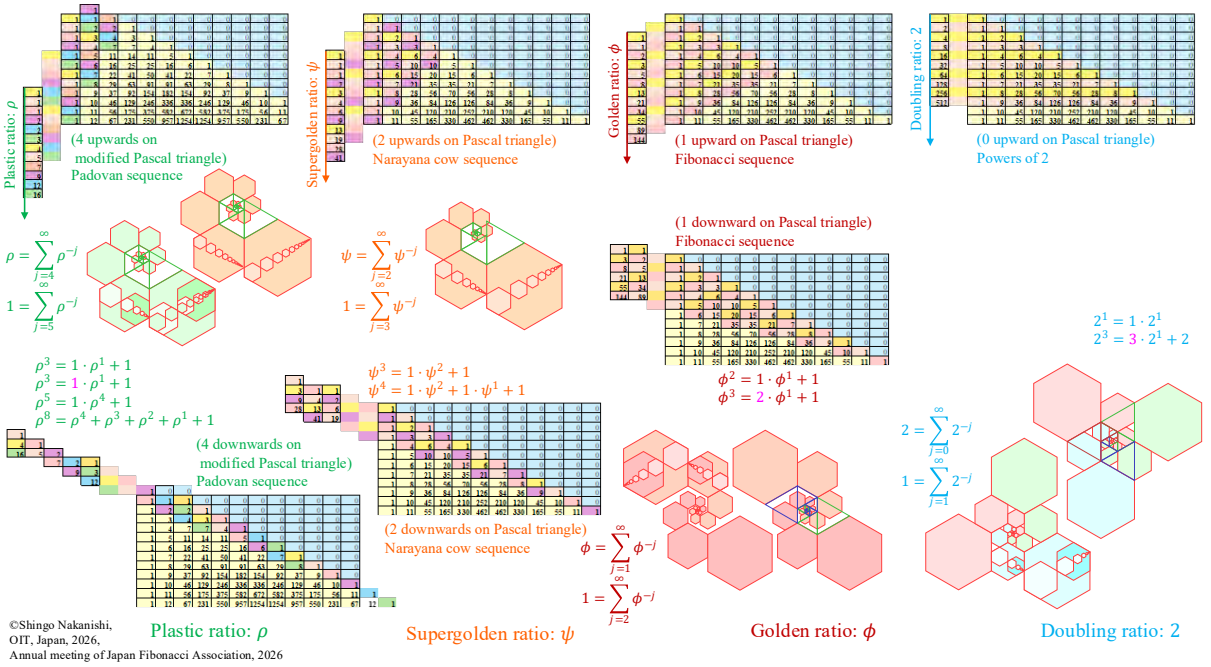


Fig. 3 Downward diagonals and these alignments on modified Pascal's triangles according to the designated reverse model of sequences [11,12].

7. Conclusions

In this study, we investigated the properties of downward diagonals and their mathematical descriptions on weighted, modified Pascal's triangles.

First, we demonstrated that the designated sequences can be precisely estimated as specific geometric alignments corresponding to the proposed reverse description model along the downward diagonals of modified weighted Pascal's triangles.

Second, we identified two distinct classes of downward alignments governed by specific reverse descriptions and boundary conditions. Consequently, future research should focus on exploring the rigorous underlying mathematical proofs and algebraic reasons for these dual alignment characteristics.

Furthermore, we confirmed that for various types of sequences generated on modified Pascal's triangles, appropriate fractal

structures—such as equilateral triangular spirals—can be successfully constructed and visualized based on their intrinsic mathematical properties.

Acknowledgments

The author, Shingo NAKANISHI, would like to express my sincere gratitude to Professor Emeritus Masami YASUDA, who belongs to Chiba University, Professor Emeritus Seiichi IWAMOTO, who belongs to Kyushu University, and Professor Emeritus Shin-ichi KATAYAMA, who belongs to Tokushima University. The author would like to show my gratitude to Dr. Kouichi NAKAGAWA, Associate Prof. Hitoshi HOHJO at Osaka Metropolitan University. And the author would particularly like to thank my daughter who is an undergraduate student at Kyoto University and an abroad student at Berlin Institute of Technology.

References

[1] S. Nakanishi, “Modified calculations and visualizations for skipped, weighted, or right-upward typed Gibonacci sequences using related Pascal triangles and the matrices”, RIMS Kôkyûroku, Kyoto University, 2304-13, (2025), 114-126.

[2] S. Nakanishi, “Normalizations about weighted Pascal's triangles and extended visualizations of weighted skipped generalized Fibonacci or Padovan sequences”, RIMS Kôkyûroku, Kyoto University, 2336-24, (2026), 230-241.

[3] A. T. Benjamin and J. J. Quinn, “Proofs that really count: the art of combinatorial proof”, The Mathematical Associationof America, (2003).

[4] T. Koshy, “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, Volume 1 (2nd Edition), Wiley, (2014).

[5] T. Koshy, “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, Volume 2 (2nd Edition), Wiley, (2018).

[6] Khatami, Seyed Mohammad Amin, and HADI MOSLEHI. "Some Pascal-like triangles." Mathematics and Society, 8.3 (2023), 1-30.

[7] Belaggoun, Nassima, and Hacène Belbachir. "A survey on linear recurrent sequences associated with arithmetic triangles." Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics 6.3 (2024): 428-462.

[8] T. M. Green, “Recurrent sequences and Pascal triangle”, Mathematics Magazine, 14-1, (1968), 13-21.

[9] S. Nakanishi, “Various visualizations about single, double, and triple equilateral triangle or regular hexagon spirals using similar metallic ratios and related sequences”, Proceedings of the 22nd International Conference on Geometry and Graphics (2026), (in printing).

[10] Stakhov, A. P. "The Mathematics of harmony: Clarifying the origins and development of Mathematics." Congressus Numerantium 193.20 (2008): 06.

[11] S. Nakanishi, “Visualizations for Equilateral Triangle Spirals and Regular Hexagon Spirals of Fibonacci Sequence and Pell Sequence with flexibly initial constants”, Annual meeting of JSIAM, 1A-3-1, (2026) in Japanese.

[12] S. Nakanishi, “Visualizations for Regular Hexagon Spirals of Plastic Ratio, Golden Ratio, Doubling Ratio, and Supergolden Ratio”, Annual meeting of JSIAM, 1A-3-2, (2026) in Japanese.

等差数列を係数にもつ多項式の既約性評価

加隈 弘晃
開智日本橋学園中学・高等学校
hiroakikakuma@gmail.com

日本フィボナッチ協会 第 24 回研究集会（2026 年 8 月 28 日）

キーワード：既約多項式，等差数列，零点分布，一次分数変換，Eisenstein 整数，楕円曲線

1 はじめに

この研究は, 私が 4 年前に勤務していた開智未来中学・高等学校の住吉莉玖くんと共同して, フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ を係数にもつ

$$f_n^m(x) = F_n x^m + F_{n+1}x^{m-1} + \cdots + F_{n+m}$$

の実の零点に関する研究を行ったことがきっかけでした. その後, さらに研究を深めて, すべての零点の位置の解析および $n \geq m-1$ となるときこの多項式が $\mathbb{Q}$ 上既約となることを [1] で示しました. そのときに編み出した既約判定法を，等差数列係数を多項式にもつ多項式にも適用することができました [2]．本稿は, この研究の概要の説明と, 論文中に収められなかった数値実験結果の紹介をしていきたいと思います.

1.1 先行研究

以下では a, d を互いに素な正の整数，$m \geq 2$ として，

$$A_m(x) = ax^m + (a+d)x^{m-1} + \cdots + (a+(m-1)d)x + a + md \tag{1}$$

とおく．$a = d = 1$ のケース (の相反多項式) は, Borisov–Filaseta–Lam–Trifonov によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，t 以下の正整数 n のうち $O(t^{1/3+\varepsilon})$ 個を除いて

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示した研究がある [3]．本稿では a, d を一般に動かしたとき, $8a > m^2d^2$ のときに $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示す.

数値実験では，$A_m(x)$ の零点について次の現象が観察される．

- すべての零点は単位円の外部にあり，円周の近くにほぼ等間隔に並ぶ.
- a/d が大きくなると，零点は 1 以外の 1 の $(m+1)$ 乗根に近づく．

後者は，$a/d \to \infty$ のとき $a^{-1}A_m(x)$ が $x^m + x^{m-1} + \cdots + x + 1$ に係数ごとに収束することからも分かる．前者については Eneström–Kakeya の定理から

$$\frac{a+md}{a+(m-1)d} \leq |z| \leq \frac{a+d}{a} \tag{2}$$

が得られることから分かる．本稿で用いる手法では, 零点の絶対値の上からの評価が必要になるが, この評価では, 用いたい手法に対して精度が不足しているため, もう少し精度の良い評価を行う.

2 一次分数変換による零点評価

2.1 基本恒等式

$n \geq 0$ に対して

$$a_n = a + (n-1)d$$

とおく．このとき $a_1 = a$，$a_{m+1} = a + md$ で，

$$A_m(x) = a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \cdots + a_m x + a_{m+1}$$

と書ける．等差数列の二階差分が消えることから，次の恒等式が得られる．

補題 2.1. 任意の x に対して

$$(x-1)^2 A_m(x) = a_1 x^{m+2} - a_0 x^{m+1} - a_{m+2} x + a_{m+1} \tag{3}$$

が成り立つ．したがって，$z = 1$ または $A_m(z) = 0$ ならば

$$z^{m+1} = \frac{a_{m+2} z - a_{m+1}}{a_1 z - a_0} \tag{4}$$

である．

証明の概略．$(x-1)^2 A_m(x)$ を展開すると，中間係数は $a_{j-1} - 2a_j + a_{j+1} = 0$ によりすべて消える．残る 4 項が (3) である． □

この式の右辺を

$$g(z) = \frac{a_{m+2} z - a_{m+1}}{a_1 z - a_0} \tag{5}$$

とおくと, 1 次分数変換が与えらる．この g に対して方程式

$$g(-x) = x^{m+1}, \tag{6}$$

すなわち

$$a_1 x^{m+2} + a_0 x^{m+1} - a_{m+2} x - a_{m+1} = 0 \tag{7}$$

を考える．デカルトの符号法則より, この方程式はただ 1 つの正の実数解を持つ．また $x = 1$ を左辺に代入すると $-2(m+1)d < 0$ となるので, この解を λ とすると $\lambda > 1$ が分かる．

2.2 零点を含む円板

命題 2.2. $a \geq d$ とする．$A_m(x)$ の任意の零点 z に対して

$$|z| \leq \lambda$$

が成り立つ．等号が成り立ち得るのは $z = -\lambda$ の場合に限る．

証明. 1 次分数変換 g は円 $|z| = \lambda$ を，実軸上の 2 点 $g(\lambda)$ と $g(-\lambda)$ を直径の両端とする円へ移す．極 a_0/a_1 は $|z| < \lambda$ にあるので，g は領域 $|z| > \lambda$ をこの像円の内部へ移す．また

$$g(-\lambda) - g(\lambda) = \frac{2(m+1)d^2\lambda}{a_1^2\lambda^2 - a_0^2} > 0, \qquad g(-\lambda) = \lambda^{m+1}.$$

したがって $|z| > \lambda$ ならば $|g(z)| < \lambda^{m+1}$ である．一方，$A_m(z) = 0$ ならば補題 2.1 より $g(z) = z^{m+1}$ であるから，

$$|g(z)| = |z|^{m+1} > \lambda^{m+1}$$

となり矛盾する．境界上では像円上の絶対値が最大となる点が $g(-\lambda)$ のみであることから，等号が成立するのは $z = -\lambda$ に限られる． □

Vieta の公式と命題 2.2 から

$$a_{m+1} = a \prod_{j=1}^{m} |z_j| < a\lambda^m$$

を得る．したがって，$t = d/a$ とおけば

$$\lambda > (1+mt)^{1/m} > \frac{2+(m+1)t}{2+(m-1)t}. \tag{8}$$

この式の中辺と右辺の不等式は，両辺の対数差を t について微分すれば直ちに従う．

3 λ と係数列の近似

λ は零点の絶対値を上から抑えるだけでなく，a が m, d に比べて大きいときには等差数列の「公比」のようになっている．

補題 3.1. *(i)* $2a > \sqrt{m^2-1}\, d^{3/2}$ ならば

$$0 < a\lambda^m - a_{m+1} < 1, \qquad \lfloor a\lambda^m \rfloor = a_{m+1}.$$

(ii) $1 \le p \le m-1$ とする．$2a > p(m-p)d^2$ ならば

$$0 < a_{p+1} - a\lambda^p < 1, \qquad \lfloor a\lambda^p \rfloor = a_{p+1} - 1.$$

特に $8a > m^2d^2$ ならば，この等式はすべての $p = 1, \dots, m-1$ に対して成り立つ．

評価の要点．$t = d/a$ とする．(6) から

$$\lambda^m = \frac{\{1+(m+1)t\}\lambda + 1 + mt}{\lambda^2 + (1-t)\lambda} =: F(\lambda)$$

を得る．F は $x > 1$ で減少するので，(8) を代入して整理すると

$$0 < a\lambda^m - a_{m+1} < \frac{(m^2-1)d^3}{4a^2}.$$

これから (i) が成り立つ．また (8) と, 簡単な微分計算から

$$0 < a_{p+1} - a\lambda^p < a\left\{1 + pt - (1+mt)^{p/m}\right\} < \frac{p(m-p)d^2}{2a}$$

より，(ii) が成り立つ．なお $p(m-p) \le m^2/4$ なので, このときは (ii) がすべての $p = 1, \cdots, m-1$ に対して成り立つ． □

例 3.2. $m = 5, d = 6$ とし，a を動かす．各 a に応じて定まる λ について，$\lfloor a\lambda^p \rfloor - a$ は次のようになる．

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$a=20$	4	9	15	22	31
$a=40$	4	10	16	22	30
$a=80$	5	10	16	23	30
$a>91$	5	11	17	23	30
$6p-1$	5	11	17	23	29

$p = 1, \dots, 4$ では等差数列 $6p-1$ が現れる一方，$p = m$ では 1 だけ大きい．なお，補題 3.1(ii) の十分条件 $8a > m^2d^2$ はこの例では $a \ge 113$ であり，このケースでは $a > 91$ で安定する．

4 一般次数の既約性

定理 4.1 (主定理)**.** $m \ge 2$ とし，a, d を互いに素な正の整数とする．

$$8a > m^2d^2$$

ならば，$A_m(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である．

証明の概略．$A_m(x)$ が可約であると仮定し，

$$A_m(x) = P(x)Q(x), \qquad P, Q \in \mathbb{Z}[x]$$

とする．$\deg P = p$，$\deg Q = q$ とし，P, Q の最高次係数の絶対値をそれぞれ α, β，定数項の絶対値を γ, δ とする．すると

$$p + q = m, \qquad \alpha\beta = a, \qquad \gamma\delta = a + md.$$

P の零点を $z_1, \ldots, z_p$，Q の零点を $z_{p+1}, \ldots, z_m$ とすれば，命題 2.2 より

$$\gamma = \alpha \prod_{j=1}^{p} |z_j| \le \alpha\lambda^p, \qquad \delta = \beta \prod_{j=p+1}^{m} |z_j| \le \beta\lambda^q.$$

さらに

$$a\lambda^m - (a + md) = \beta\lambda^q(\alpha\lambda^p - \gamma) + \gamma(\beta\lambda^q - \delta).$$

左辺は 0 以上 1 未満であるから

$$0 \le \alpha\lambda^p - \gamma < \frac{1}{\beta}, \qquad 0 \le a\lambda^p - \beta\gamma < 1.$$

よって

$$\gamma = \lfloor \alpha\lambda^p \rfloor, \qquad \beta\gamma = \lfloor a\lambda^p \rfloor = a + pd - 1.$$

同様に

$$\delta = \lfloor \beta\lambda^q \rfloor, \qquad \alpha\delta = \lfloor a\lambda^q \rfloor = a + qd - 1.$$

以上を掛け合わせると

$$a(a + md) = \alpha\beta\gamma\delta = (a + pd - 1)(a + qd - 1).$$

$p + q = m$ を用いて整理すれば

$$8a = 4pqd^2 - 4md + 4.$$

ところが $4pq \le (p + q)^2 = m^2$ であるため

$$8a \le m^2d^2 - 4md + 4 < m^2d^2,$$

となり仮定に反する． □

5 低次数の場合

5.1 2 次式の場合

2 次式の場合は, 可約/既約の分類が可能である．

定理 5.1. 正の整数 d を固定する．d と互いに素な正の整数 a で

$$A_2(x) = ax^2 + (a + d)x + a + 2d$$

が可約となるものが存在するための必要十分条件は，d のすべての素因数 p が $p \equiv 1 \pmod 3$ を満たすことである．さらに d の相異なる素因数の個数を $\omega(d)$ とすると，そのような a はちょうど $2^{\omega(d)-1}$ 個存在する．

証明の概略. 判別式は

$$\Delta = (a + d)^2 - 4a(a + 2d) = 4d^2 - 3(a + d)^2$$

である．A_2 が可約ならば Δ は平方であり，任意の $p \mid d$ に対して -3 が p を法として平方剰余となる．したがって $p \equiv 1 \pmod 3$ である．

逆に $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$ とし，Eisenstein 整数環 $\mathbb{Z}[\omega]$ のノルム

$$\mathrm{N}(s + t\omega) = s^2 - st + t^2$$

を用いる．$p \equiv 1 \pmod 3$ は $\mathbb{Z}[\omega]$ で分解するため，各素因数の共役な二因子の一方を選ぶことで

$$s^2 - st + t^2 = d^2, \qquad t > d, \qquad \gcd(s, t) = 1$$

を満たす組が得られる．$a = t - d$ とおけば $\Delta = (2s - t)^2$ となる．共役な選択を同一視すると選択数は $2^{\omega(d)-1}$ であり，これが異なる a の個数に一致する． □

例えば $a = 1, d = 7$ では

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$$

である．また $d = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ のときは，次の 4 個の a が対応する．

$$46x^2 + 1775x + 3504 = (2x + 73)(23x + 48),$$
$$111x^2 + 1840x + 3569 = (3x + 43)(37x + 83),$$
$$232x^2 + 1961x + 3690 = (8x + 45)(29x + 82),$$
$$255x^2 + 1984x + 3713 = (15x + 47)(17x + 79).$$

5.2　3 次式の場合

3 次式が可約ならば 1 次因子をもつ．互いに素な整数 u, v を用いてその 1 次因子を $ux + v$ と書くと，

$$g = \gcd\bigl(v^3 - uv^2 + u^2v - u^3,\ u(v^2 - 2uv + 3u^2)\bigr) = \begin{cases} 2, & u, v \text{ がともに奇数}, \\ 1, & u, v \text{ の偶奇が異なる} \end{cases}$$

として

$$ga = u(v^2 - 2uv + 3u^2), \qquad gd = v^3 - uv^2 + u^2v - u^3 \tag{9}$$

を得る．この表示は可約例の探索に利用できるが，2 次の場合のような d の素因数による完全分類はまだ得られていない．固定した d に対し，可約となる a の個数を

$$N_m(d) = \#\{a \in \mathbb{Z}_{>0} : \gcd(a, d) = 1,\ A_m(x) \text{ が可約}\}$$

とおく．現在までに $N_3(d) = 4$ となる d が 35 例見つかっている．探索範囲で最小のものは

$$d = 235855985 = 5 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 97 \cdot 409$$

であり，対応する因数分解は次の通りである．

$$\begin{aligned}
A_3(x) &= (292x + 701)(337809x^2 + 334562x + 1150083) && (a = 98640228), \\
A_3(x) &= (649x + 854)(884427x^2 + 84050x + 1500657) && (a = 573993123), \\
A_3(x) &= (2002x + 2031)(8016849x^2 + 1682x + 8250763) && (a = 16049731698), \\
A_3(x) &= (4854x + 4859)(47122657x^2 + 50x + 47219787) && (a = 228733377078).
\end{aligned}$$

これらの d には，素因数がほぼ $4n + 1$ 型で，相異なる素因数の個数が 5 から 12 個という傾向がある．ただし，平方因子をもつ例や $4n + 1$ 型でない素因数を含む例もあり，合同条件だけでは説明できない．$N_3(d) \geq 5$ の例は現在まで見つかっていない．

5.3　4 次式の場合

定理 5.2. $a \geq d$ とする．4 次式

$$A_4(x) = ax^4 + (a + d)x^3 + (a + 2d)x^2 + (a + 3d)x + a + 4d$$

は，$\mathbb{Q}[x]$ において *2* 次式どうしの積に分解されない．

証明の概略．$t = d/a$ とし，

$$A_4(x) = a(x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$$

と仮定して係数を比較すると

$$p + r = 1 + t, \quad pr + q + s = 1 + 2t, \quad ps + qr = 1 + 3t, \quad qs = 1 + 4t$$

を得る．p, q, r, s を順次消去すると，楕円曲線

$$y^2 = x^3 - 100x^2 + 2000x \tag{10}$$

上に非自明な有理点が存在しなくてはならない．しかし (10) は LMFDB label 200.d2 の曲線であり，階数は 0，アフィン有理点は $(0, 0)$ のみである [4]．変数変換を逆にたどると $(0, 0)$ はもとの因数分解に対応しないため，矛盾する． □

したがって，$A_4(x)$ が有理数の零点をもたなければ既約である．計算上，固定した d に対して 2 個の a が対応する例，すなわち $N_4(d) = 2$ となる例が 58 個見つかっている．今見つかっている d はすべて $5n + 1$ 型の素因数をもち，相異なる素因数の個数は 4 から 8 個である．

6　今後の課題

これまでの考察から, 以下の予想が示唆される.

予想 6.1 (線形因子予想)**.** 等差数列係数多項式 $A_m(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上可約であることと，$A_m(x)$ が有理数の零点をもつことは同値である.

この予想は $m = 2, 3$ では自明であり，$m = 4$ では定理 5.2 によって従う．$m \geq 5$ についても，現在までに見つかっている可約例はすべて 1 次因子をもつが，一般の証明は今のところ方針さえ見当たらない.

予想 6.2 (多重度予想)**.** 固定した d に対する可約な a の個数について

$$N_3(d) \leq 4, \qquad N_4(d) \leq 2$$

が成り立ち，$m \geq 5$ では $N_m(d) \leq 1$ である.

3 次式の場合は, d が奇数のとき

$$\frac{2d}{r} - r^2$$

が平方数となる d の約数 r の個数だけ, 多項式を可約にする a が存在するが, この個数を完全に決定することは非常に難しい. 実際に見つかっている d の素因数は $4n + 1$ 型のものが多いが, これはガウス整数環のノルムと関連性があると考えられる. 5 次以上の場合に, 複数の a が対応する d は今のところ見つかっていない.

もう一つの方向は，係数列そのものを取り換えることである．線形回帰数列の中でも, その特性多項式の根に Pisot 数が含まれるケースには, Fibonacci 数列と同じような既約判定法が適用できると考えられる. 少なくとも, 2 次の Pisot 数に対応する数列においては, 同様に判定法を適用できた. 3 次以上の場合も, 共役がすべて実数のケースだとうまくいきそうだと見込まれる.

A　$N_3(d) = 4$ となる既知の d

以下はいままでの探索で得られた 35 例である．まれに平方因子や, $4n + 1$ 型ではない素因数も含まれる．この表に現れる数の範囲にも漏れがある可能性がある．一年前ほどから chatGPT とやり取りを行って発見した. ちなみに, 昨年の段階では最小例を発見するのにもかなり時間がかかったが, モデルアップデートのたびに探索方法が洗練されていった. 時間さえかければさらの例が見つかると思われる.

d	素因数分解
235855985	$5 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 97 \cdot 409$
317138485	$5 \cdot 17^2 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 101$
608900305	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 281$
78155753845	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 181$
103114048505	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 53 \cdot 109 \cdot 557$
513409896805	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 73 \cdot 101$
922886066050	$2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 277 \cdot 281$
2795067674645	$5 \cdot 37 \cdot 113 \cdot 197 \cdot 317 \cdot 2141$
9356795484205	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 313 \cdot 373$
11000341476545	$5 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 101 \cdot 109 \cdot 293 \cdot 757$
34340258846335	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 89 \cdot 101$
45914143380010	$2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 509 \cdot 1321$
52493570490985	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 349 \cdot 1693$
92146927853345	$5 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 61 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 149 \cdot 389$
94570576918025	$5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 109 \cdot 1697$
108807872328805	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 181$
130887476205485	$5 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 229 \cdot 317 \cdot 373$
132418899769675	$5^2 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 349 \cdot 457$
181701574631725	$5^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 137 \cdot 373$
231739634902945	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 89 \cdot 613$
1475245717347065	$5 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 349 \cdot 733 \cdot 1193$
2386922150277769	$13 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 89 \cdot 733 \cdot 1249$
2927704250967665	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 113 \cdot 937 \cdot 23321$
8517622987643405	$5 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 401 \cdot 509$

d	素因数分解
26896002884386285	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 97 \cdot 1009 \cdot 5653$
375985830095630105	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 53 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 157 \cdot 233 \cdot 701$
485135575377991915	$5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 233 \cdot 257 \cdot 409$
1790854188412392545	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 193 \cdot 2153 \cdot 88657$
2082980961661960165	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 601 \cdot 3257 \cdot 14713$
2675383724992756765	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 53 \cdot 97 \cdot 229 \cdot 317 \cdot 349 \cdot 641$
7793644783568258425	$5^2 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 233 \cdot 317 \cdot 797$
8432658021945361945	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 101 \cdot 193 \cdot 457 \cdot 9137$
9884820005405374315	$5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 137 \cdot 157 \cdot 193$
19489651816662875965	$5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 101 \cdot 241 \cdot 257 \cdot 337$
27518372784700795985	$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 193 \cdot 257 \cdot 349 \cdot 617$

B $N_4(d) = 2$ となる既知の d

以下は今までの探索で得られた 58 例である．まれに平方因子や立方因子が含まれる．素因数はすべて $5n+1$ 型である．探索方法は 3 次のケースと同様に行った．

d	素因数分解
19799131	$11 \cdot 71 \cdot 101 \cdot 251$
548871961	$11 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 281$
6696640621	$11 \cdot 271 \cdot 691 \cdot 3251$
9898405121	$11^2 \cdot 31 \cdot 281 \cdot 9391$
16108209601	$11 \cdot 41 \cdot 701 \cdot 50951$
21903898381	$71 \cdot 101 \cdot 491 \cdot 6221$
61291509301	$11 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 271 \cdot 8221$
75341034791	$11 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 181 \cdot 20011$
90121621381	$11 \cdot 71 \cdot 101 \cdot 601 \cdot 1901$
100056182281	$11 \cdot 131 \cdot 2971 \cdot 23371$
102862856801	$31 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 211 \cdot 3631$
1281804674491	$11 \cdot 101 \cdot 26431 \cdot 43651$
2283295983991	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 211 \cdot 774001$
2883152606521	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 151 \cdot 251 \cdot 5441$
3231925987961	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 191 \cdot 661 \cdot 1831$
3277337012321	$41 \cdot 251 \cdot 431 \cdot 631 \cdot 1171$
9832037469991	$11 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 211 \cdot 521 \cdot 3251$
14364853057621	$11 \cdot 71 \cdot 211 \cdot 271 \cdot 321661$
267702737931541	$11 \cdot 41 \cdot 401 \cdot 461 \cdot 821 \cdot 3911$
273850808140261	$11^2 \cdot 41 \cdot 241 \cdot 3761 \cdot 60901$
284900156794231	$11 \cdot 941 \cdot 12841 \cdot 2143441$
361429907420461	$11 \cdot 41 \cdot 241 \cdot 1381 \cdot 2407891$
1048374820649321	$11 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 1471 \cdot 3181 \cdot 10771$
1284389427017191	$11 \cdot 61 \cdot 661 \cdot 13841 \cdot 209221$
1443691274295941	$11^3 \cdot 31^2 \cdot 41 \cdot 1531 \cdot 17981$
1918078014749501	$11 \cdot 71 \cdot 701 \cdot 1021 \cdot 3431401$
2349121353838501	$11^2 \cdot 331 \cdot 751 \cdot 78100201$
2418930395417701	$11 \cdot 41 \cdot 631 \cdot 661 \cdot 3061 \cdot 4201$
3451691829446701	$41 \cdot 71 \cdot 311 \cdot 1171 \cdot 1201 \cdot 2711$
3451694651422501	$11 \cdot 61 \cdot 561091 \cdot 9168041$
5709673357262941	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 101 \cdot 181 \cdot 366221$
7394650908967201	$11^2 \cdot 181 \cdot 521 \cdot 701 \cdot 751 \cdot 1231$
7987984630690801	$11 \cdot 31 \cdot 151 \cdot 1451 \cdot 2551 \cdot 41911$
8879053718217661	$11 \cdot 241 \cdot 1721 \cdot 25121 \cdot 77471$
14130220459444001	$11 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 461 \cdot 13001 \cdot 113341$
19624172374135681	$11 \cdot 71 \cdot 101 \cdot 9491 \cdot 26212411$
27193132427777921	$11 \cdot 601 \cdot 8101 \cdot 8171 \cdot 62141$
64794803569649681	$11 \cdot 61 \cdot 461 \cdot 1291 \cdot 3541 \cdot 45821$

d	素因数分解
64836007891402201	$41 \cdot 101 \cdot 211 \cdot 241 \cdot 4391 \cdot 70121$
69245153736206701	$11 \cdot 71 \cdot 101 \cdot 10891 \cdot 80602631$
70873472991072631	$11 \cdot 251 \cdot 461 \cdot 2851 \cdot 19530761$
95010021372840601	$71 \cdot 191 \cdot 5861 \cdot 17011 \cdot 70271$
108810751717419961	$11 \cdot 31 \cdot 491 \cdot 571 \cdot 4651 \cdot 244711$
125503993946940961	$11 \cdot 41 \cdot 101 \cdot 151 \cdot 2251 \cdot 8106011$
166036198883299481	$11 \cdot 61 \cdot 191 \cdot 128951 \cdot 10046671$
196749939307462321	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 2551 \cdot 3041 \cdot 1814051$
268696103801285161	$101 \cdot 181 \cdot 491 \cdot 941 \cdot 4001 \cdot 7951$
476752745910727861	$31 \cdot 131 \cdot 751 \cdot 1051 \cdot 3251 \cdot 45751$
619450313182226321	$31 \cdot 131 \cdot 271 \cdot 941 \cdot 598156151$
749823712663962841	$31 \cdot 101 \cdot 131 \cdot 211 \cdot 241 \cdot 3631 \cdot 9901$
755888507600269241	$11 \cdot 41 \cdot 191 \cdot 401 \cdot 661 \cdot 33105641$
843804297534336121	$61 \cdot 1321 \cdot 267581 \cdot 39133961$
1060693166021021401	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 241 \cdot 281 \cdot 13121 \cdot 85381$
1066864075803473761	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 241 \cdot 881 \cdot 2111 \cdot 2791$
1398794110879255981	$11 \cdot 211 \cdot 1181 \cdot 2521 \cdot 4021 \cdot 50341$
1591784501001073621	$11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 331 \cdot 1571 \cdot 218948441$
1612381056002455321	$11 \cdot 41 \cdot 71 \cdot 23831 \cdot 25951 \cdot 81421$
1892236400924848561	$11 \cdot 211 \cdot 2011 \cdot 19861 \cdot 20412071$

References

[1] H. Kakuma, The location of zeros and irreducibility of Fibonacci-coefficient polynomials, *Fibonacci Quart.* **63** (2025), 570–587.

[2] H. Kakuma, Irreducibility of polynomials with coefficients in a positive arithmetic progression, *Integers* **26** (2026), A92.

[3] A. Borisov, M. Filaseta, T. Y. Lam, and O. Trifonov, Classes of polynomials having only one non-cyclotomic irreducible factor, *Acta Arith.* **90(2)** (1999), 121–153.

[4] LMFDB Collaboration, Elliptic curve with LMFDB label 200.d2 (Cremona label 200d1) [Internet], 2025, `https://www.lmfdb.org/EllipticCurve/Q/200/d/2` (cited 2025 Oct 21).

Schur の q-Fibonacci 数列, Rogers–Ramanujan 連分数, little μ 函数 *

渋川元樹 *（北見工業大学）

概要

Fibonacci 数を二階線型常差分方程式の初期値問題の基本解として捉え直し, その q 類似である Schur の q-Fibonacci 数列を用いて q-Fibonacci 方程式の初期値問題の解を構成する. 併せて黄金比の逆数の q 類似である Rogers–Ramanujan 連分数 $R(q)$ のモジュラー性と二次関係式を復習する. さらに little μ 函数の特殊化により q-Fibonacci 方程式の別の基本解系を構成し, Schur の q-Fibonacci 数列および $R(q)$ の二次関係式と関連するいくつかの恒等式を述べる.

1 Introduction

斉次型の定数係数二階線型常差分方程式

$$y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 0 \tag{1}$$

を考える. Fibonacci 数はこの差分方程式 (1) の初期値

$$F_0 := 0, \qquad F_1 := 1$$

の基本解である.

初期値 $S_0 := 0$, $S_1 := 1$ および $T_{-1} := 1$, $T_0 := 0$ で (1) を満たす数列を $\{S_n\}_n$, $\{T_{n-1}\}_n$ と書くと,

$$S_n = T_n = \sum_{0 \le 2j \le n-1} \binom{n-j-1}{j} = F_n \qquad (n \ge 1)$$

である. 一般の初期値 y_0, y_1 に対する (初期値問題の) 解は, 解の一意性から

$$y_n = y_0\, T_{n-1} + y_1\, S_n \tag{2}$$

と書ける. 実際, (2) の右辺は初期値 y_0, y_1 を再現し, かつ (1) と同じ漸化式を満たすことが確かめられる.

* 土見怜史 (近畿大学) との共同研究に基づく.

この (2) は強力である. たとえば Fibonacci 数の加法公式

$$F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$$

は (2) から直ちに従う. Lucas 数 $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n - L_{n-1} - L_{n-2} = 0$ についても同様で,

$$L_{m+n} = L_m F_{n-1} + L_{m+1} F_n$$

となり, $m = 0$ とすることで Fibonacci 数による Lucas 数の表示

$$L_n = L_0 F_{n-1} + L_1 F_n = 2F_{n-1} + F_n$$

も得られる.

二階線型常差分方程式 (1) の解が (2) と書けることはわかるが, 二つの解 $y_n = y_0 T_{n-1} + y_1 S_n$, $z_n = z_0 T_{n-1} + z_1 S_n$ があった時の ($\mathbb{C}$ 上の) 線型独立性についても容易にわかる. すなわち, y_n と z_n の Wronskian は

$$\det \begin{pmatrix} y_n & z_n \\ y_{n-1} & z_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}(y_1 z_0 - z_1 y_0)$$

であり, これが非零であることと y_n, z_n の線型独立性は同値である.

次いで黄金比についてである. 通常黄金比は差分方程式 (1) の特性多項式

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = \left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = (\lambda - \varphi)\left(\lambda + \varphi^{-1}\right)$$

の絶対値が大きい方の特性根

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

として定義される. しかし黄金比の q 類似を定義する時との兼ね合いから, 黄金比 φ そのものではなくその逆数 R を (1) の初期値 $(0,1)$, $(1,0)$ の基本解 T_{n-1}, S_n の比 (連分数) の極限

$$R := \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_{n-1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi^{-1}$$

により定義する. この R は二次関係式

$$\frac{1}{R} - R = 1 \tag{3}$$

を満たす.

本稿の目的は, これらの Fibonacci 数についての諸結果の q 類似と little μ 函数の特殊化との関係を述べることである. すなわち定数係数二階線型常差分方程式 (1) の変数係数かつ 1 パラメータ変形された最もやさしい差分方程式として

$$y_n(q) - y_{n-1}(q) - q^{n-2} y_{n-2}(q) = 0 \tag{4}$$

を考える. この (4) は $q \to 1$ で (1) に戻るので, 以下 (4) を q-Fibonacci 方程式と呼ぶ. ここで n の変数係数 q^{n-2} を y_{n-2} ではなく y_{n-1} や y_n に付けた方程式も考えられるが, 従属変数の変換で互いに移り合うので, (4) を考えれば本質的に十分である.

この q-Fibonacci 方程式 (4) について, Schur の q-Fibonacci 数列を基本解として初期値問題を解く. さらに little μ 函数の特殊化により (4) の別の基本解を構成し, Schur の q-Fibonacci 数列や 黄金比の逆数 R の q 類似である Rogers–Ramanujan 連分数 $R(q)$ と関連するいくつかの恒等式を述べる.

2 q-Fibonacci 方程式と Schur の q-Fibonacci 数

Schur の q-Fibonacci 数列を

$$S_n(q) := \sum_{0\le 2j\le n-1} q^{j^2} \binom{n-j-1}{j}_q, \quad S_0(q) = 0,$$
$$T_n(q) := \sum_{0\le 2j\le n-1} q^{j^2+j} \binom{n-j-1}{j}_q, \quad T_{-1}(q) = 1, \quad T_0(q) = 0$$

とする. ここで $\binom{\cdot}{\cdot}_q$ は q 二項係数

$$\binom{n}{k}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}, \qquad [k]_q! := \prod_{j=1}^{k} [j]_q, \qquad [j]_q := \frac{1-q^j}{1-q}$$

である. これらは一般には $S_n(q) \neq T_n(q)$ だが

$$\lim_{q\to 1} S_n(q) = \lim_{q\to 1} T_n(q) = F_n \qquad (n \ge 1)$$

を満たす Fibonacci 数の q 類似である.

数列 $\{S_n(q)\}_{n\ge 0}$ は (4) の初期値 $(y_0, y_1) = (0, 1)$ の解であり, $\{T_{n-1}(q)\}_{n\ge 0}$ は (4) の初期値 $(y_0, y_1) = (1, 0)$ の解である [11, 2, 1]. よって初期値 $y_0(q)$, $y_1(q)$ に対する (4) の解は, Fibonacci の場合と全く同様の議論から

$$y_n(q) = y_0(q)\, T_{n-1}(q) + y_1(q)\, S_n(q) \tag{5}$$

であることがわかる.

また二つの解 $y_n(q)$, $z_n(q)$ を (5) の形に書くと, Wronskian は

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} y_n(q) & z_n(q) \\ y_{n-1}(q) & z_{n-1}(q) \end{pmatrix} &= -q^{n-2} \det \begin{pmatrix} y_{n-1}(q) & z_{n-1}(q) \\ y_{n-2}(q) & z_{n-2}(q) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \big(y_1(q) z_0(q) - z_1(q) y_0(q) \big) \end{aligned}$$

となる.

Remark 2.1. $S_n(q)$ と $T_n(q)$ が Fibonacci 数の q 類似であるとき, Lucas 数の q 類似をどのように定義するのが自然かはそれ自体興味深い問題である.

3 Rogers–Ramanujan 連分数

黄金比の逆数 R の q 類似として Rogers–Ramanujan 連分数

$$R(q) := q^{\frac{1}{5}} \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cdots}}} =: r(\tau) \qquad (q := e^{2\pi i\tau},\ \ i := \sqrt{-1})$$

を考える. Rogers–Ramanujan 恒等式により

$$R(q) = q^{\frac{1}{5}} \lim_{n\to\infty} \frac{T_{n-1}(q)}{S_n(q)} = q^{\frac{1}{5}} \frac{H(q)}{G(q)} = q^{\frac{1}{5}} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q^{5j+1})(1-q^{5j+4})}{(1-q^{5j+2})(1-q^{5j+3})}$$

が成り立つ. ただし, $G(q)$ と $H(q)$ は Rogers–Ramanujan 級数

$$G(q) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \qquad H(q) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(q;q)_j} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty},$$

$$(q;q)_j := \frac{(q;q)_\infty}{(q^{j+1};q)_\infty}, \qquad (a;q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n), \qquad (a,b;q)_\infty := (a;q)_\infty (b;q)_\infty$$

である. これらの級数 $G(q)$ と $H(q)$ が上述の無限積で書けるというのが有名な Rogers–Ramanujan 恒等式である [10, 11, 8].

ここで $R(q)$ のモジュラー性に関連する註を述べておく. 単純な R の q 類似としては前因子 $q^{\frac{1}{5}}$ は不要に見える. しかし重さ $\frac{1}{2}$ の モジュラー形式である Dedekind の η 函数

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}(q;q)_\infty$$

における $q^{\frac{1}{24}}$ と同様, $q^{\frac{1}{5}}$ があることで $r(\tau)$ はレベル 5 のモジュラー函数（重さ 0）になる. それゆえ Rogers–Ramanujan 連分数 $R(q) = r(\tau)$ は古くからいくつもの興味深い研究がされてきた.

たとえば Klein [6] は, Rogers–Ramanujan 連分数 $R(q)$ とは独立に, 正二十面体方程式

$$\big(r^{20} - 228r^{15} + 494r^{10} + 228r^5 + 1\big)^3 + j\, r^5\big(r^{10} + 11r^5 - 1\big)^5 = 0 \tag{6}$$

の解として $r(\tau)$ を Jacobi のテータ函数の比で導入し,

$$r\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big) = r(\tau), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(5) := \{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv I_2 \pmod 5\}$$

であることを述べている. つまり楕円モジュラー函数 $j(\tau)$ を (6) の係数 j に取ると $r(\tau)$ はその解となり, 体拡大 $\mathbb{Q}(r(\tau))/\mathbb{Q}(j(\tau))$ は Galois で

$$\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(r(\tau))/\mathbb{Q}(j(\tau))\big) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(5) \simeq A_5$$

となる. これは有名な『正二十面体と五次方程式』の主要なテーマの一つである.

また Ramanujan が Hardy への最初の手紙に記した有名な (Hardy が圧倒された) 公式

$$r(i) = e^{-\frac{2\pi}{5}} \cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cdots}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{7}$$

もモジュラー性に関する公式である [8, 15, 3]. 実際, $r(\tau)$ に関する $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})(r(\tau))$ 上のモジュラー変換公式

$$r(\tau+1) = e^{\frac{2\pi i}{5}} r(\tau), \tag{8}$$

$$r\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) = \frac{-(1+\sqrt{5})r(\tau)+2}{2r(\tau)+1+\sqrt{5}}, \tag{9}$$

特に $r(-1/\tau)$ の変換公式 (9), もしくはそれと同値な

$$\Big(r(\tau)+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(r\Big(-\frac{1}{\tau}\Big)+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

で $\tau = i$ とすると, 2 次方程式

$$r(i)^2 + \Big(1+\sqrt{5}\Big)\, r(i) - 1 = \left(r(i) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(r(i) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) = 0$$

が得られる. 定義より $0 < r(i) < 1$ ゆえこの 2 次方程式を解いて (7) がわかる.

更に R の二次関係式 (3) の類似である二次関係式

$$\frac{1}{R(q)} - R(q) - \frac{\eta(\tau/5)}{\eta(5\tau)} = 1 \tag{10}$$

が成り立つ [14]. 実際 η 函数の変換公式

$$\eta\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau)$$

から

$$\frac{\eta(\tau/5)}{\eta(5\tau)} = \frac{\sqrt{5\tau/i}}{\sqrt{\tau/5i}}\frac{\eta(-5/\tau)}{\eta(-1/5\tau)} = 5\frac{\eta(-5/\tau)}{\eta(-1/5\tau)} = 5e^{-\frac{2\pi i}{5\tau}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{-5\frac{2\pi i}{\tau}m}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{5\tau}m}} \tag{11}$$

ゆえ,

$$\lim_{\tau\to i0} \frac{\eta(\tau/5)}{\eta(5\tau)} \to 0 \quad (\tau \to i0)$$

が成り立つので, $q \to 1$ すなわち $\tau \to i0$ で (10) は (3) に戻る.

Remark 3.1. 二次関係式 (10) からモジュラー変換 (9) を導出できる. 実際, (10) を仮定すると (11) より

$$\Big(\frac{1}{r(\tau)}-r(\tau)-1\Big)\Big(\frac{1}{r(-1/\tau)}-r(-1/\tau)-1\Big)=\frac{\eta(\tau/5)}{\eta(5\tau)}\frac{\eta(-1/5\tau)}{\eta(-5/\tau)}=5$$

が得られる. これを $0<|r(\tau)|<1$ と (8) に注意して $r(\tau)$ の二次方程式と思って解くことで (9) を得る.

逆に $r(\tau)$ が $\Gamma(5)$ の Hauptmodul ($\Gamma(5)$ のモジュラー函数全体のなす函数体は種数 0 の有理函数体に同型であることに注意) ゆえ, モジュラー変換 (9) から二次関係式 (10) も導出できる.

4 q-Fibonacci 方程式の別の基本解

次の二つの函数はいずれも q-Fibonacci 方程式 (4) の解である [4, 5, 13].

Theorem 4.1.

$$f_n(q):=(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\ {}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\0\end{matrix};q,q^{n+1}\right)=(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{j^2}}{(q;q)_j}q^{nj}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}M_n(x;q)&:=\frac{1}{(x,q;q)_\infty\,\theta(q^n/x)}\ {}_1\psi_2\left(\begin{matrix}x\\0,0\end{matrix};q,xq^{1-n}\right)\\&=\frac{1}{(x,q;q)_\infty\theta(q^n/x)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}(x;q)_j\left(\frac{x}{q^n}\right)^j\end{aligned} \tag{13}$$

は (4) を満たす. ここで $\theta(X):=(X,q/X;q)_\infty$ である.

$n=0,1$ では

$$f_0(q)=G(q),\qquad f_1(q)=-H(q)$$

となるので, $f_n(q)$ は Rogers–Ramanujan 級数の一般化であり, 初期値問題の表示 (5) から

$$f_n(q)=G(q)\,T_{n-1}(q)-H(q)\,S_n(q)$$

が従う [4].

他方 $M_n(x;q)$ については対称性

$$M_n(x^{-1};q)=M_n(xq;q)=M_n(x;q)$$

が成り立つ. つまり $M_n(x;q)$ は q-Fibonacci 方程式 (4) の x に関する (正確には $x=e^{2\pi iz}$ の z に関する) even な楕円函数解である. 更に Very-Well-Poised 型の和の表示公式

$$M_n(x;q)=\frac{1}{(x,q^{1-n}/x;q)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(1-x^2q^{2j-n-1})\frac{(x;q)_j}{(xq^{-n};q)_j}q^{\frac{j(5j-7)}{2}}(-x^3q^{-n})^j$$

も持つ. これより特に Jacobi の三重積公式

$$(q;q)_\infty\theta(X)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{\frac{j(j-1)}{2}}(-X)^j$$

と併せて

$$M_1\left(q^{\frac15};q\right)=G(q)H(q)\left(\frac{\theta(q^2;q^5)}{\theta\left(q^{\frac15}\right)\theta\left(q^{\frac25}\right)}+\frac{\theta(q^5;q^5)}{\theta\left(q^{\frac65}\right)\theta\left(q^{\frac75}\right)}\right)=\frac{(q)_\infty}{\left(q^{\frac15};q^{\frac15}\right)_\infty}G(q), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}M_0\left(q^{\frac15};q\right)&=G(q)H(q)\left(\frac{\theta(q^3;q^5)}{\theta\left(q^{\frac65}\right)\theta\left(q^{\frac25}\right)}+\frac{\theta(q^8;q^5)}{\theta\left(q^{\frac15}\right)\theta\left(q^{\frac75}\right)}\right)\\&=-\frac{(q)_\infty}{\left(q^{\frac15};q^{\frac15}\right)_\infty}\left(q^{\frac15}G(q)+q^{\frac25}H(q)\right)\end{aligned} \tag{15}$$

が得られる. 非負整数 n に対しては再び (5) により

$$M_n(x;q)=M_0(x;q)\,T_{n-1}(q)+M_1(x;q)\,S_n(q)$$

となる.

これらの基本解 $f_n(q)$, $M_m(x;q)$ の Wronskian を計算すると, q-Fibonacci 数列 $T_{n-1}(q)$, $S_m(q)$ と Rogers–Ramanujan 連分数 $R(q)$ が現れる.

Theorem 4.2 ([13])**.** 非負整数 m,n に対し

$$f_n(q)M_m(x;q)-f_m(q)M_n(x;q)=T_{n-1}(q)S_m(q)-T_{m-1}(q)S_n(q). \tag{16}$$

特に $m=n+1$ のとき

$${}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\0\end{matrix};q,q^{n+1}\right)M_{n+1}(x;q)+q^n\ {}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\0\end{matrix};q,q^{n+2}\right)M_n(x;q)=1. \tag{17}$$

さらに $n=0$ のとき

$$G(q)M_1(x;q)+H(q)M_0(x;q)=\frac{1}{R(q)}-R(q)-\frac{\eta(\tau/5)}{\eta(5\tau)}=1 \tag{18}$$

が成り立つ. 右辺はいずれも x に依らない.

(16) は (17) の, (17) は (18) のそれぞれ一般化だが, 実は (16) を証明するのに (18) が必要になる. つまり (16), (17), (18) は互いに同値である. そこで (18) の証明のみ簡単に言及する.

まず函数論を用いて $G(q)M_1(x;q)+H(q)M_0(x;q)$ が x に依らない定数であることを示す. 次いで $x=q^{\frac15}$ を代入し, (14) と (15) を用いると

$$\begin{aligned}G(q)M_1(x;q)+H(q)M_0(x;q)&=G(q)M_1(q^{\frac15};q)+H(q)M_0(q^{\frac15};q)\\&=\frac{(q)_\infty}{(q^{\frac15};q^{\frac15})_\infty}\left(G(q)^2-q^{\frac15}G(q)H(q)-q^{\frac25}H(q)^2\right)\\&=\frac{\eta(5\tau)}{\eta(\tau/5)}\Big(\frac{1}{R(q)}-1-R(q)\Big).\end{aligned}$$

最後に $R(q)$ の二次関係式 (10) より (18) を得る.

little μ 函数 (の特殊化) の Wronskian から, Rogers–Ramanujan 連分数 $R(q)$ とその二次関係式 (10) が現れたことは興味深いと思う.

5 little μ 函数との関係

以上の $M_n(x;q)$ は, Ramanujan 方程式

$$f(q^2x) - f(qx) - qxy\, f(x) = 0 \tag{19}$$

の基本解である little μ 函数の特殊化として現れる [13]. little μ 函数は (一般化) μ 函数 [12] の退化極限として導入され, (19) の発散解の q-Borel 総和としても得られる.

Definition 5.1. $x, y \notin q^{\mathbb{Z}}$ に対し

$$l\widehat{\mu}(x,y) := iq^{-\frac{1}{8}} \frac{1}{(x,q;q)_\infty\, \theta(qy)}\ {}_1\psi_2\left(\begin{matrix} x \\ 0, 0 \end{matrix}; q, \frac{1}{y}\right)$$

と定める.

これは対称性

$$l\widehat{\mu}(x,y) = l\widehat{\mu}(x/q, qy) = l\widehat{\mu}(y,x)$$

および複数の両側超幾何表示を持つ. Ramanujan 方程式 (19) において $y = q^{n-3}/x$ とおくと

$$f(q^2x) - f(qx) - q^{n-2} f(x) = 0$$

となるので,

$$M_n(x;q) := -iq^{\frac{1}{8}}\, l\widehat{\mu}(x, q^{n-1}/x)$$

とおけば $M_n(x;q)$ は q-Fibonacci 方程式 (4) の解になる. 実際

$$\begin{aligned}
&M_n(x;q) - M_{n-1}(x;q) - q^{n-2} M_{n-2}(x;q) \\
&= -iq^{\frac{1}{8}} \left(l\widehat{\mu}(x, q^{n-1}/x) - l\widehat{\mu}(x, q^{n-2}/x) - q^{n-2} l\widehat{\mu}(x, q^{n-3}/x) \right) \\
&= -iq^{\frac{1}{8}} \left(l\widehat{\mu}(q^2x, q^{n-3}/x) - l\widehat{\mu}(qx, q^{n-3}/x) - q^{n-2} l\widehat{\mu}(x, q^{n-3}/x) \right) = 0
\end{aligned}$$

である.

little μ 函数自身についても接続公式が成り立ち, Wronskian が明示的に計算できる. 例えば

$$\begin{aligned}
l\widehat{\mu}(x,y) &= \frac{\theta(x/c_1)\theta(c_1y)\theta(c_2y/x)\theta(c_2)}{\theta(x)\theta(y)\theta(c_1c_2y/x)\theta(c_2/c_1)} l\widehat{\mu}(x/c_1, yc_1) \\
&\quad + \frac{\theta(x/c_2)\theta(c_2y)\theta(c_1y/x)\theta(c_1)}{\theta(x)\theta(y)\theta(c_1c_2y/x)\theta(c_1/c_2)} l\widehat{\mu}(x/c_2, yc_2) \\
&= l\widehat{\mu}(x/c, yc) - \frac{iq^{-1/8}\, \theta(c)\, \theta(yc/x)}{\theta(qx)\, \theta(qy)\, \theta(c/x)\, \theta(cy)}\ {}_0\psi_1\left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}; q, q^2xy\right),
\end{aligned}$$

および

$$
\begin{aligned}
&l\widehat{\mu}(q^{n-1}x/c,yc)l\widehat{\mu}(q^{n}x,y)-l\widehat{\mu}(q^{n}x/c,yc)l\widehat{\mu}(q^{n-1}x,y)\\
&=(-xy)^{n}q^{\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{4}}\frac{\theta(c)\theta(cy/x)}{\theta(c/x)\theta(cy)\theta(x)\theta(y)},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
{}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\0\end{matrix};q,qxy\right)l\widehat{\mu}(x,y)+xy\ {}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\0\end{matrix};q,q^2xy\right)l\widehat{\mu}(x/q,y)=iq^{-\frac{1}{8}}
\tag{21}
$$

である.

Theorem 4.2 の $n=0$ の場合はこれらの特殊化である.

Remark 5.2. 二階線型 q 差分方程式のうち, 係数が高々 1 次多項式である Euler–Laplace 型

$$(a_1x+a_0)f(q^2x)+(b_1x+b_0)f(qx)+(c_1x+c_0)f(x)=0$$

を考える. この Euler–Laplace 型のある系列（q-Kummer, q-Hermite–Weber, Ramanujan）に関しては, 通常の Frobenius の方法では収束解が一つしか構成できない. もう一つの形式解は発散するため, 基本解の表示は長らく不明のままであった. 近年, q-Borel 総和法によりこれらの基本解が構成でき [9, 7], その中に μ 函数およびその系列の特殊函数 (big μ 函数, little μ 函数) が自然に現れる [12, 13]. q-Fibonacci 方程式は Ramanujan 方程式の特殊化としてこの系列に属する.

Acknowledgments

本研究は科研費（JSPS KAKENHI Grant Number 21K13808, 26K06837）の助成を受けたものである.

参考文献

[1] G. Andrews, Fibonacci numbers and the Rogers–Ramanujan identities, Fibonacci Quart. **42** (2004), no. 1, 3–19.

[2] L. Carlitz, Fibonacci notes. IV. q-Fibonacci polynomials, Fibonacci Quart. **13** (1975), 97–102.

[3] W. Duke, Continued fractions and modular functions, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), no. 2, 137–162.

[4] K. Garrett, M. E. H. Ismail and D. Stanton, Variants of the Rogers–Ramanujan identities, Adv. in Appl. Math. **23** (1999), no. 3, 274–299.

[5] M. E. H. Ismail and R. Zhang, q-Bessel functions and Rogers–Ramanujan type identities, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 9, 3633–3646.

[6] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, B.G. Teubner, 1884.

[7] Y. Ohyama, A unified approach to q-special functions of the Laplace type, arXiv:1103.5232.

[8] S. Ramanujan, *Notebooks* (2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[9] J.-P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang, Local analytic classification of q-difference equations, Astérisque **355** (2013).

[10] L. J. Rogers, Second memoir on the expansion of certain infinite products, Proc. London Math. Soc. **25** (1894), 318–343.

[11] I. Schur, Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Klasse (1917), 302–321.

[12] G. Shibukawa and S. Tsuchimi, A generalization of Zwegers' μ-function according to the q-Hermite–Weber difference equation, SIGMA **19** (2023), 014, 23 pages.

[13] G. Shibukawa and S. Tsuchimi, A degeneration of the generalized Zwegers' μ-function according to the Ramanujan difference equation, arXiv:2603.03693, 2026.

[14] G. N. Watson, Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on continued fractions, J. London Math. Soc. **4** (1929), 39–48.

[15] G. N. Watson, Theorems stated by Ramanujan (IX): Two continued fractions, J. London Math. Soc. **4** (1929), 231–237.

Genki Shibukawa
Kitami Institute of Technology
165 Koen-cho, Kitami, Hokkaido 090-8507, JAPAN
E-mail: g-shibukawa@mail.kitami-it.ac.jp

日本フィボナッチ協会　第２４回研究集会　2026.8.28　v.2

二項係数の和とリュカ数

Sums of Binomial Coefficients and Lucas Numbers

東京海洋大学名誉教授　中 村　滋

パスカルの三角形において二項係数を斜めに加えるとフィボナッチ数が現れることはよく知られている．今回は，あるパターンの二項係数の和にリュカ数が現れることを示したゴードンの論文（Russell A. Gordon ; Lucas Numbers and Sums of Binomial Coefficients ; The College Mathematics Journal, Vol.57,No.2, pp.118－126 ; 2026, March）を紹介する．

In this note, we introduce a recent paper by Russell A. Gordon, showing some relations between Lucas Numbers and Sums of Binomial Coefficients.

はじめに

二項係数の和およびフィボナッチ数・リュカ数については，長い間に多くの研究がなされてきた．中には常識のようになっているものもあれば，思いがけず円周率が現れたりするものもあって，多種多様である．このノートでは，あるパターンの二項係数の和にリュカ数が現れることを示したゴードンの面白い結果を紹介したい．フィボナッチ数とリュカ数については，本家のフィボナッチ協会が定めた記法を採用する：

（F）$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$; $F_1=1$, $F_2=1$.　　($F_0=0$)

（L）$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$; $L_1=1$, $L_2=3$.　　($L_0=2$)

はじめの数項は次のようになる．○で囲んだ数字は５番目ごとに振った番号である：

(f) 1, 1, 2, 3, ⑤**5**, 8, 13, 21, 34, ⑩**55**, 89, 144, 233, 377, ⑮**610**, 987, 1597, 2584, ･･･

(ℓ) 1, 3, 4, 7, ⑤11, 18, 29, 47, 76, ⑩123, 199, 322, 521, 843, ⑮1364, 2207, 3571,･･･.

また二項係数は次のように書く：

$\binom{n}{k}={}_nC_k=n!/\{(n-k)!\cdot k!\}$ （ただし，$k>n$ のとき $\binom{n}{k}=0$ とする）．

このとき，$F_n=\sum_{0\leqq k\leqq[(n-1)/2]}\binom{n-k-1}{k}$ （[ｘ] は最大整数関数）なのであった．

リュカ数が現れる二項係数の和

ここで紹介するのは，次の公式である（q は整数 ＞0）：･

$$5q\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5qn}{5qk}=2^{5qn}+2(-1)^n\cdot L_{5qn}.$$

例えば，q＝1 として，$5\cdot\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n}{5k}=2^{5n}+2(-1)^n\cdot L_{5n}$.

$n=1,2,3$ とすると，$5\cdot\{({}_5C_0)+({}_5C_5)\}=2^5-2\cdot 11=10$，$5\cdot\{({}_{10}C_0)+({}_{10}C_5)+({}_{10}C_{10})\}=2^{10}+2\cdot 123=1270$，$5\cdot\sum_{0\leqq k\leqq 3}({}_{15}C_{5k})=2^{15}-2\cdot L_{15}=32768-2\cdot 1364=30040$ となる．
公式の証明は数学的帰納法によって，簡単に確かめられるので省略する．これらの等式の元には次の一般公式もある（証明はチェビシェフ多項式を使うので省略）．

$$q\sum_{0\leqq k\leqq n}({}_{qn+t}C_{qk+r})=2^{qn+t}+\sum_{1\leqq k\leqq q}(-1)^{nk}\cos((t-2r)k\pi/q)\{2\cdot\cos(k\pi/q)\}^{qn}.$$

$\alpha=(1+\sqrt{5})/2$（黄金数），$\beta=-1/\alpha=(1-\sqrt{5})/2$ とおくと，$\alpha^2=\alpha+1$ であり，ドゥ・モアヴル=ビネの公式により，$F_n=(\alpha^n-\beta^n)/\sqrt{5}$，$L_n=\alpha^n+\beta^n$ である．また，$\theta=\pi/5$ とおくと，$5\theta=\pi$ より $\sin 2\theta=\sin 3\theta$．左辺$=2\sin\theta\cos\theta$ であり，右辺$=\sin(\theta+2\theta)=\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta=\sin\theta(\cos 2\theta+2\cos^2\theta)=\sin\theta(4\cos^2\theta-1)$．
$x=\cos\theta$ とおくと $\sin\theta>0$ なので $4x^2-2x-1=0$．ところで $x>0$ だから $x=\cos\theta=(1+\sqrt{5})/4=\alpha/2=-\cos 4\theta$．また，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\alpha^2/2-1=(\alpha+1)/2-1=(\alpha-1)/2=-\beta/2=-\cos 3\theta$ となる．

$q=5$，$t=r=0$ のときにこの一般公式を使って計算すると，

$$\begin{aligned}
&5\sum_{0\leqq k\leqq n}({}_{5n}C_{5k})=2^{5n}+\Sigma_{0\leqq k\leqq n}(-1)^{nk}\{2\cdot\cos(k\pi/5)\}^{5n}.\\
&=2^{5n}+(-1)^n(2\cdot\cos(\pi/5))^{5n}+(2\cdot\cos(2\pi/5))^{5n}+(-1)^n(2\cdot\cos(3\pi/5))^{5n}\\
&\quad+(2\cdot\cos(4\pi/5))^{5n}.\\
&=2^{5n}+(-1)^n\alpha^{5n}+(-\beta)^{5n}+(-1)^n\beta^{5n}+(-\alpha)^{5n}\\
&=2^{5n}+2\cdot(-1)^n(\alpha^{5n}+\beta^{5n})=2^{5n}+2(-1)^nL_{5n}
\end{aligned}$$

となって最初に書いた計算と一致する．$q=2$，3，4 のときには，

$$\begin{aligned}
&2\sum_{0\leqq k\leqq n}({}_{2n}C_{2k})=2^{2n}+(-1)^n\{2\cdot\cos(\pi/2)\}^{2n}=2^{2n}.\\
&3\sum_{0\leqq k\leqq n}({}_{3n}C_{3k})=2^{3n}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq 3}\cos(nk\pi)\cdot\cos^{3n}(k\pi/3)=2^{3n}+2\cdot(-1)^n.\\
&4\sum_{0\leqq k\leqq n}({}_{4n}C_{4k})=2^{4n}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq 4}\cos(nk\pi)\cdot\cos^{4n}(k\pi/4)=2^{4n}+(-1)^n\cdot 2^{2n+1}.
\end{aligned}$$

となる．$q=5$ のときには $\cos(\pi/5)=(1+\sqrt{5})/4=\alpha/2$ だったのでリュカ数が現れたことが分かる．

それでは，$s_n=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2k\pi/q)\}^n$（ $q=2p+1$ ）を計算するために式を変形する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos(k\pi/q)\}^n\\
&=\sum_{1\leqq k\leqq p\,;\,k:\text{odd}}\{-2\cdot\cos(k\pi/q)\}^n+\sum_{1\leqq k\leqq p\,;\,k:\text{even}}\{2\cdot\cos(k\pi/q)\}^n.
\end{aligned}$$

ここで，$\sum_{1\leqq k\leqq p\,;\,k:\text{odd}}\{-2\cdot\cos(k\pi/q)\}^n=\sum_{1\leqq k\leqq p\,;\,k:\text{odd}}\{2\cdot\cos((q-k)\pi/q)\}^n$
$=\sum_{p<k<q\,;\,k:\text{even}}\{2\cdot\cos(k\pi/q)\}^n$ だから，　↑(補角で符号逆転)
$\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos(k\pi/q)\}^n=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2k\pi/q)\}^n=s_n$　となる．
また、$s_n=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2k\pi/q)\}^n=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{-2\cdot\cos((q-2k)\pi/q)\}^n$
$=(-1)^n\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos((2k-1)\pi/q)\}^n$．よって，次式を得る．

$s_n=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2k\pi/q)\}^n$ ・・・・・（1）

$=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos(k\pi/q)\}^n$ ・・・・・（2）

$=(-1)^n\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos((2k-1)\pi/q)\}^n$ ・・・・・（3）

<u>定理 1</u> $\sum_{1\leqq k\leqq p}(-1)^k 2\cdot\cos((2n-1)k\pi/q)=2p$（ if $q|(2n-1)$ ），-1（ otherwise ）・・（＊）

$\sum_{1\leqq k\leqq p}2\cdot\cos(2nk\pi/q)=2p$（ if $q|n$ ），-1（ otherwise ） ・・・・・・・・（＊＊）

（証明）$2n-1=mq$ のとき，$\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos((2n-1)k\pi/q)\}$

$=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos(mk\pi)\}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot(-1)^{mk}\}=\sum_{1\leqq k\leqq p}2=2p,$

$n=mq$ のとき，$\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2nk\pi/q)\}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2mk\pi)\}=\sum_{1\leqq k\leqq p}2=2p,$

それ以外のとき，$r=-\exp((2n-1)\pi i/q)$（i は虚数単位）とおくと，$r\neq 1$，$r^q=-(-1)^q=1,$

$\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos((2n-1)k\pi/q)\}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(r^k+r^{-k})$

$=(r-r^{p+1})/(1-r)+(r^{-1}-r^{-p-1})/(1-r^{-1})=(r-r^{p+1})/(1-r)+(1-r^{-p})/(r-1)$

$=(r-r^{p+1})/(1-r)-(1-r^{-p})/(1-r)=-1-(r^{2p+1}-1)/r^p(1-r)$

$=-1-(r^q-1)/r^p(1-r)=-1.$

また，$r=-\exp(2n\pi i/q)$（i は虚数単位）とおくと，$r\neq 1$，$r^q=(-1)^q=-1,$

$\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2nk\pi/q)\}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(r^k+r^{-k})=\cdots(省略)\cdots=-1.$ □

これで，次の定理のように s_n が決まる．

<u>定理 2</u> $s_n=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2k\pi/q)\}^n$（ $q=2p+1$ ）とおくと，

$s_{2n}=(q/2)\cdot\binom{2n}{n}-2^{2n-1}$ （ for $0\leqq n<2p$ ），

$s_{2n+1}=-2^{2n}$ （ for $0\leqq n<p$ ），

$s_{2n+1}=q\cdot\binom{2n+1}{n-p}-2^{2n}$ （ for $p\leqq n\leqq 2p$ ）．

（証明）$s_0=p$，$s_1=-1$（定理１による）．

三角関数に関して，次の公式が成り立つ．

★ $2^{2n}\cos^{2n}x=\sum_{0\leqq j\leqq n-1}\binom{2n}{j}\cdot 2\cdot\cos((2n-2j)x\}+\binom{2n}{n},$

★ $2^{2n+1}\cos^{2n+1}x=\sum_{0\leqq j\leqq n}\binom{2n+1}{j}\cdot 2\cdot\cos((2n+1-2j)x\}.$

（★の証明）$2\cos x=\exp(xi)+\exp(-xi)$（i：虚数単位）の 2n 乗を二項展開して二項係数の対称性を使うと上の式．それに $2\cdot\cos x$ を掛けて 積和公式：$2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ を使い，最後に二項係数の公式：$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ を使うと後の式が得られる． □

（定理の証明）先ず $1\leqq n\leqq 2p$ とすると，$0\leqq j\leqq n-1$ なる j に対し，$1\leqq n-j\leqq n\leqq 2p$ だから当然 $n-j\neq mq$（m は整数）だから，定理１直前の式（２）によって，

$s_{2n}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos(k\pi/q)\}^{2n}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2^{2n}\cdot\cos^{2n}(k\pi/q)\}$

$=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{\sum_{0\leqq j\leqq n-1}\binom{2n}{j}\cdot 2\cdot\cos((2n-2j)k\pi/q)\}+\binom{2n}{n}\}$

$=\sum_{0\leqq j\leqq n-1}\binom{2n}{j}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos((2n-2j)k\pi/q)\}+p\binom{2n}{n}\}$

$=-\sum_{0\leqq j\leqq n-1}\binom{2n}{j}+((q-1)/2)\binom{2n}{n}$ （←定理１（＊＊））（↙二項係数の対称性）

$=-(1/2)\{\sum_{0\leqq j\leqq n-1}\binom{2n}{j}+\sum_{n+1\leqq j\leqq 2n}\binom{2n}{j}\}+(q/2)\binom{2n}{n}-(1/2)\binom{2n}{n}$

$=(q/2)\binom{2n}{n}-(1/2)\sum_{0\leqq j\leqq 2n}\binom{2n}{j}=(q/2)\binom{2n}{n}-2^{2n-1}$.

次に **2n+1 乗**の場合，**1≦n<p** とすると，1≦2n+1−2j<2p+1=q だから当然 2n+1−2j は（0≦j≦n なる限り）≠mq（m は整数）である．したがって定理１直前の式（２）より，

$s_{2n+1}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2\cdot\cos(k\pi/q)\}^{2n+1}$

$=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{(-1)^k 2^{2n+1}\cos^{2n+1}(k\pi/q)\}$

$=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{\sum_{0\leqq j\leqq n}\binom{2n+1}{j}\cdot(-1)^k 2\cdot\cos((2n+1-2j)k\pi/q)\}$

$=\sum_{0\leqq j\leqq n}\binom{2n+1}{j}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq p}(-1)^k 2\cdot\cos((2n+1-2j)k\pi/q)\}$

$=-\sum_{0\leqq j\leqq n}\binom{2n+1}{j}=-2^{2n}$.

最後に **2n+1 乗**の場合に，**p≦n≦2p** とすると，2n+1−2j は j=n−p のときに限って =2p+1=q となって q の奇数倍になる．よって定理１と，その直前の式（２）により，今と類似の推論（一部省略）によって，

$s_{2n+1}=\sum_{0\leqq j\leqq n}\binom{2n+1}{j}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq p}(-1)^k 2\cdot\cos((2n+1-2j)k\pi/q)\}$

$=\{-\sum_{0\leqq j\leqq n}\binom{2n+1}{j}+\binom{2n+1}{n-p}\}+2p\binom{2n+1}{n-p}$

$=\{-q\sum_{0\leqq j\leqq n}\binom{2n+1}{n-p}\}-2^{2n}=q\binom{2n+1}{n-p}-2^{2n}$. □

さて，（第２種の）チェビシェフ多項式：$U_n(x)=\sin\{(n+1)t\}/\sin t$（ただし $x=\cos t$）を変形した変形チェビシェフ多項式：$u_n(x)=U_n(x/2)$ は，三角関数の公式から，漸化式

$u_{n+2}(x)=x\,u_{n+1}(x)-u_n(x)$ ；$u_0(x)=1$，$u_1(x)=x$

を満たすので，最高次の係数＝1 の n 次多項式になる．また，具体的に書き表す式，**$u_n(x)=\sum_{0\leqq k\leqq[n/2]}(-1)^k\binom{n-k}{k}x^{n-2k}$** も知られている．q=2p+1 と $t_k=2k\pi/q$ (k：整数，1≦k≦p) を使って，**$R_p(x)=u_p(x)+u_{p-1}(x)$** の $x=\cos t_k$ における値を求めよう．

$R_p(\cos t_k)\cdot\sin t_k=\{u_p(\cos t_k)+u_{p-1}(\cos t_k)\}\cdot\sin t_k=\sin((p+1)t_k)+\sin((p t_k)$

$=2\sin(k\pi)\cdot\cos(k\pi/q)=0$ であり，1≦k≦p なる∀k に対して $0<t_k=2k\pi/q<\pi$ だから，$\sin t_k>0$ なので，$R_p(x)=u_p(\cos t_k)+u_{p-1}(\cos t_k)=0$ になる．そこで p 次多項式 $u_p(x)+u_{p-1}(x)$ のすべての零点は，$x=\cos(2k\pi/q)$ (1≦k≦p) となる．具体的に $R_p(x)=u_p(x)+u_{p-1}(x)=\sum_{0\leqq k\leqq[p/2]}(-1)^k\{\binom{p-k}{k}x^{p-2k}+\binom{p-k-1}{k}x^{p-2k-1}\}$ と書ける．これを定理とする．

<u>定理 3</u> $R_p(x)=\sum_{0\leqq k\leqq[p/2]}(-1)^k\{\binom{p-k}{k}x^{p-2k}+\binom{p-k-1}{k}x^{p-2k-1}\}$

$=(x-\cos(2\cdot1\pi/q))(x-\cos(2\cdot2\pi/q))\cdot\cdots\cdot(x-\cos(2\cdot p\pi/q))$.

ここで二項係数の和と s_n の関係を（証明抜きで）まとめておく．

<u>定理 4</u> **q＝2p+1 (p は正の整数)，0≦t≦p とすべての n≧0 に対して，**

$q\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{qn+2t-1}{qk+t}-2^{qn+2t-1}=s_{qn+2t}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2k\pi/q)\}^{nq+2t}$.

また q= 2p+1，0≦t≦p−1 とすべての n≧0 に対して，

$q\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{qn+2t}{qk+t+p+1}-2^{qn+2t}=s_{qn+2t+1}=\sum_{1\leqq k\leqq p}\{2\cdot\cos(2k\pi/q)\}^{nq+2t+1}$.

最後に，リュカ数が現れる例をいくつか紹介する．

$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n}{5k}=2^{5n}+2(-1)^n\cdot L_{5n}.$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n}{5k+1}=2^{5n}+(-1)^nL_{5n-1}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n}{5k+4},$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n}{5k+2}=2^{5n}-(-1)^nL_{5n+1}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n}{5k+3},$$

$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+1}{5k+3}=2^{5n+2}-2(-1)^nL_{5n+1},$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+1}{5k+1}=2^{5n+1}+(-1)^nL_{5n+2}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+1}{5k},$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+1}{5k+2}=2^{5n+1}-(-1)^nL_{5n}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+1}{5k+4},$$

$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+2}{5k+1}=2^{5n+2}+2(-1)^n\cdot L_{5n+2}.$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+2}{5k+1}=2^{5n+2}+(-1)^nL_{5n+1}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+2}{5k},$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+2}{5k+3}=2^{5n+2}-(-1)^nL_{5n+3}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+2}{5k+4},$$

$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+3}{5k+4}=2^{5n+3}-2(-1)^nL_{5n+3},$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+3}{5k+3}=2^{5n+3}-(-1)^nL_{5n+2}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+1}{5k},$$
$$5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+3}{5k+2}=2^{5n+3}+(-1)^nL_{5n+4}=5\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{5n+3}{5k+1},$$

$$10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+1}{10k+3}=2^{10n+1}-2L_{10n+1}=10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+1}{10k+8},$$
$$10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+3}{10k+4}=2^{10n+3}-2L_{10n+3}=10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+3}{10k+9}.$$
$$10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+5}{10k+5}=2^{10n+5}-2L_{10n+5}=10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+5}{10k},$$
$$10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+7}{10k+1}=2^{10n+7}-2L_{10n+7}=10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+7}{10k+6}.$$
$$10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+9}{10k+7}=2^{10n+9}-2L_{10n+9}=10\sum_{0\leqq k\leqq n}\binom{10n+9}{10k+2},$$

[Reference]

（１）Russell A. Gordon ; Lucas Type Sequences and Sums of Binomial Coefficients ; Integers, 23: Paper No. A84, pp.1－23 ; 2023,

（２）Russell A. Gordon ; Lucas Numbers and Sums of Binomial Coefficients ; The College Mathematics Journal, Vol.57, No.2, pp.118－126 ; 2026, March

22nd ICFNTA Istanbul 参加報告

k-Narayana 多項式の根，質疑から生まれた負の添字，そして次回 Kennesaw へ

南出大樹
日本フィボナッチ協会第 24 回研究集会

NIT, Tokyo College / Science Tokyo

研究発表・参加報告・次回案内

1. 参加までの流れ
2. 22nd ICFNTA Istanbul はどんな場だったか
3. 国際会議で発表した結果
4. 質疑・コメントから見えた論点
5. 負のインデックスへの拡張
6. 2028 年 Kennesaw State University へのお誘い

参加までの流れ：今年の場合

1. ホームページ公開
   https://math.gsu.edu.tr/fibo22/
2. 資金援助の申し込み（1 月 1 日〆切）
3. 研究成果のアブストを付けて参加申し込み（4 月 1 日〆切）
4. 採択されたら，参加準備
   - 航空券やホテルの手配（ホテルは斡旋を利用するのが吉）
   - スライド発表
5. 会議では発表・議論・親睦・観光などを楽しむ
6. 会議録の執筆（9 月 1 日？　9 月 10 日？　10 月 30 日？）

22nd ICFNTA Istanbul：recurrence sequences の国際会議

会議の概要

- The 22nd International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications
- 2026 年 7 月 6 日–10 日，Galatasaray University, Istanbul

会議の場所

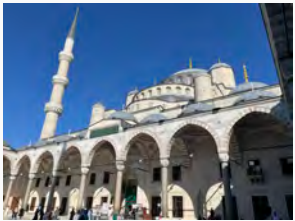
- 東京からイスタンブールには直行便有
- イスタンブール空港から地下鉄やバスで４０分ほどで中心地タクシム
- タクシムから会場となるガラタサライ大学まではバスで２０分

雰囲気

数論・組合せ論・行列論・応用が近い距離で混ざり，20 分講演の質疑で具体的な反応が返ってくる
そこまでレベルの高い会議ではなく，初等的な議論でも真剣に扱ってくれる空気感がある

エクスカーション

１．観光地巡り（水曜午後）





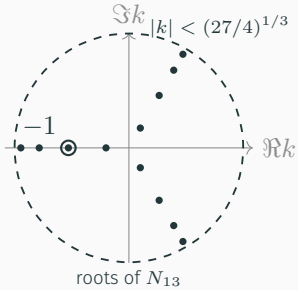
２．ナイトクルージング（木曜夜）

発表タイトル：k-Narayana 多項式の根について

多項式列

$$N_0 = 0, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = k,$$
$$N_m = kN_{m-1} + N_{m-3} \quad (m \geq 3).$$

$$N_4 = k^3 + 1, \qquad N_5 = k(k^3 + 2),$$
$$N_7 = k^6 + 4k^3 + 1, \quad N_{13} = (k^3 + 1)(k^9 + 9k^6 + 19k^3 + 1).$$



主結果

1. 非零根はすべて単純か？　「$k_0 \neq 0,\ N_m(k_0) = 0 \implies N'_m(k_0) \neq 0$.」
2. 有理根はどれだけか？　「$N_m(k_0) = 0,\ k_0 \in \mathbb{Q}^\times \iff k_0 = -1,\ m \in \{4, 13\}$.」

証明の見取り図：漸化式を行列の固有値問題へ

発想の転換

直接微分すると値と導関数が混ざり，閉じた議論にしにくい。
そこで N_m を三角階段グラフの特性多項式に翻訳する。

$$N_m(k) = (-1)^{m+1}\Phi_{3,m-3}(-k)$$



決め手

この隣接行列が「全非負」かつ「強連結性」を満たす．
全非負性が正性を，連結性が分離を与えている

パドヴァン数による判定

根の配置

21st ICFNTA **の結果:** $|k| < (27/4)^{1/3} < 2.$

Padovan input

一般のパドヴァンらせん数を用いる.

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, \qquad P_{s+3} = P_{s+1} + P_s$$

とすると

$$\boxed{\Phi_r(1) = (-1)^r P_{-r-7}.}$$

de Weger **による結果:**

$$P_s = 0 \iff s \in \{-1, -3, -4, -8, -17\}.$$

Consequences

$$1 \in \mathrm{Spec}(A_r) \iff \Phi_r(1) = 0$$

$$\iff P_{-r-7} = 0 \iff r \in \{1, 10\}.$$

k-Narayana 数 N_m に対して, $r = m - 3$ とおくと:

$$N_m(-1) = 0 \iff m \in \{4, 13\}.$$

根の絶対値に関する上限から, 有理根は次に限られる.

$$\boxed{k = -1.}$$

現地でのアクティビティ：研究の距離が近い

印象に残ったこと

- 専門家が多く，反応が具体的であり，短い質問が，かなり本質的
- グラフを扱っている参加者から「有向グラフを扱ってみたくなった」
- 休憩・懇親の場で「k-Narayana の添字を負にするとどうなるか？」

「ちょっとした質問」から研究課題へ

会場では素朴な質問としていただいたが，実際に負の添字まで計算してみると……

- 正の添字の場合とどのような対称性・対応があるか？
- 根の配置や重複度の結果は $m < 0$ でもどうなるか？
- グラフ・行列による解釈は負の添字側にも拡張できるか？

22nd ICFNTA での質問が，
「負のインデックスの k-Narayana 多項式」
を考えるきっかけになった。

会場からの質問が，新しい方向へ

講演後にいただいた質問

N_m の添字 m を負にすると，どうなるか？

もともとの漸化式

$$N_m = kN_{m-1} + N_{m-3}$$

は，逆向きに書けば

$$\boxed{N_{m-3} = N_m - kN_{m-1}}.$$

したがって，N_0, N_1, N_2 から 負の添字にも一意に延長できる。

m	-1	-2	-3	-4	-5	-6
$N_m(k)$	0	1	0	$-k$	1	k^2

その後：負のインデックスはどこまで分かったか

負の添字を 3 つの剰余類に分け，そのうち一つを $\boxed{N_{-(3q+2)}(k) = A_q(k^3)}$ とする．
このとき，一般形はつぎのようになる．

$$A_q(t) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{q+j}{3j} t^j.$$

現在までに分かったこと

$q \geq 2$ に対して

1. $A_q(t) = \det(I - tK_q)$ という行列表示があり，K_q は TN かつ irreducible.
2. A_q の零点はすべて正かつ単純
3. $N_{-(3q+2)}$ の非零根は $\arg k = 0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$ の 3 本の半直線上に現れる
4. $k \in \mathbb{Q}^\times$, $A_{2d} = N_{-(6d+2)}(k) = 0 \iff (d, k) = (1, 1)$

次回予告：2028 年，Kennesaw State University へ

Next conference

- 会場は Kennesaw State University
- アメリカ　ジョージア州アトランタ近郊
- 2028 年 7 月の予定

参加をおすすめしたい理由

- recurrence sequences の研究者と直接話せる
- コメントが具体的で，次の研究につながりやすい
- 国内研究集会との接続を強くしたい

参加を検討している方は，お声掛けください！